

**PENAKSIR RASIO UNTUK RATA-RATA POPULASI MENGGUNAKAN
KOEFISIEN VARIASI DAN KOEFISIEN KURTOSIS
PADA SAMPLING GANDA**

Heru Angrianto^{1*}, Arisman Adnan², Firdaus²

¹Mahasiswa Program S1 Matematika

²Dosen Jurusan Matematika

**Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru, 28293, Indonesia**

*heruangrianto92@yahoo.co.id

ABSTRACT

This article discusses three type ratio estimators for population mean using coefficient of variation and coefficient of kurtosis on double sampling which is a review from the article of Singh et. al [Italian Journal of Pure and Applied Mathematics-N. 28(2011): 135-142]. The three estimators are biased estimators, then the mean square error of each estimator is determined. Estimator with the smallest mean square error is the most efficient estimator. Example is given at the end of discussion.

Keywords: *Ratio estimator, bias, mean square error (MSE), double sampling, coefficient of variation and coefficient of kurtosis.*

ABSTRAK

Penaksir yang dibahas dalam artikel ini merupakan tiga tipe penaksir rasio untuk rata-rata populasi menggunakan koefisien variasi dan koefisien kurtosis pada sampling ganda yang merupakan review dari artikel Singh et. al [Italian Journal of Pure and Applied Mathematics-N. 28(2011): 135-142]. Ketiga penaksir merupakan penaksir bias kemudian ditentukan *mean square error (MSE)* dari ketiga penaksir tersebut. Selanjutnya, (*MSE*) dari masing-masing penaksir dibandingkan. Penaksir dengan (*MSE*) terkecil merupakan penaksir yang efisien. Contoh diberikan pada akhir pembahasan.

Kata kunci: Penaksir rasio, bias, mean square error (*MSE*), sampling ganda, koefisien variasi dan koefisien kurtosis.

1. PENDAHULUAN

Metode sampling ganda adalah suatu metode pengambilan sampel secara dua tahap atau dua kali pengambilan. Pada pengambilan pertama atau tahap pertama diambil sampel berukuran n' dari populasi berukuran N sebagai sampel tahap pertama. Selanjutnya pada pengambilan kedua atau tahap kedua, sampel diambil berukuran n dari sampel

pertama berukuran n' . Pengambilan sampel pada sampling ganda ini dilakukan secara acak sederhana tanpa pengembalian [1].

Misalkan karakteristik yang dimiliki populasi adalah variabel Y , X dan Z dengan Y adalah variabel yang akan diteliti, serta X dan Z adalah variabel tambahan yang telah diteliti sebelumnya. Dengan memanfaatkan hubungan variabel Y dengan variabel tambahan X dan Z yang berada dalam populasi yang sama maka dapat digunakan metode penaksir rasio. Diketahui bahwa Y , X dan Z saling berkorelasi positif, sehingga penggunaan variabel tambahan dapat digunakan untuk meningkatkan ketelitian penaksir. Penaksir rasio ini juga menggunakan koefisien variasi C_z dan koefisien kurtosis $B_2(z)$. Koefisien variasi dan koefisien kurtosis digunakan untuk meningkatkan ketelitian.

Pada sampling ganda pengambilan sampel dua kali dimaksudkan adalah untuk memperkecil sampel yang dibutuhkan dan untuk lebih menghemat biaya dan waktu. Penaksir yang baik dalam sampling ganda adalah apabila rata-rata perkiraan sama dengan parameter yang sebenarnya dan dinamakan penaksir tak bias. Penaksir yang memiliki variansi minimum merupakan penaksir yang baik untuk penaksir tak bias tetapi apabila rata-rata perkiraan tidak sama dengan parameter sebenarnya dinamakan penaksir bias, maka penaksir bias yang baik adalah penaksir bias yang memiliki *Means Square Error (MSE)* minimum [1].

2. PENAKSIR UNTUK RATA-RATA POPULASI

Dalam bagian ini dibahas beberapa penaksir pada sampling acak, antara lain penaksir untuk rata-rata populasi pada sampling acak sederhana, penaksir untuk rata-rata populasi pada sampling ganda dan penaksir rasio untuk rata-rata populasi pada sampling ganda. Serta memuat beberapa definisi dan teorema yang merupakan teori pendukung yang digunakan dalam menyelesaikan permbahasan.

Misalkan suatu populasi berukuran N dengan nilai variabel y_i untuk masing-masing unit, $i = 1, 2, 3, \dots, N$ maka rata-rata dari populasi definisikan dengan $\bar{Y} = (1/N) \sum_{i=1}^N y_i$. Akan diambil sampel berukuran n unit dengan nilai variabel y_i untuk masing-masing unit, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ maka rata-rata sampel didefinisikan dengan $\bar{y} = (1/n) \sum_{i=1}^n y_i$ [1].

(i) Sampling Acak Sederhana

Penarikan sampel secara acak sederhana adalah pengambilan n unit sampel dari N unit populasi, dimana setiap elemen populasi mempunyai kesempatan yang sama untuk terpilih menjadi anggota sampel. Pengambilan sampel dapat dilakukan dengan pengembalian atau tanpa pengembalian.

Ekspektasi dari \bar{y} akan sama dengan \bar{Y} , pernyataan ini dapat ditunjukkan sebagai berikut

$$E(y_i) = \sum_{i=1}^N P(y_i) y_i$$

dengan $P(y_i)$ adalah probabilitas terpilihnya y_i menjadi anggota sampel. Apabila probabilitas y_i terpilih menjadi anggota sampel adalah $1/N$, maka

$$E(y_i) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} y_i$$

$$E(y_i) = \bar{Y}$$

dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned} E(\bar{y}) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i\right) \\ E(\bar{y}) &= \bar{Y} \end{aligned} \quad (1)$$

Berdasarkan persamaan (1) dinyatakan bahwa \bar{y} adalah penaksir tak bias dari \bar{Y} .

Teorema 1 [1, h: 27] Apabila sampel berukuran n diambil dari populasi berukuran N yang berkarakter Y , dengan sampling acak sederhana tanpa pengembalian maka variansi rata-rata sampel \bar{y} dinotasikan dengan $V(\bar{y})$ yaitu

$$V(\bar{y}) = \frac{S_y^2}{n} \frac{N-n}{N} = \frac{(1-f)}{n} S_y^2$$

dengan $f = n/N$ adalah fraksi penarikan sampel dan $S_y^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 / N-1$

adalah variansi y_i pada populasi berkarakter Y .

Bukti: Bukti dari teorema ini dapat dilihat pada [1, h: 27]. ■

(ii) Sampling Ganda

Misalkan terdapat suatu populasi berukuran N , diambil sampel berukuran n' untuk diteliti, pengambilan sampel berukuran n' tersebut dilakukan dengan sampling acak sederhana tanpa pengembalian. Ini merupakan penarikan sampel tahap pertama yang disebut sebagai sampel pertama pada sampling ganda. Selanjutnya diambil sampel yang akan diteliti berukuran n yaitu sampel tahap kedua dari sampel berukuran n' . Pengambilan sampel tahap kedua juga menggunakan sampling acak sederhana tanpa pengembalian.

Teorema 2 [3, h: 287] Rata-rata sampel per unit sampel tahap kedua pada sampling ganda adalah \bar{y}_{sg_j} dan rata-rata sampel per unit sampel tahap pertama adalah \bar{y}'_{sas_i} merupakan penaksir tak bias untuk rata-rata populasi \bar{Y} , maka \bar{y}_{sg_j} merupakan penaksir tak bias untuk rata-rata populasi \bar{Y} .

Bukti: Misalkan rata-rata sampel per unit pada tahap kedua adalah $\bar{y}'_{ij_{SRS}}$ dan dinotasikan $\bar{y}_{j_{SG}}$, dengan $C_n^{n'}$ merupakan peluang terambilnya sampel pada tahap kedua maka diperoleh,

$$\begin{aligned} E(\bar{y}_{j_{SG}}) &= \sum_{j=1}^{C_n^{n'}} \bar{y}_{j_{SG}} P(\bar{y}_{j_{SG}}) \\ &= \sum_{i=1}^{C_n^N} \sum_{j=1}^{C_n^{n'}} \bar{y}'_{ij_{SRS}} P(\bar{y}'_{ij_{SRS}}) \\ &= \sum_{i=1}^{C_n^N} P(\bar{y}'_{i_{SRS}}) E(\bar{y}'_{ij_{SRS}} | i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{C_n^N} P(\bar{y}_{iSRS}) \bar{y}_{iSRS} \\
&= \frac{1}{C_n^N} \sum_{i=1}^{C_n^N} \bar{y}_{iSRS} \\
E(\bar{y}_{jSG}) &= \bar{Y}.
\end{aligned}$$

■

Teorema 3 [3, h: 287] Jika sampel pertama adalah acak dan berukuran n' , sampel kedua adalah sampel acak dari sampel pertama berukuran n . maka variansi \bar{y}_{jSG} pada sampling ganda adalah

$$V(\bar{y}_{jSG}) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N} \right) S_y^2.$$

$$\text{dengan } S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2}{N-1}.$$

■

Bukti: Bukti dari teorema ini dapat dilihat pada [3, h: 287].

Pernaksir Rasio untuk Rata-Rata Populasi pada Sampling Ganda

Metode taksiran untuk menaksir parameter populasi yang sering digunakan adalah metode rasio dengan menggunakan informasi yang sudah ada yang merupakan variabel tambahan berkarakter X yaitu dengan memanfaatkan hubungan Y dengan variable tambahan X yang berada dalam populasi yang sama. Penggunaan informasi tambahan bertujuan untuk meningkatkan ketelitian penaksir. Sebelumnya telah dibahas penaksir rasio dan dual rasio untuk rata-rata populasi pada sampling ganda masing-masing yang diajukan oleh Sukhatme [3], yaitu

$$\hat{Y}_{SG} = \bar{y}_{SG} \frac{\bar{x}'_{SRS}}{\bar{x}_{SG}},$$

dengan

$$\bar{y}_{SG} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{jSG},$$

$$\bar{x}'_{SRS} = \frac{1}{n'} \sum_{i=1}^{n'} x'_{iSRS},$$

$$\bar{x}_{SG} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{jSG}.$$

Penaksir rasio adalah penaksir bias, kemudian ditentukan MSE . Bias dan MSE penaksir rasio yang diajukan oleh Sukhatme [3] untuk rata-rata populasi pada sampling ganda sebagai berikut:

Bias dan MSE Penaksir Rasio yaitu

$$\begin{aligned}
B(\hat{Y}_{SG}) &\approx \bar{Y} (f_3 (C_x^2 - \rho_{xy} C_x C_y)) \\
MSE(\hat{Y}_{SG}) &\approx \bar{Y}^2 (f_1 C_y^2 + (f_1 - f_2) (C_x^2 - 2\rho C_x C_y))
\end{aligned}$$

3. PENAKSIR RASIO UNTUK RATA-RATA POPULASI PADA SAMPLING GANDA

Dalam artikel ini dibahas tiga penaksir untuk rata-rata populasi pada sampling ganda dengan menggunakan variabel tambahan X dan Z dengan menggunakan koefisien variasi C_z dan koefisien kurtosis $\beta_2(z)$ yang merupakan review dari artikel Singh et al [4], yaitu

$$\hat{\bar{Y}}_1 = \bar{y}_{SG} \left(\frac{\bar{x}'_{SRS}}{\bar{x}_{SG}} \right) \left(\frac{\bar{Z} + C_z}{\bar{z}'_{SRS} + C_z} \right). \quad (2)$$

$$\hat{\bar{Y}}_2 = \bar{y}_{sg} \left(\frac{\bar{x}'_{SRS}}{\bar{x}_{SG}} \right) \left(\frac{\beta_2(z)\bar{Z} + C_z}{\beta_2(z)\bar{z}'_{SRS} + C_z} \right). \quad (3)$$

$$\hat{\bar{Y}}_3 = \bar{y}_{sg} \left(\frac{\bar{x}'_{SRS}}{\bar{x}_{SG}} \right) \left(\frac{C_z\bar{Z} + \beta_2(z)}{C_z\bar{z}'_{SRS} + \beta_2(z)} \right). \quad (4)$$

dengan \bar{x}'_{SRS} dan \bar{z}'_{SRS} adalah rata-rata sampel tahap pertama dari populasi berkarakteristik X dan Z , \bar{y}_{SG} dan \bar{x}_{SG} adalah rata-rata sampel tahap kedua dari populasi berkarakteristik Y dan X , \bar{X} adalah rata-rata populasi X .

Ketiga penaksir untuk rata-rata populasi tersebut merupakan penaksir bias, kemudian ditentukan MSE . Selanjutnya bandingkan MSE dari masing-masing penaksir untuk memperoleh penaksir yang efisien. Penaksir yang memiliki nilai MSE terkecil merupakan penaksir yang efisien.

4. BIAS DAN MSE PENAKSIR RASIO UNTUK RATA-RATA POPULASI

Bias dan MSE dari penaksir rasio pada persamaan (2), (3), dan (3) untuk rata-rata populasi pada sampling ganda dari masing-masing penaksir sebagai berikut

Bias dan MSE dari penaksir $\hat{\bar{Y}}_1$ adalah

$$B(\hat{\bar{Y}}_1) \approx \bar{Y}((f_1 - f_2)(C_x^2 - \rho_{xy}C_xC_y) + \theta_1^2 f_2 C_z^2 - \theta_1 f_2 \rho_{xz} C_x C_z),$$

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_1) \approx \bar{Y}^2(f_1 C_y^2 + f_2(\theta_1^2 C_z^2 - 2\theta_1 \rho_{yz} C_y C_z) + f_3(C_x^2 - 2\rho_{yx} C_y C_x)).$$

Bias dan MSE dari penaksir $\hat{\bar{Y}}_2$ adalah

$$B(\hat{\bar{Y}}_2) \approx \bar{Y}((f_1 - f_2)(C_x^2 - \rho_{xy}C_xC_y) + \theta_2^2 f_2 C_z^2 - \theta_2 f_2 \rho_{xz} C_x C_z),$$

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_2) \approx \bar{Y}^2(f_1 C_y^2 + f_2(\theta_2^2 C_z^2 - 2\theta_2 \rho_{yz} C_y C_z) + f_3(C_x^2 - 2\rho_{yx} C_y C_x)).$$

Bias dan MSE dari penaksir $\hat{\bar{Y}}_3$ adalah

$$B(\hat{\bar{Y}}_3) \approx \bar{Y}((f_1 - f_2)(C_x^2 - \rho_{xy}C_xC_y) + \theta_3^2 f_2 C_z^2 - \theta_3 f_2 \rho_{xz} C_x C_z),$$

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_3) \approx \bar{Y}^2(f_1 C_y^2 + f_2(\theta_3^2 C_z^2 - 2\theta_3 \rho_{yz} C_y C_z) + f_3(C_x^2 - 2\rho_{yx} C_y C_x)),$$

dengan

$$f_1 = \frac{1}{n} - \frac{1}{N},$$

$$f_2 = \frac{1}{n} - \frac{1}{N},$$

$$f_3 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n}.$$

5. PENAKSIR RASIO YANG EFISIEN

Untuk menentukan penaksir yang efisien dari penaksir yang bias, dapat ditentukan dengan cara mencari selisih *MSE* dari ketiga penaksir.

1. Perbandingan antara penaksir rasio \hat{Y}_1 dengan penaksir rasio \hat{Y}_2 diperoleh $MSE(\hat{Y}_1) < MSE(\hat{Y}_2)$ jika

$$\rho_{yz} < \frac{(\theta_1 + \theta_2)C_z}{2C_y}.$$

2. Perbandingan antara penaksir rasio \hat{Y}_1 dengan penaksir rasio \hat{Y}_3 diperoleh $MSE(\hat{Y}_1) > MSE(\hat{Y}_3)$ jika

$$\rho_{yz} < \frac{(\theta_1 + \theta_3)C_z}{2C_y}.$$

3. Perbandingan antara penaksir rasio \hat{Y}_2 dengan penaksir rasio \hat{Y}_3 diperoleh $MSE(\hat{Y}_2) > MSE(\hat{Y}_3)$ jika

$$\rho_{yz} < \frac{(\theta_2 + \theta_3)C_z}{2C_y}.$$

6. CONTOH

Berikut merupakan data tentang pendapatan bersih (Y), produksi sawit (X) dan luas lahan sawit (Z) pada masyarakat perkebunan kelapa sawit dikabupaten kampar dalam 1 bulan [2].

Tabel 1. Pendapatan Bersih (Juta Rupiah), Produksi Sawit (Ton), dan Luas Lahan Sawit (Ha) pada Masyarakat Perkebunan Kelapa Sawit di Kabupaten Kampar dalam 1 Bulan.

No	<i>Y</i> Pendapatan Bersih (Juta Rupiah)	<i>X</i> Produksi Sawit (Ton)	<i>Z</i> Luas Lahan (Ha)
1	1.27	2.8	3
2	1.79	3.9	4
3	2.01	4.5	5
4	2.21	4.5	5
5	2.04	4	4
6	1.48	4.9	5
7	2.55	4.9	5
8	1.95	6	6
9	2.47	7	7
10	2.46	4.5	5
11	2.39	6	6
12	2.82	7.5	7
13	2.96	9	9
14	3.02	8	8
15	3.17	7.8	8
16	2.10	4	4
17	1.97	3.9	4
18	1.81	5.8	6
19	3.10	9.5	10
20	2.93	6.9	7
21	2.11	3.7	4
22	2.34	4	4
23	3.11	7	7
24	2.26	4	4
25	2.73	7	6
26	3.15	6	6
27	2.92	5	5
28	2.35	4	4
29	1.89	5.5	5
30	1.08	2.5	3
31	2.82	5	5
32	1.54	3.5	4
33	2.62	5	5
34	1.87	4	5
35	2.68	8	8
36	2.58	8.6	9
37	2.36	7	7
38	1.54	3.5	4

39	2.29	6.5	6
40	2.05	6	6
41	2.20	4.8	5
42	1.75	3	3
43	3.30	8	8
44	1.87	4	5
45	3.08	9	9
46	2.93	5	5
47	3.05	7.9	8
48	3.81	10	9
49	1.86	4	4
50	4.58	12	10
51	2.37	5.8	6
52	2.72	9	10
53	3.51	6	6
54	2.55	5	5
55	2.88	8	8
56	2.67	6.7	7
57	1.86	4	4
58	2.55	4.9	5
59	1.90	3.8	4
60	2.92	5.8	6

Sumber: [2]

Dengan menggunakan data pada Tabel 1 akan ditentukan penaksir yang efisien untuk menaksir rata-rata Penghasilan bersih (Juta Rupiah) dengan menggunakan syarat penaksir lebih efisien yang diperoleh sebelumnya. Hal ini secara umum dapat ditunjukkan dengan menghitung MSE dari masing-masing penaksir. Sebagai informasi tambahan untuk menaksir rata-rata Penghasilan bersih (Juta Rupiah), digunakan luas lahan sawit (Ha) dan produksi sawit (Ton) yang telah diteliti sebelumnya. Informasi yang diperoleh sebelumnya digunakan untuk menentukan pendapatan bersih dengan menggunakan Microsoft Excel, yaitu

$$\begin{array}{lllll} \bar{Y} = 2,452 & C_y^2 = 0,067 & \rho_{yx} = 0,805 & N = 60 & C_z = 0,319 \\ \bar{X} = 5,798 & C_x^2 = 0,122 & \rho_{yz} = 0,748 & n' = 25 & \beta_2(z) = 2,390 \\ \bar{Z} = 5,866 & C_z^2 = 0,101 & \rho_{xz} = 0,976 & n = 10 & \end{array}$$

Selanjutnya hitung MSE , diperoleh bahwa

- (i) $MSE(\hat{Y}_1) < MSE(\hat{Y}_2)$ jika $\rho_{yz} < 1,153$.
- (ii) $MSE(\hat{Y}_1) > MSE(\hat{Y}_3)$ jika $\rho_{yz} < 0,831$
- (iii) $MSE(\hat{Y}_2) > MSE(\hat{Y}_3)$ jika $\rho_{yz} < 0,848$

Selanjutnya nilai MSE dari masing-masing penaksir diberikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Nilai MSE ketiga penaksir

No	Penaksir	MSE	Rata-rata
1	$\hat{\bar{Y}}_1$	0,0214	2,4292
2	$\hat{\bar{Y}}_2$	0,0217	2,4296
3	$\hat{\bar{Y}}_3$	0,0202	2,4236

Dari Tabel 2, dapat dilihat bahwa

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_2) > MSE(\hat{\bar{Y}}_1) > MSE(\hat{\bar{Y}}_3)$$

Dengan demikian $\hat{\bar{Y}}_3$ adalah penaksir yang paling efisien.

7. KESIMPULAN

Dari pembahasan di atas, jika syarat efisiensi terpenuhi maka dapat disimpulkan penaksir rasio $\hat{\bar{Y}}_3$ merupakan penaksir yang relative efisien dibanding penaksir $\hat{\bar{Y}}_1$ dan penaksir $\hat{\bar{Y}}_2$.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Cochran, W.G. 1991. *Teknik Penarikan Sampel, Edisi Ketiga*. Terj. Dari *Sampling Techniques*, oleh Rudiansyah & E.R Osman. UI Press, Jakarta.
- [2] Salomo. 2007. Hubungan Luas Lahan Sawit (Ha), Produksi Sawit (Ton) dan pendapatan dari Produksi Sawit (Juta Rupiah). Skripsi Fakultas Ekonomi Universitas Riau, Pekanbaru.
- [3] Sukhatme, P. V. 1957. *Sampling Theory of Surveys with Applications*. The Indian Council of Agricultural Research, New Delhi.
- [4] Singh, R. , P. Chauhan, N. Sawan and F. Smarandache. 2011. Improvement in Estimating Population Mean Using Two Auxiliary Variables in Two-Phase Sampling. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*-N. 28: 135-142.