NOISE TERMS PADA SOLUSI DERET DEKOMPOSISI ADOMIAN DALAM MENYELESAIKAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

Heni Kusnani[1*], Leli Deswita[2], Zulkarnain[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*kusnanih@gmail.com

ABSTRACT

This article discusses the solution of nonhomogeneous linear partial differential equations of first order and homogeneous nonlinear partial differential equations of second order using Adomian decomposition method. The obtained solution is of the form series. In the series solution of nonhomogeneous linear partial differential equations of the first order appears noise terms phenomenon, which is the same terms but with opposite sign, so that the solution obtained is a finite series.

Keywords: *Partial differential equation, Adomian decomposition method, noise terms.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas tentang penyelesaian persamaan diferensial parsial linear nonhomogen orde satu dan persamaan diferensial parsial nonlinear homogen orde dua dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian yang menghasilkan solusi dalam bentuk deret. Solusi deret yang dihasilkan persamaan diferensial parsial linear nonhomogen orde satu muncul fenomena *noise terms*, yaitu suku-suku yang sama tetapi dengan tanda berlawanan, sehingga solusi yang didapat merupakan deret berhingga.

Kata kunci: *Persamaan diferensial parsial, metode dekomposisi Adomian, noise terms.*

1. PENDAHULUAN

Persoalan matematika yang sering dijumpai adalah menyelesaikan persamaan diferensial parsial. Metode yang digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial salah satunya adalah metode dekomposisi Adomian[5, h. 19]. Solusi yang dihasilkan dari metode dekomposisi Adomian berupa deret tak hingga

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y). \tag{1}$$

Ada kalanya suku-suku yang dihasilkan pada perhitungan menggunakan metode dekomposisi Adomian menghasilkan suku-suku yang saling membatalkan. Fenomena ini disebut *noise terms*.

Pada artikel ini, di bagian dua dibahas mengenai penyelesaian persamaan diferensial parsial nonlinear homogen orde dua menggunakan metode dekomposisi Adomian merupakan review dari artikel G. Adomian and R. Rach[1] yang berjudul *"Equality of Partial Solution in The Decomposition Method for Linear or Nonlinear Partial Differential Equation"*. Kemudian dengan metode yang sama ditentukan solusi persamaan diferensial parsial linear nonhomogen orde satu yang merupakan review artikel G. Adomian and R. Rach[2] dengan judul *"Noise Terms in Decomposition Solution Series"*. Kemudian dilanjutkan di bagian tiga contoh perhitungan untuk melihat fenomena *noise terms* pada solusi deret persamaan diferensial parsial.

2. METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

Pada bagian ini akan diselesaikan persamaan diferensial parsial nonlinear homogen orde dua menggunakan metode dekomposisi Adomian. Kemudian dengan metode yang sama diselesaikan persamaan diferensial parsial linear nonhomogen orde satu.

Dalam menyelesaikan persamaan persamaan diferensial parsial linear nonhomogen orde satu dengan metode dekomposisi Adomian, solusi deret yang diperoleh mengandung *noise terms*, yaitu suku yang serupa dengan tanda berlawanan. Akan tetapi *noise terms* tidak ada pada solusi deret persamaan diferensial parsial nonlinear homogen orde dua dan persamaan diferensial parsial linear homogen orde satu.

2.1 Persamaan Diferensial Parsial Nonlinear Homogen Orde Dua

Perhatikan persamaan diferensial parsial nonlinear homogen orde dua berikut

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 x}u + \frac{\partial^2}{\partial^2 y}u + Nu = 0, \tag{2}$$

dengan Nu adalah komponen nonlinear. Syarat awal dari persamaan (2) adalah $u(a_1, y) = \alpha_1(y), u(a_2, y) = \alpha_2(y)$, dan $u(x, b_1) = \beta_1(x)$, $u(x, b_2) = \beta_2(x)$. Untuk penyederhanaan notasi persamaan (2) definisikan [1]

$$L_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial^2 x}, \tag{3}$$

$$L_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial^2 y}, \tag{4}$$

dan invers dari (3) dan (4) berturut-turut adalah

$$L_{xx}^{-1}\psi = \int_0^x \int_0^x \psi \; dx \; dx,$$

$$L_{yy}^{-1}\psi = \int_0^y \int_0^y \psi \; dy \; dy.$$

Persamaan (2) dapat dituliskan menjadi

$$L_{xx}u = -L_{yy}u - Nu, \tag{5}$$

dan dengan mengalikan L_{xx}^{-1} di kedua ruas persamaan (5), diperoleh

$$u = \Phi_x - L_{xx}^{-1}L_{yy}u - L_{xx}^{-1}Nu, \tag{6}$$

dimana $\Phi_x = \xi_0(y) + x\ \xi_1(y)$. Dalam menyelesaikan persamaan (6), metode dekomposisi Adomian memisalkan $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ dan $Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$, sehingga diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \Phi_x - L_{xx}^{-1}L_{yy}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) - L_{xx}^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right). \tag{7}$$

Aproksimasi solusi menggunakan m suku deret persamaan (7) adalah

$$\varphi_m = \sum_{n=0}^{m-1} u_n. \tag{8}$$

Selanjutnya Φ_x diuraikan menjadi $\Phi_{x,m} = \xi_{0,m}(y) + x\ \xi_{1,m}(y)$, dimana $\xi_{0,m}(y)$ dan $x\ \xi_{1,m}(y)$ ditentukan dari syarat awal persamaan (2) menggunakan solusi hampiran persamaan (8). Definisikan $u_0 = \Phi_{x,0}$. Selanjutnya dengan menggunakan pola rekursif pada persamaan (7) diperoleh

$$u = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m}(-L_{xx}^{-1}L_{yy})^n\Phi_{x,m-n} - \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{m-1}(-L_{xx}^{-1}L_{yy})^{m-1-n}L_{xx}^{-1}A_n. \tag{9}$$

Persamaan (9) adalah solusi parsial x dari persamaan (2). Persamaan (2) dapat juga dituliskan sebagai berikut

$$L_{yy}u = -L_{xx}u - Nu, \tag{10}$$

dengan mengalikan L_{yy}^{-1} di kedua ruas persamaan (10), diperoleh

$$u = \Phi_y - L_{yy}^{-1}L_{xx}u - L_{yy}^{-1}Nu, \tag{11}$$

dimana $\Phi_y = \eta_0(x) + y\ \eta_1(x)$. Kemudian dalam menyelesaikan persamaan (11), metode dekomposisi Adomian memisalkan $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ dan $Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$, sehingga diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \Phi_y - L_{yy}^{-1}L_{xx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) - L_{yy}^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right).$$

Selanjutnya, Φ_y juga diuraikan dengan cara yang sama seperti pada menentukan solusi parsial x, diperoleh solusi dari persamaan (2)

$$u = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m}(-L_{yy}^{-1}L_{xx})^n\Phi_{y,m-n} - \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{m-1}(-L_{yy}^{-1}L_{xx})^{m-1-n}L_{yy}^{-1}A_n. \tag{12}$$

Persamaan (12) adalah solusi parsial y dari persamaan (2). Untuk melihat kesetaraan solusi parsial x dan solusi parsial y, ditunjukkan dengan hampiran solusi parsial x dan solusi parsial y menggunakan satu suku. Kemudian solusi hampiran yang diperoleh memenuhi syarat awal dari persamaan (2). Sehingga diperoleh solusi parsial x (9) dan solusi parsial y (12) adalah sama[4].

2.2 Persamaan Diferensial Parsial Linear Nonhomogen Orde Satu

Perhatikan persamaan diferensial parsial linear nonhomogen orde satu berikut

$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}u = g, \tag{13}$$

dengan g fungsi tidak nol. Untuk penyederhanaan notasi persamaan (13) definisikan [2]

$$L_x = \frac{\partial}{\partial x}, \tag{14}$$

$$L_y = \frac{\partial}{\partial y}, \tag{15}$$

dan invers dari (14) dan (15) berturut-turut adalah

$$L_x^{-1}\psi = \int_0^x \psi \, dx,$$

$$L_y^{-1}\psi = \int_0^y \psi \, dy.$$

Persamaan (13) dapat dituliskan sebagai berikut

$$L_x u = g - L_y u, \tag{16}$$

dengan mengalikan L_x^{-1} di kedua ruas persamaan (16), diperoleh

$$u = \Phi_x + L_x^{-1}g - L_x^{-1}L_y u, \tag{17}$$

dimana $\Phi_x = u(0, y)$. Dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian pada persamaan (17) diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \Phi_x + L_x^{-1}g - L_x^{-1}L_y \sum_{n=0}^{\infty} u_n. \tag{18}$$

Definisikan $u_0 = \Phi_x + L_x^{-1}g$, selanjutnya dengan menggunakan pola rekursif pada persamaan (18) diperoleh

$$u = \sum_{n=0}^{\infty}(-L_x^{-1}L_y)^n(\Phi_x + L_x^{-1}g), \tag{19}$$

persamaan (19) adalah solusi parsial x dari persamaan (13). Persamaan (13) dapat juga dituliskan sebagai berikut

$$L_y u = g - L_x u, \tag{20}$$

dengan mengalikan L_y^{-1} di kedua ruas persamaan (20), diperoleh

$$u = \Phi_y + L_y^{-1} g - L_y^{-1} L_x u,$$

dimana $\Phi_y = u(x, 0)$. Selanjutnya dengan menggunakan cara yang sama seperti menentukan solusi parsial x diperoleh

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} (-L_y^{-1} L_x)^n (\Phi_y + L_y^{-1} g), \tag{21}$$

persamaan (21) adalah solusi parsial y dari persamaan (13). Kombinasi persamaan (19) dan (21) adalah

$$u = \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} [(-L_x^{-1} L_y)^n \Phi_x + (-L_y^{-1} L_x)^n \Phi_y + (-L_x^{-1} L_y)^n L_x^{-1} g + (-L_y^{-1} L_x)^n L_y^{-1} g].$$

Misalkan $u = u_h + u_p$, dengan

$$u_h = \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-L_x^{-1} L_y)^n \Phi_x + (-L_y^{-1} L_x)^n \Phi_y,$$
$$u_p = \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-L_x^{-1} L_y)^n L_x^{-1} g + (-L_y^{-1} L_x)^n L_y^{-1} g,$$

akan ditunjukkan u_h merupakan solusi homogen dan u_p solusi partikular dari persamaan (13). Perhatikan bahwa

$$[L_x + L_y] u_h = [L_x + L_y] \left[\left(\frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-L_x^{-1} L_y)^n \Phi_x + (-L_y^{-1} L_x)^n \Phi_y \right]$$
$$[L_x + L_y] u_h = \left(\frac{1}{2}\right) [L_x \Phi_x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)(L_y)(-L_x^{-1} L_y)^{n-1} \Phi_x + L_y \sum_{n=0}^{\infty} (-L_x^{-1} L_y)^n \Phi_x$$
$$+ L_y \Phi_y + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)(L_x)(-L_y^{-1} L_x)^{n-1} \Phi_y + L_x \sum_{n=0}^{\infty} (-L_y^{-1} L_x)^n \Phi_y],$$

karena $L_x \Phi_x = 0$ dan $L_y \Phi_y = 0$, maka $L_x u_h + L_y u_h = 0$, sehingga u_h adalah solusi homogen.

Berikutnya akan ditunjukkan u_p merupakan solusi partikular dari persamaan (13). Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
[L_x + L_y]u_p &= [L_x + L_y]\left[\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-L_x^{-1}L_y)^n L_x^{-1}g + (-L_y^{-1}L_x)^n L_y^{-1}g\right] \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)[\, g + (-\sum_{n=0}^{\infty} L_y(-L_x^{-1}L_y)^n L_x^{-1}g + L_y\sum_{n=0}^{\infty}(-L_x^{-1}L_y)^n L_x^{-1}g) \\
&\qquad + g + (-\sum_{n=0}^{\infty} L_x(-L_y^{-1}L_x)^n L_y^{-1}g + L_x\sum_{n=0}^{\infty}(-L_y^{-1}L_x)^n L_y^{-1}g)] \\
[L_x + L_y]u_p &= g,
\end{aligned}
$$

Sehingga u_p adalah solusi partikular dari persamaan (13).

3. CONTOH KOMPUTASI

Pada bagian ini dilakukan perhitungan untuk melihat adanya *noise terms* pada penyelesaian persamaan diferensial parsial dengan metode dekomposisi Adomian. Untuk melihat penggunaan metode dekomposisi Adomian dalam meyelesaikan persamaan diferensial parsial orde dua, diberikan contoh penyelesaian persamaan diferensial parsial linear nonhomogen orde dua.

3.1 Solusi Persamaan Diferensial Parsial Linear Nonhomogen Orde Dua

Perhatikan persamaan diferensial parsial linear nonhomogen orde dua[3] berikut ini

$$L_{xx}u + L_{yy}u = g, \tag{22}$$

dimana $g = x^2 + y^2$ dengan syarat awal $u(0, y) = 0, u(1, y) = \frac{y^2}{2}$ dan $u(x, 0) = 0$, $u(x, 1) = \frac{x^2}{2}$. Persamaan (22) dapat dituliskan sebagai berikut

$$L_{xx}u = g - L_{yy}u, \tag{23}$$

dengan mengalikanL_{xx}^{-1} di kedua ruas persamaan (23), diperoleh

$$u = \Phi_x + L_{xx}^{-1}g - L_{xx}^{-1}L_{yy}u. \tag{24}$$

Dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian pada persamaan (24), diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \Phi_x + L_{xx}^{-1}g - L_{xx}^{-1}L_{yy}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right), \tag{25}$$

dimana $\Phi_x = \xi_0(y)+x\ \xi_1(y)$. Selanjutnya Φ_x diuraikan $\Phi_{x,m} = \xi_{0,m}(y)+x\ \xi_{1,m}(y)$. Definisikan $u_0 = \Phi_{x,0} + L_{xx}^{-1}g = \xi_{0,0}(y) + x\ \xi_{1,0}(y) + \frac{x^4}{12} + \frac{x^2y^2}{2}$. Dengan menggunakan syarat awal x, $\alpha_1(0, y) = 0$ dan $\alpha_2(1, y) = \frac{y^2}{2}$, diperoleh $\xi_{0,0}(y) = 0$ dan $x\ \xi_{1,0}(y) = -\frac{x}{12}$, sehingga diperoleh $u_0 = -\frac{x}{12} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^2y^2}{2}$. Selanjutnya suku-suku persamaan (25) ditentukan secara rekursif diperoleh $u_1 = \xi_{0,1}(y) + x\ \xi_{1,1}(y) - \frac{x^4}{12}$, $u_2 = \xi_{0,2}(y) + x\ \xi_{1,2}(y) - 0$, dan $u_n = 0$, untuk $n \geq 3$. Aproksimasi dua suku persamaan (25) diperoleh dengan menggunakan persamaan (8) yaitu

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{1} u_n = -\frac{x}{12} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^2y^2}{2} + \xi_{0,1}(y) + x\ \xi_{1,1}(y) - \frac{x^4}{12} = \frac{x^2y^2}{2},$$

sehingga solusi parsial x dari persamaan (22) adalah $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{x^2y^2}{2}$. Persamaan (22) dapat dituliskan sebagai berikut untuk menentukan solusi parsial y

$$L_{yy}u = g - L_{xx}u, \tag{26}$$

dengan mengalikan L_{yy}^{-1} di kedua ruas persamaan (26), diperoleh

$$u = \Phi_y + L_{yy}^{-1}g - L_{yy}^{-1}L_{xx}u. \tag{27}$$

Dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian pada persamaan (27) diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \Phi_y + L_{yy}^{-1}g - L_{yy}^{-1}L_{xx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right),$$

dimana $\Phi_y = \eta_0(x) + y\ \eta_1(x)$. Selanjutnya Φ_y diuraikan $\Phi_{y,m} = \eta_{0,m}(x) + y\ \eta_{1,m}(x)$. Definisikan $u_0 = \Phi_{y,0} + L_{yy}^{-1}g = \eta_{0,0}(x) + y\ \eta_{1,0}(x) + \frac{y^4}{12} + \frac{x^2y^2}{2}$. Dengan menggunakan syarat awal y, $\beta_1(x,0) = 0$ dan $\beta_2(x,1) = \frac{x^2}{2}$, diperoleh $\eta_{0,0}(x) = 0$ dan $y\ \eta_{1,0}(x) = -\frac{y}{12}$. Langkah selanjutnya dilakukan dengan cara yang sama seperti menentukan solusi parsial x, sehingga diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots = \frac{x^2y^2}{2}.$$

Perhatikan bahwa solusi parsial x dan y yang diperoleh adalah sama. Sehingga solusi persamaan (22) adalah $u(x,y) = \frac{x^2y^2}{2}$.

3.2 Solusi Persamaan Diferensial Parsial Nonlinear Homogen Orde Dua

Perhatikan persamaan panas berikut ini

$$u_t = u_{xx}, \tag{28}$$

dengan syarat awal $u(x,0) = \sin(\frac{\pi x}{l})$, $u(0,t) = u(l,t) = 0$. Persamaan (28) dapat dituliskan menjadi

$$L_t u = L_{xx}u, \tag{29}$$

dengan mengalikan L_t^{-1} di kedua ruas persamaan (29), diperoleh

$$u = u(x,0) + L_t^{-1}L_{xx}u. \tag{30}$$

Dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian pada persamaan (30), diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u(x,0) + L_t^{-1} L_{xx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right). \tag{31}$$

Definisikan $u_0 = u(x,0) = \sin(\frac{\pi x}{l})$, suku-suku selanjutnya diperoleh dengan menggunakan pola rekursif pada persamaan (31), sehingga diperoleh solusi parsial t

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \left(1 - (\frac{\pi^2}{l^2})t + (\frac{\pi^4}{l^4})\frac{t^2}{2} - (\frac{\pi^6}{l^6})\frac{t^3}{6} \ldots \right) \sin(\frac{\pi x}{l}) = e^{-(\frac{\pi}{l})^2 t} \sin(\frac{\pi x}{l}). \tag{32}$$

Perhatikan kembali persamaan (28) yang dapat dituliskan menjadi

$$L_{xx} u = L_t u, \tag{33}$$

dengan mengalikan L_{xx}^{-1} di kedua ruas persamaan (33), diperoleh

$$u = k_1(t) + x\ k_2(t) + L_x^{-1} L_t u. \tag{34}$$

Dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian pada persamaan (34), diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = k_1(t) + x\ k_2(t) + L_x^{-1} L_t \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right).$$

Definisikan $u_0 = k_1(t) + x\ k_2(t) = 0$. Karena $u_0 = 0$, maka $u_n = 0$, untuk $n \geq 1$. Sehingga diperoleh solusi parsial x adalah

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 0. \tag{35}$$

Perhatikan kembali syarat awal dari persamaan (28). Berdasarkan [1] apabila syarat awal bersifat umum, maka solusi parsial yang diperoleh akan sama, sementara solusi parsial akan sama secara asimtot ketika syarat awal untuk satu variabel tidak tergantung dari variabel yang lainnya. Perhatikan persamaan (32), untuk $t \to \infty$ maka $u \to 0$. Sehingga solusi pada persamaan (32) sama secara asimtot dengan solusi pada persamaan (35).

3.3 Solusi Persamaan Diferensial Parsial Linear Nonhomogen Orde Satu

Perhatikan persamaan diferensial parsial linear nonhomogen orde satu berikut

$$u_x + u_y = g, \tag{36}$$

dengan $g = -(x+y)$, dan syarat awal $u(0,y) = \Phi_x = 0$ dan $u(x,0) = \Phi_y = 0$. Solusi parsial x dan solusi parsial y dari persamaan (36) berturut-turut adalah

$$u = L_x^{-1} g - L_x^{-1} L_y u, \tag{37}$$
$$u = L_y^{-1} g - L_y^{-1} L_x u. \tag{38}$$

Dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian pada persamaan (37) diperoleh solusi parsial x adalah

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{-x^2}{2} - xy + \frac{x^2}{2} + 0 = -xy.$$

Sementara dengan menggunakan cara yang sama seperti pada menentukan solusi parsial x, dari persamaan (38) diperoleh solusi parsial y adalah

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{-y^2}{2} - xy + \frac{y^2}{2} + 0 = -xy.$$

Perhatikan bahwa solusi parsial x sama dengan solusi parsial y, yaitu $u(x, y) = -xy$. Selanjutnya akan ditentukan solusi kombinasi antara solusi parsial x dan y. Perhatikan persamaan (37) dan (38) yang dapat ditulis menjadi

$$u = \left(\frac{1}{2}\right)(L_x^{-1} + L_y^{-1})g - \left(\frac{1}{2}\right)(L_x^{-1}L_y + L_y^{-1}L_x)u, \tag{39}$$

subtitusikan nilai g ke persamaan (39), kemudian selesaikan menggunakan metode dekomposisi Adomian, diperoleh solusi kombinasi dari persamaan (36), yaitu

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} u_n = -xy - \left(\frac{(x^2+y^2}{4}\right) + \frac{xy}{2} + \left(\frac{(x^2+y^2}{4}\right) - \frac{xy}{2} - \left(\frac{(x^2+y^2}{8}\right) + \frac{xy}{4}\\ + \left(\frac{(x^2+y^2}{8}\right) + \ldots .\end{aligned} \tag{40}$$

Perhatikan persamaan (40) yang diperoleh dari menjumlahkan empat suku pertama yaitu $u_0 + u_1 + u_2 + u_3$. Suku-suku pada persamaan tersebut akan saling membatalkan, sehingga diperoleh suku yang tersisa yaitu $-xy + \frac{xy}{4}$. Suku $\frac{xy}{4}$ akan dibatalkan oleh $-\frac{xy}{4}$ pada suku u_4. Suku yang tersisa pada u_4 akan dibatalkan oleh suku pada u_5 dan seterusnya. Berdasarkan pola tersebut, maka diklaim suku yang tersisa yaitu $u(x, y) = -xy$ adalah solusi parsial. Untuk memastikan suku yang tersisa tersebut adalah solusi parsial, perlu diperiksa apakah solusi tersebut memenuhi persamaan diferensial parsial yang diberikan. Dengan mensubstitusikan langsung $u(x, y) = -xy$ ke persamaan (36) diperoleh bahwa $u(x, y) = -xy$ adalah solusi dari persamaan (36).

Perhatikan kembali persamaan (40), solusi deret untuk persamaan (36) dapat ditulis menjadi

$$\phi_m = \sum_{n=0}^{m-1} u_n,$$

dimana

$$\phi_m = \begin{cases} -\dfrac{2^k - 1}{2^k}\,(xy), \text{ untuk } m = 2k, k \in \mathbb{N}, \\ -xy - \dfrac{1}{2^{k+2}}\,(x^2 + y^2), \text{ untuk } m = 2k+1, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Perhatikan bahwa

$$\lim_{k\to\infty} \phi_{2k} = \lim_{k\to\infty} \phi_{2k+1} = -xy,$$

sehingga $u(x, y) = -xy$ adalah solusi persamaan (36). Ini memberikan cara lain untuk memeriksa bahwa $u(x, y) = -xy$ adalah solusi persamaan (36).

Pada solusi persamaan diferensial parsial linear nonhomogen orde satu muncul *noise terms*, akan tetapi pada persamaan diferensial parsial linear homogen orde satu tidak menunjukkan *noise terms*[2].

DAFTAR PUSTAKA

[1] Adomian, G & Rach. R. 1990. Equality of Partial Solutions in The Decomposition Method for Linear or Nonlinear Partial Differential Equation. *Computers Math. Applic.* **19**, No. 12, pp. 9-12.

[2] Adomian, G & Rach. R. 1992. Noise Terms in Decomposition Solution Series. *Computers Math. Applic.* **24**, No. 11, pp. 61-64.

[3] Adomian, G. 1991. A Review of the Decomposition Method and Some Recent Results of Nonlinear Equations. *Computers Math. Applic.* **21**, No. 5, pp. 101-127.

[4] Kusnani, H. 2015. *Noise Terms pada Solusi Deret Dekomposisi Adomian dalam Menyelesaikan Persamaan Diferensial Parsial.* Skripsi S1 Jurusan Matematika FMIPA Universitas Riau, Pekanbaru.

[5] Wazwaz, A. M. 2009. *Partial Differential Equation and Solitary Waves Theory.* Springer. New York.