ALTERNATIF KONTRUKSI TITIK NAGEL

Indah Suryani[1*], Mashadi[2], M. Natsir[2]

[1]Mahasiswa Program S1 Matematika
[2]Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Univeritas Riau
Kampus Bina Widya 28293 Indonesia

*indah.suryani2810@yahoo.com

ABSTRACT

This paper discusses the alternative construction of Nagel point, that is the point formed by intersection of three vertices of a triangle which is connected to the points of tangency of the excircle with the opposite sides. This alternative constructionhas been shown to pass through the incircle. Then, this paper also discusses about outer Nagel point(semi Nagel point) and prove the concurrence of the Nagel point.

Keywords: *concurrence, excircle*, *incircle*, *Nagel point, outer Nagel point*

ABSTRAK

Artikel ini membahas tentang alternatif mengkontruksi titik Nagel, yaitu titik yang terbentuk dari perpotongan antara ketiga titik sudut pada sebuah segitiga yang dihubungkan dengan titik singgung *excircle* di hadapannya. Alternatif ini ditunjukkan melalui *incircle*.Selanjutnya dibahas juga mengenai titik Nagel yang berada di luar segitiga (semi titik Nagel) dan membuktikan konkurensi dari titik Nagel.

Kata kunci:*excircle, incircle, konkurensi,semi titik Nagel, titik Nagel.*

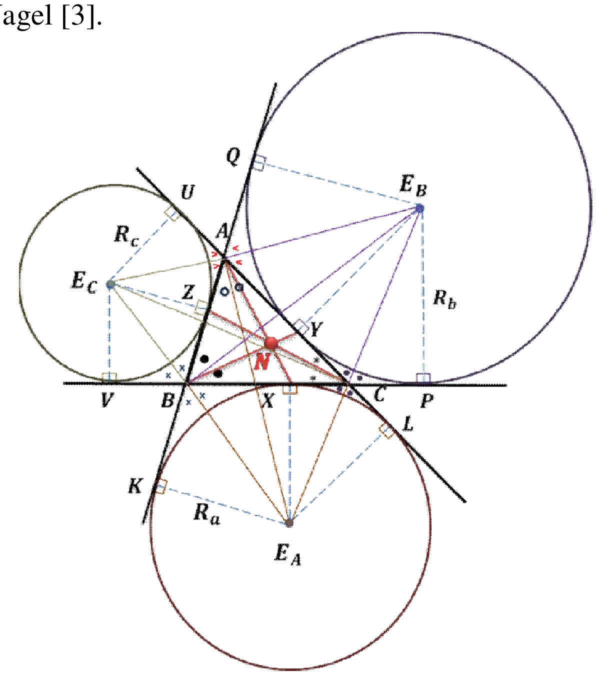
1. PENDAHULUAN

Pada sebarang segitiga dapat dibentuk suatu titik konkurensi[1, h. 481] diantaranya adalah titik *incenter*[1, h. 503]dan titik *excenter*[3]. Masing-masing dari titik ini dapat dibentuk suatu lingkaran, titik *incenter* menghasilkan suatu lingkaran dalam atau dapat juga disebut sebagai (*incircle)*[5, h.150], sedangkan titik *excenter* menghasilkan suatu lingkaran singgung luar (*excircle*)[3]. Selanjutnya, jika terdapat suatu segitiga dengan tiga buah*excircle*, maka dapat dibentuk suatu titik konkurensi lain, yaitu titik Nagelyang merupakan titik konkurensi dari tiga titik sudut pada sebuah segitiga terhadap titik singgung *excircle* segitiga dihadapannya [3,6]. Menurut Hoehn, terdapat alternatif lain yang dapat dilakukan dalam membentuk suatu titik Nagel, alternatif tersebut ialah mengkontruksi titik Nagel melalui suatu *incircle*[4]. Pada artikel ini penulis mendetailkan alternatif ini, kemudian dibandingkan dengan langkah mengkontruksi titik Nagel melalui *excircle*, sehingga dari kedua cara tersebut dihasilkan suatu titik Nagel yang sama. Artikel ini juga membahas mengenai keberadaan titik

Nagel di luar segitiga [2] dan membuktikan konkurensi titik Nagel melalui pendekatan teorema Ceva [5, h. 328].

2. MENGKONTRUKSI TITIK NAGEL

Konsep terbentuknya titik Nagel adalah berasal dari *excircle*, dengan demikian akan dibahas terlebih dahulu mengenai mengkontruksi titik Nagel melalui*excircle*. Untuk mengkontruksi titik Nagelmelalui*excircle,* perhatikan Gambar 1. Langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut, misalkanpada sebuah sebarang ΔABC disetiap sisi segitiga dibentuk suatu *excircle*, sehinggamasing-masing menyinggung di titik X, Y,dan$Z$.Hubungkan ketiga titik sudut pada segitiga terhadap titik singgung *excircle* di hadapannya, maka ketiga garis tersebut akan konkuren di titik N dan konkurensi ini disebut dengan titik Nagel [3].



Gambar 1. Titik Nagel yang terbentuk melalui*excircle*.

Untuk menunjukkan konkurensi garis pada suatu segitiga, dapat digunakan suatu teorema yaitu sebagai berikut [5, h. 328].

Teorema 1. (Teorema Ceva) Jika D, E, dan F masing-masing adalah titik pada sisi BC, CA, dan AB pada ΔABC. Maka garis AD, BE, dan CF adalah konkuren jika dan hanya jika

$$\frac{AF}{FB}\frac{BD}{DC}\frac{CE}{EA}=1.$$

Selanjutnya pada Gambar 1,untuk menunjukkan ketiga garis AX, BY, dan CZ konkuren di titik Nagel, terdapatteorema berikut [6].

Teorema 2. Jika setiap titik sudut pada segitiga dihubungkan terhadap titik singgung *excircle* di hadapannya, makaketiga garis tersebut konkuren di titik Nagel.

Bukti: Perhatikan Gambar 1, misalkan a adalah panjang sisi BC, b panjang sisi AC, dan c panjang sisi AB. Pada *excircle*yang menyinggung sisi CA, terdapat beberapa garis singgung yang memiliki panjang yang sama, yaitu

$$QB=BP=s$$

$$CY=CP=s\text{-}a \quad (1)$$

$$YA=AQ=s-c. \quad (2)$$

Dengan membandingkan persamaan (1) dan (2), diperoleh

$$\frac{CY}{YA}=\frac{s\text{-}a}{s\text{-}c}\ . \quad (3)$$

Pada *excircle*yang menyinggung sisi AB, diperoleh

$$CU=VC=s$$

$$AZ=UA=s\text{-}b \quad (4)$$

$$ZB=BV=s-a. \quad (5)$$

Dengan membandingkan persamaan (4) dan (5), diperoleh

$$\frac{AZ}{ZB}=\frac{s\text{-}b}{s\text{-}a}\ . \quad (6)$$

Sedangkan pada *excircle*yang menyinggung sisi BC, diperoleh

$$AK=LA=s$$

$$BX=KB=s\text{-}c \quad (7)$$

$$XC=CL=s-b. \quad (8)$$

Dengan membandingkan persamaan (7) dan (8), diperoleh

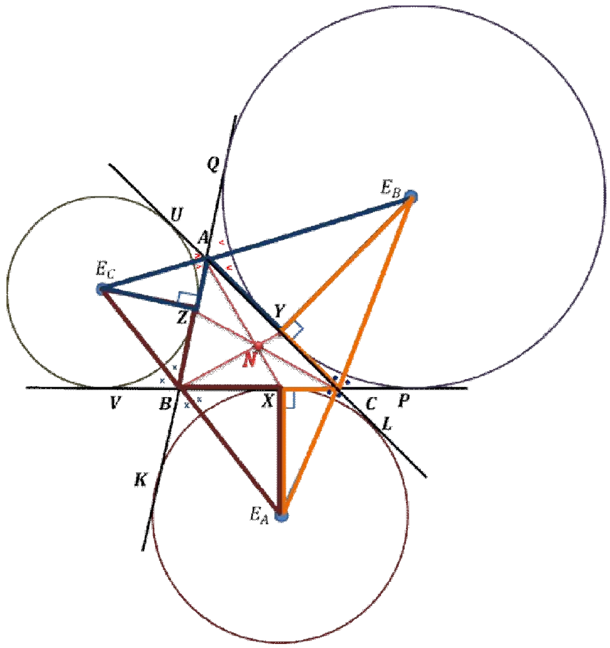
$$\frac{BX}{XC}=\frac{s\text{-}c}{s\text{-}b}\ . \quad (9)$$

Jika persamaan (3), (6), dan (9) dikalikan, maka

$$\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB}\frac{BX}{XC}=\frac{s\text{-}a}{s\text{-}c}\frac{s\text{-}b}{s\text{-}a}\frac{s\text{-}c}{s\text{-}b}=1,$$

karena perbandingan sisi-sisi pada segitiga bernilai 1, maka terbukti bahwa ketiga garis AX, BY, dan CZkonkurenyaitu di titik N.

Pembuktian mengenai konkurensi titik Nagel dapat juga dilakukan dengan menggunakan konsep kesebangunan pada dua buah segitiga [3]. Perhatikan ΔABC yang memiliki *excircle*di setiap sisinya padaGambar 2, $\Delta BXE_A \sim \Delta BZE_C$, $\Delta CYE_B \sim \Delta CXE_A$, dan $\Delta AZE_C \sim \Delta AYE_B$.



Gambar 2. Konkurensi titik Nagel berdasarkan kesebangunan segitiga.

Karena $\Delta BXE_A \sim \Delta BZE_C$,maka diperoleh perbandingan sisi

$$\frac{BX}{BZ} = \frac{XE_A}{ZE_C} \ , \qquad (10)$$

$\Delta CYE_B \sim \Delta CXE_A$,diperoleh perbandingan sisi

$$\frac{CY}{CX} = \frac{YE_B}{XE_A} \qquad (11)$$

dan $\Delta AZE_C \sim \Delta AYE_B$, dengan perbandingan sisi

$$\frac{AZ}{AY} = \frac{ZE_C}{YE_B} \ .(12)$$

Jikapersamaan (10), (11), dan(12)dikalikan, maka

$$\frac{BX}{BZ}\frac{CY}{CX}\frac{AZ}{AY} = \frac{XE_A}{ZE_C}\frac{YE_B}{XE_A}\frac{ZE_C}{YE_B} = 1,$$

kemudian diperoleh

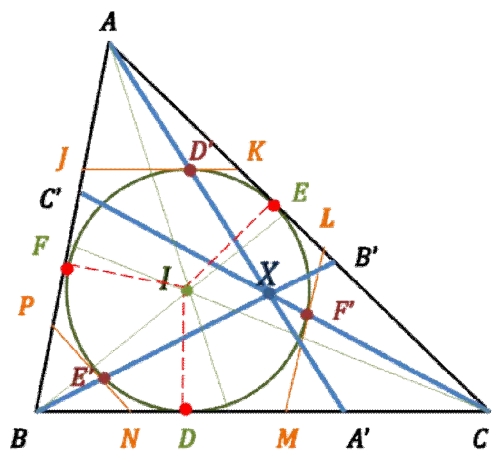
$$BX\ CY\ AZ = BZ\ CX\ AY \ ,$$

sehingga

$$\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB} = 1,$$

karena hasil perbandingan sisi-sisi pada segitiga bernilai 1, maka terbukti bahwa garis AX, BY, dan CZkonkurenyaitu di titik N. ■

Konkurensi pada titik ini disebut dengan titik Nagel dan pada umumnya dilambangkan dengan N .Alternatif mengkontruksi titik Nagel ini dilakukandenganmelalui*incircle*[4] yang ditunjukkan pada Gambar 3 berikut.Pada suatu *incircle*yang menyinggung semua sisi ΔABC misalkan pada titik D, E, dan F masing-masing pada sisi BC, CA dan AB, kemudian masing-masing sisi segitiga dibuat garis sejajar yaitu sisi $BC//JK$ yang mana JK menyinggung lingkaran dalam di titik D', sisi $CA//NP$ yang mana NP menyinggung lingkaran dalam di titik E' dan sisi $AB//LM$ yang mana LM menyinggung lingkaran dalam di titik F'. Jika titik dari $\angle A$ pada ΔABC dihubungkan terhadap titik D', titik $\angle B$ dihubungkan terhadap E', dan titik $\angle C$ dihubungkan terhadap F' maka perpanjangan dari ketiga garisAD', BE', dan CF' akan konkuren, misalkan di titik X dan konkurensi ini juga dapat dikatakan sebagai titik Nagel [4].



Gambar 3. Konkurensi titikyang terbentuk melalui*incircle*.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa perpanjangan dari garis AD', BE', dan CF' konkuren pada titik Nagel[4].Perhatikan $\Delta ABA'$ dan $\Delta AJD'$, karena $\Delta ABA' \sim \Delta AJD'$, maka perbandingan sisinya, diperoleh

$$\frac{BA'}{JD'} = \frac{AA'}{AD'}, \quad (13)$$

kemudian$\Delta AA'C \sim \Delta AD'K$ dengan perbandingan sisi

$$\frac{A'C}{D'K} = \frac{AA'}{AD'}, \quad (14)$$

dari persamaan (13) dan (14),diperoleh

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{JD'}{D'K}. \quad (15)$$

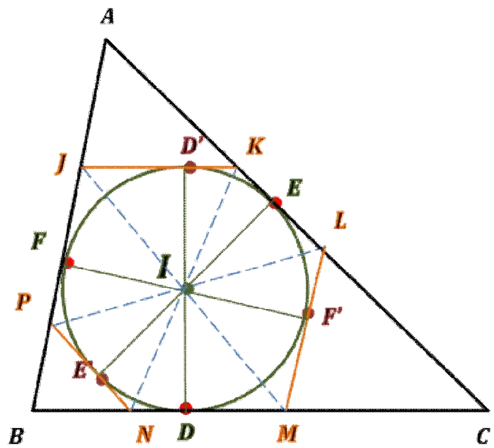
Dengan menggunakan cara yang sama, pada $\Delta BCB'$ dan $\Delta BB'A$ diperoleh $\Delta BCB' \sim \Delta BNE'dan\Delta BB'A \sim \Delta BE'P$ sehingga diperoleh perbandingan sisi

$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{NE'}{E'P}, \quad (16)$$

pada $\Delta CAC'$ dan $\Delta CC'B$, diperoleh $\Delta CAC' \sim \Delta CLF'$ dan $\Delta CC'B \sim \Delta CF'M$, sehingga diperoleh perbandingan

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{LF'}{F'M}. \quad (17)$$

Selanjutnya perhatikan Gambar 4, I merupakan *incenter* dan juga titik tengah dari diameter DD', EE', dan FF'.



Gambar 4. Titik I merupakan titik tengah dari diameter DD', EE', dan FF'.

Apabila ditarik garis dari titik I terhadap titik K dan N, diperoleh

$$\Delta KD'I \cong \Delta KEI (18)$$

dan

$$\Delta NE'I \cong \Delta NDI . (19)$$

Karena garis KNmerupakan bisektor $\angle D'IE$ dan $\angle DIE'$, diperoleh

$$\Delta KD'I \cong \Delta NDI (20)$$

dan

$$\Delta KEI \cong \Delta NE'I (21)$$

Dari persamaan (18), (19), (20), dan (21), diperoleh

$$\Delta NE'I \cong \Delta NDI \cong \Delta KD'I \cong \Delta KEI ,$$

sehingga

$$NE' = DN = D'K = EK . \qquad (22)$$

Dengan menggunakan cara yang sama yaitu jika ditarik garis dari titik I terhadap titik Pdan L, makaberlaku

$$LF' = EL = E'P = FP \qquad (23)$$

dan dari titik I terhadap titik J dan Mberlaku

$$JD' = FJ = F'M = DM \qquad (24)$$

Dari perkalian persamaan (15), (16) dan (17), diperoleh

$$\frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B}=\frac{JD'}{D'K}\frac{NE'}{E'P}\frac{LF'}{F'M}$$

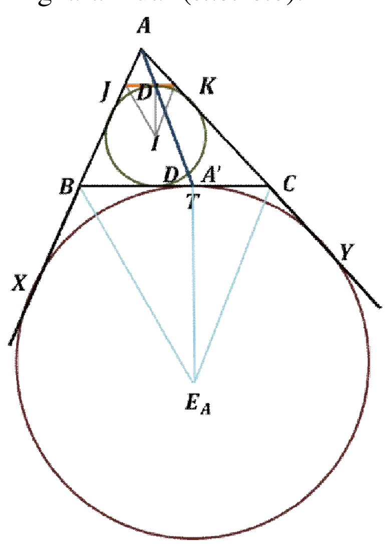
dan berdasarkan persamaan (22), (23) dan (24) diperoleh

$$\frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B}=\frac{DM}{EK}\frac{EK}{FP}\frac{FP}{DM}=1\ ,$$

karena hasil perbandingan sisi-sisi pada segitiga bernilai 1, maka terbukti bahwa ketiga perpanjangan garis AD', BE', dan CF'konkuren.

Jika konkurensi yang diperoleh tersebut dimisalkan dengan titik X, maka titik Xini belum dapat dikatakan sebagai titik Nagel,karena menurut konsepnya, titik Nagel terbentuk melalui titik singgung dari *excircle*. Untuk itu, akan ditunjukkan bahwa titik X merupakan sebuah titik Nagel.

Perhatikan ΔABCpada Gambar5 berikut ini, jika pada sisi BCdikontruksi *excircle* dengan pusat E_A, dengan titik singgung T, sedangkan A' merupakan titik potong dari perpanjangan garis AD terhadap sisi BC. Maka akan ditunjukkan bahwa $T=A'$ sehingga A' merupakan titik singgung lingkaran luar (*excircle*).



Gambar 5.Segitiga yang memuat*incircle*dan*excircle* pada sisi BC.

PadaGambar 5, diperoleh$\Delta BE_AC \sim \Delta JIK$,sehingga tinggi TE_A dan $D'I$ bersesuaian dan diperoleh perbandingan sisi

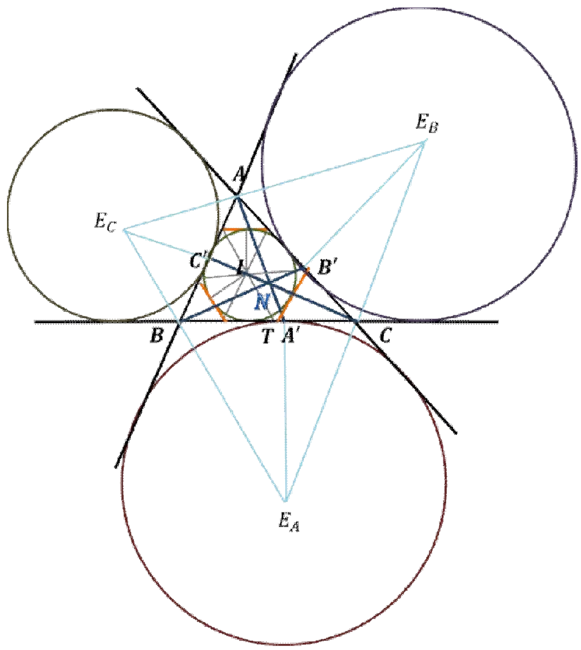
$$\frac{BT}{TC}=\frac{JD'}{D'K}\ , \qquad (25)$$

dari persamaan (15) dan (25), diperoleh

$$\frac{BT}{TC}=\frac{BA'}{A'C}$$

$$TC=A'C.$$

Karena $TC=A'C$, maka $T=A'$, sehingga dapat dikatakan bahwa A' merupakan titik singgung *excircle*. Dengan menggunakan cara yang sama yaitu dengan mengkontruksi *excircle* pada sisi segitiga yang lain, maka titik B' dan C'juga merupakan titik singgung *excircle* untuk sisi AC dan AB yang terdapat pada Gambar 6.

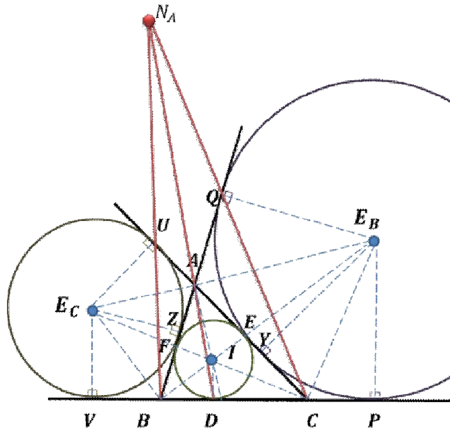


Gambar 6.Titik Nagel yang terbentuk melalui*incircle*.

Karena titik A', B', dan C' masing-masing merupakan titik singgung lingkaran singgung luar (*excircle*), maka terbukti bahwa konkurensidari perpanjangan garis AD',*BE'*, dan *CF'*pada Gambar 3 merupakan titik Nagel.

3. SEMI TITIK NAGEL

Pada segitiga di Gambar 7, ΔABCyang memuat *incircleI* menyinggung sisi BC di titik$D$, *excircle* E_B menyinggung perpanjangan sisi BA di titik$Q$, dan *excircle* E_C menyinggung perpanjangan sisi CA di titik$U$. Jika sudut B pada segitiga dihubungkan titik$U$, sudut C dihubungkan terhadap titik$Q$, dan sudut A terhadaptitik D,maka perpanjangan dari garisBU, DA, dan CQkonkuren [2]. Titik konkurensi ini disebut dengan semi titik Nagel atau titik Nagel yang berada di luar segitiga.



Gambar 7. Semi titik Nagel padaΔABC.

Akan ditunjukkan bahwa perpanjangan dari garis BM, DA, dan CG konkuren. Dengan menggunakan semiperimeter, diperoleh

$$BD=s\text{-}b,\ DC=s\text{-}c,\ CU=s,\ UA=s\text{-}b,$$
$$AQ=s\text{-}c \text{ dan } QB=s$$

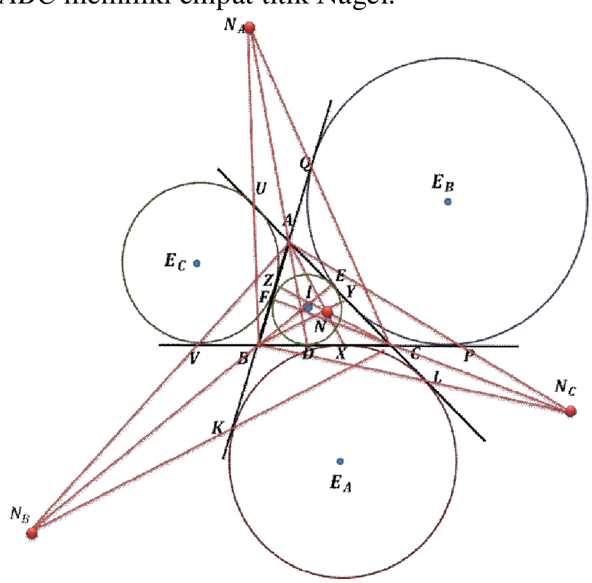
Menurut Guetierrez dengan menggunakan Teorema 1, diperoleh

$$\frac{BD}{DC}\frac{CU}{UA}\frac{AQ}{QB}=\frac{s\text{-}b}{s\text{-}c}\frac{s}{s\text{-}b}\frac{s\text{-}c}{s}=1,$$

karena Teorema 1 terpenuhi, maka terbukti bahwa ketiga perpanjangan dari garisBU, DA, dan CQkonkuren pada titik N_A di luar segitiga.

Selanjutnya berdasarkan Teorema 3, akan ditunjukkan bahwa terdapat titik Nagel lainnya pada sebarang segitiga [6].

Teorema 3. Sebarang ΔABC memiliki empat titik Nagel.



Gambar 8.Empat titik Nagel pada ΔABC.

Bukti: Secara geometri dapat dilihat pada Gambar 8 dan terbukti bahwa pada sebarang segitiga memiliki empat buah titik Nagel, satu berada di dalam segitiga sedangkan tiga titik Nagel yang lainnya berada di luar segitiga. ■

4. KESIMPULAN

Mengkontruksi suatu titik Nageltidak hanya dapat dilakukan dengan melalui*excircle* melainkan dapat juga dilakukan dengan *incircle*. Meskipun dengan menggunakan dua cara berbeda, kontruksi titik yang dihasilkan adalahtitik Nagel yang sama. Titik Nagel tersebut terbentuk di dalam segitiga.Selanjutnya, juga diperoleh kesimpulan bahwa pada segitigadapat dibentuk suatu semi titik Nagel, yaitu titik Nagel yang terbentuk di luar segitiga.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Down Jr., F. L. 1964. *Geometry*. Addison-Wesley Publishimg Company, INC. Boston.

[2] Guetierrez, A. 2011. Problem 684: Outer Nagel Point, Triangle, Excircles, Tangency points, Concurrent lines, Semi-perimeter, Ceva theorem. Level: High School, SAT, College Geometry. 1 hal. http://gogeometry.com/geometry/p684_triangle_nagel_point_excircle_incircle_tangency_point concurrent.htm, diakses pada 12 November 2013.

[3] Harvey, M. 2011. 21 Concurrence III. 17hal. http://www.mcs.uvawise.edu/msh3e/ resources/geometryBook/ 21ConcurrenceIII.pdf, diakses pada 24 Mei 2013.

[4] Hoehn, L. 2007. A New Characterization of the Nagel Point.*Missouri J. Math. Sci,* **11**(1): 45-48.

[5] Mashadi. 2012. *Geometri*. Pusbangdik Universitas Riau. Pekanbaru.

[6] Odehnal, B. 2010. Generalized Gergonne Point and Nagel Point.*Beitr. Algebra Geom*, **51**(2): 477-491.