PENAKSIR RASIO UNTUK VARIANSI POPULASI MENGGUNAKAN KUARTIL DARI KARAKTER TAMBAHAN PADA SAMPLING ACAK SEDERHANA

Asri Elvita[1*], Arisman Adnan[2], Haposan Sirait[2]

[1]Mahasiswa Program S1 Matematika
[2]Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru, 28293, Indonesia

*asry_ogrady@yahoo.com

ABSTRACT

This paper discusses three ratio estimators for population variance in simple random sampling using quartiles of the auxiliary variable given by Subramani and Kumarapandiyan [*International Journal of Statistics and Applications.,* 2(5): 67-72]. The estimators discussed are the ratio estimator using the first quartile, the third quartile and the inter-quartile range. These three estimators discussed are biased estimators. Furthermore, their mean square errors are compared to show which one is the most efficient estimator. This comparison shows that the ratio estimator using inter-quartile range is the most efficient estimator.

Keywords**:** *ratio estimator, simple random sampling, quartile, bias, mean square error*

ABSTRAK

Pada artikel ini dibahas tiga penaksir rasio untuk variansi populasi pada sampling acak sederhana menggunakan kuartil dari karakter tambahan yang diajukan oleh Subramani dan Kumarapandiyan [*International Journal of Statistics and Applications.,* 2(5): 67-72]. Penaksir yang dibahas adalah penaksir rasio menggunakan kuartil pertama, kuartil ketiga dan jangkauan antar kuartil. Ketiga penaksir yang dibahas merupakan penaksir bias. Selanjutnya, dibandingkan *Mean Square Error* (*MSE*) dari masing-masing penaksir untuk mendapatkan penaksir yang paling efisien. Perbandingan ini menunjukkan bahwa penaksir rasio dengan menggunakan jangkauan antar kuartil paling efisien.

Kata kunci**:** *penaksir rasio, sampling acak sederhana, kuartil, bias, mean square error*

1. PENDAHULUAN

Salah satu metode yang digunakan untuk menaksir variansi populasi pada sampling acak sederhana adalah metode rasio. Misalkan variansi pada populasi berkarakter Y akan ditaksir dengan menggunakan informasi tambahan populasi X yang diketahui. Informasi tambahan yang digunakan adalah kuartil. Metode ini bertujuan untuk meningkatkan ketelitian penaksir dengan mengambil manfaat hubungan antara y_i dan x_i, dimana y_i adalah unit dari populasi berkarakter Y dan x_i adalah unit dari populasi berkarakter X.

Bentuk umum penaksir rasio sampling acak sederhana untuk variansi populasi $\hat{S}_R^2$ dirumuskan sebagai

$$\hat{S}_R^2 = \frac{s_y^2}{s_x^2} S_x^2$$

dengan s_y^2 adalah variansi sampel, dan S_x^2 adalah variansi populasi.

Dalam artikel ini dibahas tiga penaksir rasio untuk variansi populasi pada sampling acak sederhana dengan menggunakan kuartil dari karakter tambahan yang diajukan oleh Subramani dan Kumarapandiyan [6], yaitu

$$\hat{S}_{JG1}^2 = s_y^2 \left[\frac{S_x^2 + Q_1}{s_x^2 + Q_1} \right] \tag{1}$$

$$\hat{S}_{JG2}^2 = s_y^2 \left[\frac{S_x^2 + Q_3}{s_x^2 + Q_3} \right] \tag{2}$$

$$\hat{S}_{JG3}^2 = s_y^2 \left[\frac{S_x^2 + Q_r}{s_x^2 + Q_r} \right] \tag{3}$$

dengan Q_1 adalah kuartil pertama, Q_3 adalah kuartil ketiga dan Q_r adalah jangkauan antar kuartil.

Ketiga penaksir rasio untuk variansi populasi tersebut merupakan penaksir bias, kemudian ditentukan *Mean Square Error* (*MSE*). Berdasarkan ide dari Subramani dan Kumarapandiyan [6], penulis membandingkan *MSE* dari masing-masing penaksir untuk memperoleh penaksir rasio yang efisien. Penaksir yang memiliki nilai *MSE* terkecil merupakan penaksir yang efisien.

2. SAMPLING ACAK SEDERHANA

Sampling acak sederhana adalah sebuah metode yang digunakan untuk mengambil n unit sampel dari N unit populasi sehingga setiap unit populasi memiliki kesempatan yang sama untuk dipilih menjadi unit sampel. Dalam hal ini pengambilan sampel dilakukan tanpa pengembalian agar karakteristik unit-unit lebih akurat [3].

Probabilitas suatu unit akan terpilih menjadi sampel pada pengambilan pertama adalah n/N, pada pengambilan kedua adalah $n-1 \,\big/\, N-1$ dan seterusnya, maka probabilitas dari n unit terpilih pada pengambilan ke-n kali adalah:

$$\frac{n}{N}\frac{(n-1)}{(N-1)}\frac{(n-2)}{(N-2)}\cdots\frac{1}{(N-n+1)}=\frac{n!(N-n)!}{N!}=\frac{1}{{}_N C_n}.$$

Teorema 2.1 [2: h. 30] Untuk sebuah sampel acak sederhana, variansi sampel s_y^2 yang didefinisikan dengan

$$s_y^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n-1},$$

Merupakan penaksir tak bias untuk variansi populasi S_y^2

$$S_y^2=\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{Y})^2}{N-1}.$$

Bukti dari teorema ini dapat dilihat pada [2].

Teorema 2.2 [4] Apabila sebuah sampel berukuran n diambil secara sampling acak sederhana tanpa pengembalian dari populasi berkarakter Y dan berukuran N maka variansi s_y^2 adalah

$$V\left(s_y^2\right)=\gamma S_y^4\left(\beta_{2}(y)-1\right)$$

dengan $\gamma=\dfrac{1}{n}$, $\beta_{2}(y)=\dfrac{\mu_{40}}{\mu_{20}^2}$,

dimana

$$\mu_{40}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-\bar{Y}\right)^4,$$

dan

$$\mu_{20}^2=\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-\bar{Y}\right)^2\right)^2.$$

Bukti dari teorema ini dapat dilihat pada [3].

Untuk menentukan *MSE* dari penaksir dalam bentuk dua variabel digunakan suatu pendekatan dengan menggunakan deret Taylor dua variabel.

Deret Taylor untuk dua variabel [5: h. 47] Misalkan $f(x, y)$ adalah suatu fungsi dua variabel dan $f, f', f'', ..., f^{(n)}$ adalah kontinu pada D dan $f^{(n+1)}$ ada pada D untuk $(x_0, y_0) \in D$. Jika $(x_0 + h, y_0 + k) \in D$, maka

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) + \ldots$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)} f(x_0, y_0)$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \quad (4)$$

dengan $0 < \theta < 1$.

Misalkan $x_0 = S_y^2$, $y_0 = S_x^2$, $h = s_y^2 - S_y^2$ dan $k = s_x^2 - S_x^2$ dan mengabaikan pangkat-pangkat yang lebih besar dari satu, maka dari persamaan (4) diperoleh nilai pendekatan untuk mencari *MSE*, yaitu

$$h(s_y^2, s_x^2) - h(S_y^2, S_x^2) \approx \left.\frac{\partial h(s_y^2, s_x^2)}{\partial s_y^2}\right|_{S_y^2, S_x^2} (s_y^2 - S_y^2) + \left.\frac{\partial h(s_y^2, s_x^2)}{\partial s_x^2}\right|_{S_y^2, S_x^2} (s_x^2 - S_x^2)$$

3. BIAS DAN MSE PENAKSIR RASIO UNTUK VARIANSI POPULASI PADA SAMPLING ACAK SEDERHANA

Bias dan *MSE* penaksir rasio untuk variansi populasi pada sampling acak sederhana dari masing-masing penaksir sebagai berikut.

Bias dan *MSE* dari persamaan (1) diperoleh

$$B(\hat{S}^2_{JG1}) \approx \gamma S_y^2 A_{JG1} \left[A_{JG1}(\beta_{2(x)} - 1) - (\lambda_{22} - 1)\right]$$

$$MSE(\hat{S}^2_{JG1}) \approx \gamma S_y^4 \left[(\beta_{2(y)} - 1) + A^2_{JG1}(\beta_{2(x)} - 1) - 2A_{JG1}(\lambda_{22} - 1)\right],$$

dengan $A_{JG1} = \dfrac{S_x^2}{S_x^2 + Q_1}$, dan $\lambda_{22} = \dfrac{\mu_{22}}{\mu_{20}\mu_{02}}$.

Bias dan *MSE* dari persamaan (2) diperoleh

$$B(\hat{S}^2_{JG2}) \approx \gamma S_y^2 A_{JG2} \left[A_{JG2}(\beta_{2(x)} - 1) - (\lambda_{22} - 1)\right]$$

$$MSE(\hat{S}^2_{JG2}) \approx \gamma S_y^4 \left[(\beta_{2(y)} - 1) + A^2_{JG2} (\beta_{2(x)} - 1) - 2 A_{JG2} (\lambda_{22} - 1) \right]$$

dengan $A_{JG2} = \dfrac{S_x^2}{S_x^2 + Q_3}$ ·

Bias dan *MSE* dari persamaan (3) diperoleh

$$B(\hat{S}^2_{JG3}) \approx \gamma S_y^2 A_{JG3} \left[A_{JG3} (\beta_{2(x)} - 1) - (\lambda_{22} - 1) \right]$$

$$MSE(\hat{S}^2_{JG3}) \approx \gamma S_y^4 \left[(\beta_{2(y)} - 1) + A^2_{JG3} (\beta_{2(x)} - 1) - 2 A_{JG3} (\lambda_{22} - 1) \right]$$

dengan $A_{JG3} = \dfrac{S_x^2}{S_x^2 + Q_r}$ ·

4. PENAKSIR RASIO YANG EFISIEN

Selanjutnya akan ditentukan penaksir rasio yang efisien diantara ke tiga penaksir rasio yang diajukan, yaitu dengan membandingkan *MSE* dari penaksir $\hat{S}^2_{JG1}$, $\hat{S}^2_{JG2}$ dan $\hat{S}^2_{JG3}$.

1. Perbandingan $MSE(\hat{S}^2_{JG1})$ dengan $MSE(\hat{S}^2_{JG2})$ diperoleh $MSE(\hat{S}^2_{JG2}) < MSE(\hat{S}^2_{JG1})$ jika

$$\beta_{2(x)} > 2\lambda_{22} - 1 \cdot \qquad (5)$$

2. Perbandingan $MSE(\hat{S}^2_{JG1})$ dengan $MSE(\hat{S}^2_{JG3})$ diperoleh $MSE(\hat{S}^2_{JG3}) < MSE(\hat{S}^2_{JG1})$ jika

$$\beta_{2(x)} > 2\lambda_{22} - 1 \cdot \qquad (6)$$

3. Perbandingan $MSE(\hat{S}^2_{JG3})$ dengan $MSE(\hat{S}^2_{JG2})$ diperoleh $MSE(\hat{S}^2_{JG2}) < MSE(\hat{S}^2_{JG3})$ jika

$$\beta_{2(x)} > 2\lambda_{22} - 1 \cdot \qquad (7)$$

Berdasarkan perbandingan dari masing-masing penaksir, diketahui bahwa penaksir $\hat{S}^2_{JG2}$ memiliki nilai *MSE* yang terkecil, sehingga penaksir $\hat{S}^2_{JG2}$ merupakan penaksir yang paling efisien dari penaksir rasio lainnya.

5. CONTOH

Untuk lebih mengetahui teori pada bab-bab sebelumnya sebagai contoh digunakan data produksi padi di Indonesia pada tahun 2012 [1]. Untuk mengetahui variansi produksi padi (Y) dengan memanfaatkan informasi tambahan yaitu luasnya tanah yang ditanam padi (X) di tiap-tiap provinsi.

Tabel 1. Luas Panen-Produksi Tanaman Padi pada Tahun 2012 Seluruh Indonesia

No	Provinsi	Luas Panen (Ha)	Produksi (Ton)
1	Aceh	387,803	1,788,738
2	Sumatera Utara	765,099	3,715,514
3	Sumatera barat	476,422	2,368,390
4	Riau	144,015	512,152
5	Jambi	149,369	625,164
6	Sumatera Selatan	769,725	3,295,247
7	Bengkulu	144,448	581,911
8	Lampung	641,876	3,093,422
9	Bangka Belitung	8,057	22,976
10	Kepulauan Riau	382	1,323
11	DKI Jakarta	1,897	11,044
12	Jawa Barat	1,918,799	11,271,861
13	Jawa Tengah	1,773,558	10,232,934
14	DI Yogyakarta	152,912	946,224
15	Jawa Timur	1,975,719	12,198,707
16	Banten	362,636	1,865,893
17	Kalimantan Barat	427,798	1,300,100
18	Kalimantan Tengah	251,787	755,507
19	Bali	149,000	865,553
20	Nusa Tenggara Barat	425,448	2,114,231
21	Nusa Tenggara Timur	200,094	698,566
22	Kalimantan Selatan	496,082	2,086,221
23	Kalimantan Timur	140,689	553,440
24	Sulawesi Utara	126,931	615,062
25	Sulawesi Tengah	229,080	1,024,316
26	Sulawesi Selatan	981,164	5,008,143
27	Sulawesi Tenggara	124,511	516,291
28	Gorontalo	51,164	245,357
29	Sulawesi Barat	103,796	412,620
30	Maluku	20,489	84,271
31	Maluku Utara	17,794	65,686
32	Papua Barat	7,750	30,245
33	Papua	7,149	138,032

Sumber:www.bps.go.id

Dengan menggunakan data pada Tabel 1 akan ditentukan penaksir rasio yang efisien untuk menaksir variansi produksi padi dengan menggunakan syarat penaksir lebih efisien yang diperoleh sebelumnya. Hal ini secara umum dapat ditunjukkan dengan menghitung *MSE* dari masing masing penaksir yang diajukan. Sebagai informasi tambahan untuk menaksir variansi produksi padi digunakan luas panen. Untuk menghitung *MSE* dari masing-masing penaksir terlebih dahulu ditentukan nilai yang dibutuhkan. Informasi yang diperoleh dari data luas panen dan produksi tanaman padi dengan menggunakan Microsoft Excel pada Tabel 2 berikut.

Tabel 2. Nilai-nilai yang diperoleh berdasarkan data luas panen dan produksi tanaman padi

N	33	$\beta_{2(y)}$	8540,929717
n	12	$\beta_{2(x)}$	8626835,614
$\bar{Y}$	2.090.022	λ_{22}	31,03030303
$\bar{X}$	407.074	Q_1	103796
S_x	538.081,4764	Q_3	476422
S_y	3184279,541	Q_r	372626
S_x^2	289.532	A_{JG1}	0,999999642
S_y^2	101.398	A_{JG2}	0,999998355
S_y^4	694.278	A_{JG3}	0,999998713
γ	0,083333333	-	-

dengan mensubstitusikan nilai-nilai yang diperoleh pada Tabel 2 ke persamaan (5), (6), dan (7) maka diperoleh

(i) $MSE(\hat{S}^2_{JG2}) < MSE(\hat{S}^2_{JG1})$ jika 8677081,353 > 61,06061

(ii) $MSE(\hat{S}^2_{JG3}) < MSE(\hat{S}^2_{JG1})$ jika 8677081,353 > 61,06061

(iii) $MSE(\hat{S}^2_{JG2}) < MSE(\hat{S}^2_{JG3})$ jika 8677081,353 > 61,06061

Selanjutnya nilai *MSE* dari masing-masing penaksir diberikan pada Tabel 3 berikut.

Tabel 3. Nilai *MSE* untuk ketiga penaksir

No	Penaksir	*MSE*
1	$\hat{S}^2_{JG1}$	4,99609
2	$\hat{S}^2_{JG2}$	4,99607
3	$\hat{S}^2_{JG3}$	4,99608

Berdasarkan Tabel 3, dapat dilihat bahwa penaksir rasio $\hat{S}^2_{JG2}$ memiliki nilai *MSE* yang terkecil dengan syarat bahwa kondisi lebih efisien dapat dipenuhi.

6. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dikemukakan dapat disimpulkan bahwa penaksir rasio dengan menggunakan kuartil ketiga adalah penaksir yang paling efisien dari dua penaksir yang lainnya jika syarat terpenuhi.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Badan Pusat Statistik. *Tabel Luas Panen, Produktivitas, Produksi Tanaman Jagung Seluruh Provinsi di Indonesia* Available from: http://www.bps.go.id/tnmn_pgn. Diakses pada 11 Juni 2013.

[2] Cochran, W. G. 1991. *Teknik Penarikan Sampel*, *Edisi ketiga.* Terj. Dari *Sampling Techniques,* oleh Rudiansyah & E. R Osman. Penerbit Universitas Indonesia, Jakarta.

[3] Sukhatme, P. V. 1957. *Sampling Theory of Surveys with Applications*. The Indian Council of Agricultural Research, New Delhi.

[4] Shabbir, J & Gupta, S. 2008. Variance Estimation in Simple Random Sampling Using Auxiliary Information. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics,* 37(1): 57-67.

[5] Phillips, G. M & P. J. Taylor. 1972. *Theory and Applications of Numerical Analysis*, *Second Edition*. Academic Press, New York.

[6] Subramani, J. & G. Kumarapandiyan. 2012. Variance Estimation Using Quartiles and their Functions of an Auxiliary Variable, *International Journal of Statistics and Applicattions,* 2(5): 67-72.