METODE ITERATIF YANG DIPERCEPAT UNTUK Z-MATRIKS

Mildayani[1*], Syamsudhuha[2], Aziskhan [2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2]Dosen Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*amelmildayani@gmail.com

ABSTRACT

This article discusses a preconditioned Gauss-Seidel method to solve a system of linear equation $Ax = b$, where A a strictly diagonally dominant Z-matrix. Preconditioning matrix to be used is $P = (I + \beta U)$, where I is an identity matrix, U is a strictly upper triangular matrix and $0 < \beta \leq 1$. Numerical computations show that the proposed preconditioned Gauss Seidel method is better than the standard Gauss Seidel method in solving a system of linear equation $Ax = b$.

Keywords: *linear equation system, Gauss Seidel method, precondition.*

ABSTRAK

Didiskusikan solusi sistem persamaan linear $Ax = b$, dimana A berbentuk Z-matriks yang *strictly diagonally dominant*, dengan menggunakan metode Gauss Seidel prekondisi. Matriks prekondisi yang digunakan adalah $P = (I + \beta U)$, dimana I adalah matriks identitas, U adalah matriks (*strictly upper triangular*) dan $0 < \beta \leq 1$. Secara analitik ditunjukkan bahwa metode Gauss Seidel prekondisi yang dikemukakan konvergen ke solusi sistem persamaan linear $Ax = b$. Melalui contoh numerik terlihat bahwa metode Gauss Seidel prekondisi yang didiskusikan memerlukan iterasi yang lebih sedikit dibanding metode Gauss Seidel standar.

Kata kunci: *sistem persamaan linear, metode Gauss Seidel, matriks prekondisi.*

1. PENDAHULUAN

Perhatikan sistem persamaan linier yang berbentuk

$$Ax = b, \tag{1}$$

dimana x, b adalah vektor dalam $\Re^n$ dan $A \in \Re^{n\times n}$ adalah matriks nonsingular berukuran $n \times n$ dan berbentuk Z-matriks yang semua element diagonal utamanya adalah 1. Sistem persamaan linear (1) dapat diselesaikan dengan dua metode yaitu metode analitik dan metode numerik. Metode analitik adalah metode yang memberikan solusi sejati dan memiliki tingkat kesalahan sama dengan nol, sedangkan metode numerik adalah metode yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematika sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan biasa meliputi penambahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian.

Salah satu metode numerik yang berbentuk iterasi yang dapat digunakan menyelesaikan sistem persamaan linear (1) adalah metode Gauss Seidel. Bila matriks A berkondisi buruk (*ill-condition*) metode Gauss Seidel akan lambat mendapatkan solusi yang diinginkan. Untuk mengatasi ini disarankan untuk menggunakan prekondisi sehingga matriks PA pada sistem persamaan linear $PAx = Pb$, dengan matriks P nonsingular, berkondisi lebih baik dari kondisi matrik A pada sistem persamaan linear (1). [1, h. 91]

Hisashi Kotakemori, Hiroshi Niki, dan Naotaka Okamoto [2] memperkenalkan matriks prekondisi untuk metode Gauss Seidel dengan bentuk matriks prekondisi

$$P = I + \beta U, \tag{2}$$

dengan β adalah parameter positif, I adalah matriks identitas dan U adalah matriks *strictly upper triangular*. Artikel inilah yang direview pada tulisan ini

Untuk menyajikan hal ini, dibagian 2 diberikan metode Gauss Seidel standar dan jaminan kekonvergenannya. Kemudian dilanjutkan dengan mendiskusikan metode Gauss Seidel prekondisi dan dibagian akhir diberikan simulasi numerik.

2. METODE GAUSS SEIDEL

Misalkan matriks A dipisahkan menjadi $A = (D-L)-U$, dengan D adalah matriks diagonal, L adalah matriks *strictly lower triangular* dan U adalah matriks *strictly upper triangular*. Sehingga dari sistem persamaan linear(1) diperoleh

$$x = (D-L)^{-1}Ux + (D-L)^{-1}, \tag{3}$$

dalam bentuk iterasi, diberikan tebakan awal $x_0 \in \Re^n$ sehingga persamaan (3) dapat ditulis menjadi

$$x_{k+1} = (D-L)^{-1}Ux_k + (D-L)^{-1}b, \tag{4}$$

dimana $T = (D-L)^{-1}U$ pada persamaan (4) disebut matriks iterasi Gauss Seidel.

Kekonvergenan metode Gauss Seidel yang matriks A adalah diagonal dominan, dapat dilihat dari teorema berikut

Teorema 1 [3, h. 189]
Jika A adalah diagonal dominan, maka metode Gauss Seidel konvergen untuk semua tebakan awal.

Bukti. Dapat dilihat pada [3, h. 189].

3. METODE GAUSS SEIDEL PREKONDISI

Pandang sistem persamaan linear (1), dengan matriks A adalah Z-matriks. Diberikan prekondisi $P = I + \beta U$, maka persamaan (1) dapat ditulis menjadi

$$A_\beta x = b_\beta,$$

dengan $A = I - L - U$, maka diperoleh

$$A_\beta = I - L - U + \beta U - \beta UL - \beta U^2 \tag{5}$$
$$b_\beta = (I + \beta U)b. \tag{6}$$

Misalkan $UL = \overline{D} + \overline{E} + \overline{F}$, dengan $\overline{D}$ adalah diagonal, $\overline{E}$ adalah *strictly lower triangular*, dan $\overline{F}$ adalah *strictly upper triangular*. sehingga persamaan (5) menjadi

$$A_\beta = I - \beta\overline{D} - L - \beta\overline{E} - (U - \beta U + \beta U^2 + \beta\overline{F}). \tag{7}$$

dari *splitting* Gauss Seidel M=D-L, dan N=U, maka dapat ditulis menjadi

$$M_\beta = (I - \beta\overline{D} - L - \beta\overline{E})$$
$$N_\beta = (U - \beta U + \beta U^2 + \beta\overline{F}),$$

Kemudian matriks iterasi dari metode Gauss Seidel yang dinotasikan dengan $T = M^{-1}N = (D - L)^{-1}U$ dapat ditulis menjadi

$$T_\beta = (I - \beta\overline{D} - L - \beta\overline{E})^{-1}(U - \beta U + \beta U^2 + \beta\overline{F}), \tag{8}$$

persamaan (8) adalah matriks iterasi dari metode Gauss Seidel prekondisi.

Kekonvergenan metode Gauss Seidel prekondisi yang matriks A adalah *strictly diagonally dominant* dapat dilihat pada lema dan teorema berikut

Misalkan $A_\beta = D_\beta - L_\beta - U_\beta$, dengan D_β adalah diagonal, $-L_\beta$ adalah *strictly lower triangular* dan $-U_\beta$ adalah *strictly upper triangular* dari A_β. Maka elemen-elemen dari A_β adalah

$$a_{\beta,ij} = a_{ij} - \beta \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}a_{kj}. \tag{9}$$

A adalah Z- matriks yang *strictly diagonally dominant*, maka diperoleh

$$-1 < a_{ij} \leq 0 \qquad i > j. \tag{10}$$

kemudian

$$-1 < \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} \leq 0 \qquad \text{untuk semua } i. \tag{11}$$

Dari (10) diperoleh

$$0 \leq a_{ik}a_{kj} < 1 \qquad k > i \geq j. \tag{12}$$

Jadi dari (11) dan (12) diperoleh

$$0 \leq \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}a_{kj} < 1 \qquad i \geq j. \tag{13}$$

Untuk menyederhanakan notasi, misalkan

$$x_i = \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}a_{ki} \qquad \text{untuk semua } i,$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}a_{kj} \qquad \text{untuk semua } i,$$

$$z_i = \sum_{j=i+1}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}a_{kj} \qquad \text{untuk semua } i,$$

Lema 2 [2]
Jika A adalah sebuah matriks yang *strictly diagonal dominant* dengan elemen-elemen unit diagonal, maka $x_i \geq 0$, $y_i \geq 0$, $z_i \leq 0$ dan $x_i + y_i + z_i \leq 0$.

Bukti.
Dari (13) diperoleh $x_i \geq 0$ dan $y_i \geq 0$. Karena A adalah Z-matriks yang *strictly diagonal dominant*, diperoleh untuk sebarang $k \geq i+1$

$$\sum_{j=i+1}^{n} a_{kj} \geq \sum_{j=1}^{n} a_{kj} > 0,$$

kemudian

$$z_i = \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} \geq \sum_{j=i+1}^{n} a_{kj} \leq 0.$$

Diperoleh

$$x_i + y_i + z_i = \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} \geq \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \leq 0.$$

Jadi, terbukti bahwa $x_i \geq 0$, $y_i \geq 0$ dan $z_i \leq 0$ sehingga $x_i + y_i + z_i \leq 0$. ■

Teorema 3 [2]
Misalkan A adalah sebuah matriks yang didefinisikan seperti pada Lema 2 maka untuk $0 \leq \beta \leq 1$, A_β juga merupakan sebuah Z-matriks yang *strictly diagonal dominant.*

Bukti.
Misalkan $l_i, u_i, d_{\beta,i}, l_{\beta,i}$ dan $u_{\beta,i}$ masing-masing adalah jumlah elemen-elemen pada baris ke-i pada L, U, D_β, L_β dan U_β. Dengan menggunakan (9), persamaan-persamaan berikut berlaku untuk $0 \leq \beta \leq 1$

$$d_{\beta,i} = 1 - \beta \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}a_{ki} = 1 - \beta x_i, \tag{14}$$

$$l_{\beta,i} = - \sum_{j=1}^{i-1} \left\{ a_{ij} - \beta \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}a_{ki} \right\} = l_i + \beta y_i, \tag{15}$$

$$u_{\beta,i} = - \sum_{j=1}^{n} \left\{ a_{ij} - \beta \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}a_{kj} \right\} = u_i + \beta z_i. \tag{16}$$

Dari (13), maka berlaku

$$l - \beta \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}a_{kj} > 0 \qquad j = i,$$

$$a_{ij} - \beta \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}a_{kj} \leq 0 \qquad i \neq j,$$

diperoleh, $l_{\beta,i} \geq 0, u_{\beta,i} \geq 0$, dan A_β adalah Z-matriks. Dari Lema 2 dan (14)-(16), dapat juga diperoleh

$$d_{\beta,i} - l_{\beta,i} - u_{\beta,i} = (1 - l_i - u_i) - \beta(x_i + y_i + z_i) > 0. \tag{17}$$

Dengan demikian, A_β adalah *strictly diagonal dominant*, dan dari Teorema 1 maka metode Gauss Seidel prekondisi konvergen.

4. SIMULASI NUMERIK

Pada bagian ini dilakukan simulasi numerik yang bertujuan untuk membandingkan banyaknya iterasi dari metode Gauss Seidel dan metode metode Gauss Seidel prekondisi dalam menemukan solusi dari sistem persamaan linear $Ax = b$, dengan A adalah Z-matriks. Dalam melakukan perbandingan ini, sistem persamaan linear yang digunakan adalah

Contoh 1 [2] Diketahui sistem persamaan linear (1) dengan

$$A = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.1000 & -0.0833 & -0.0714 & -0.1000 \\ -0.0714 & 1.0000 & -0.1000 & -0.0833 & -0.0714 \\ -0.0833 & -0.0714 & 1.0000 & -0.1000 & -0.0833 \\ -0.1000 & -0.0833 & -0.0714 & 1.0000 & -0.1000 \\ -0.0714 & -0.1000 & -0.0833 & -0.0714 & 1.0000 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 0.6452 \\ 0.6738 \\ 0.6619 \\ 0.6452 \\ 0.6738 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian.
Untuk mencari solusi sistem persamaan linear pada Contoh 1 digunakan program software Matlab $R2010a$ dengan M-file. Dan hasil komputasi ditunjukkan pada tabel berikut Hasil perhitungan dapat dilihat pada Tabel 1, kolom p menyatakan nilai elemen matriks. Kolom ρ merupakan spektral radius dari matriks. Sedangkan kolom N merupakan jumlah iterasi yang diperoleh menggunakan metode Gauss Seidel dan metode Gauss Seidel prekondisi yaitu dari M-file program metode Gauss Seidel pada pemrograman Matlab $R2010a$. Hasil simulasi yang diberikan, menunjukkan perbandingan jumlah iterasi dan spektral radius untuk Metode Gauss Seidel, dan Metode Gauss Seidel prekondisi. Dari Tabel 1 maka dapat dilihat beberapa kondisi, yaitu: Berdasarkan jumlah iterasi, Metode Gauss Seidel prekondisi memiliki jumlah iterasi yang lebih sedikit dibandingkan dengan Metode Gauss Seidel. Hal ini dapat dilihat pada $p = 0.5$, Metode Gauss Seidel prekondisi memiliki 3 iterasi sedangkan Metode Gauss Seidel memiliki 7 iterasi. Berdasarkan spektral radius (ρ), menunjukkan bahwa metode yang lebih cepat konvergen adalah Metode Gauss Seidel prekondisi. Dibuktikan dengan $\rho(T_\beta) < \rho(T) < 1$, yaitu $0.00446 < 0.14800 < 1$. Secara keseluruhan Metode Gauss Seidel prekondisi memiliki spektral radius yang lebih sedikit dibandingkan dengan Metode Gauss Seidel.

Tabel 1: Jumlah Iterasi (N) dan Spektral Radius (ρ) GS dan GSP

p	GS		GSP					
	$\rho(T)$	N	$\rho(T_\beta)$	N	β_{est}	$\rho(T_\beta)$	N	β_{opt}
0.5	0.14800	7	0.00446	3	1.16	0.00381	3	1.15
0.7	0.26000	9	0.01050	3	1.25	0.00948	3	1.24
0.9	0.40300	13	0.02160	4	1.37	0.02160	4	1.37
1.0	0.48600	16	0.03960	4	1.47	0.03220	4	1.47

DAFTAR PUSTAKA

[1] Allaire, G. & S. M. Kaber. 2008. *Numerical Linear Algebra*. Spinger, New York.

[2] Kotakemori, H., Niki, H. & Okamoto, N. 1996. Accelerated Iterative Method For Z-matrices. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **75**: 87–97.

[3] Kincaid, D. & Cheney, W. 1991. *Numerical Analysis Mathematics of Scientific Computing*. Pasific Grove, California.