SOLUSI BILANGAN BULAT SUATU PERSAMAAN DIOPHANTINE MELALUI BILANGAN FIBONACCI DAN BILANGAN LUCAS

Bona Martua Siburian[1*], Mashadi[2], Sri Gemawati [2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*bonamartuasiburian@gmail.com

ABSTRACT

This article discusses the Diophantine equations in the form $x^2+axy+by^2=c$. The values of a, b, and c are constructed by Fibonacci number F_n and Lucas number L_n. Furthermore, all integer solutions of the Diophantine equations in the form of Fibonacci number and Lucas number is determined by using Fibonacci and Lucas identities.

Keywords: *diophantine equation, fibonacci number, lucas number.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas tentang persamaan Diophantine yang berbentuk berbentuk $x^2+axy+by^2=c$ dengan nilai a, b, dan c yang dikonstruksi oleh bilangan Fibonacci F_n, bilangan Lucas L_n. Selanjutnya akan ditentukan solusi bilangan bulat persamaan Diophantine tersebut dalam bentuk bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas dengan menggunakan identitas bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas.

Kata kunci: *persamaan diophantine, bilangan Fibonacci, bilangan Lucas.*

1. PENDAHULUAN

Persamaan Diophantine [1] adalah persamaan polinomial yang penyelesaiannya berupa bilangan bulat dan mempunyai solusi yang banyak.

Persamaan Diophantine pertama kali dikemukakan oleh seorang matematikawan Yunani yang bernama Diophantus. Bentuk paling sederhana persamaan ini adalah $ax+by=c$, dengan nilai a, b, dan c adalah bilangan bulat. Bentuk persamaan Diophantine telah banyak dikembangkan, salah satunya adalah $x^2+axy+by^2=c$, bentuk inilah yang dibahas dalam artikel ini, dengan nilai a, b, dan c tersebut dikonstruksi oleh bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas.

Pada persamaan Diophantine, nilai solusi atau akar-akarnya adalah bilangan bulat. Sehingga hal ini sangat terkait dengan bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas yang merupakan bilangan bulat.

Pada artikel ini dibahas cara menentukan solusi dari persamaan Diophantine yang berbentuk $x^2 - 5F_nxy - 5(-1)^ny^2 = \pm L_n^2$, $x^2 - L_nxy + (-1)^ny^2 = \pm 5F_n^2$, dan $x^2 - L_nxy + (-1)^ny^2 = \pm F_n^2$. Artikel ini merupakan tinjauan (*review*) dari jurnal Demirturk dan Keskin [4]. Penyelesaian ketiga persamaan tersebut menggunakan identitas bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas.

2. BILANGAN FIBONACCI, BILANGAN LUCAS, DAN IDENTITASNYA

Pada barisan Fibonacci yang dimulai dari suku ketiganya, setiap suku barisan tersebut dapat diperoleh dari menjumlahkan dua suku tepat sebelumnya [2, h.35]. Suku - suku barisan Fibonacci dilambangkan dengan F_n dengan bentuk umum [3, h.129]

$$\begin{aligned} &F_1 = F_2 = 1 \\ &F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{dengan} \quad n \geq 3. \end{aligned}$$

Fibonacci sendiri tidak banyak menyelidiki tentang barisan dari masalah yang dikemukakannya itu. Ia juga tidak memberi nama barisannya sebagai barisan Fibonacci. Nama barisan Fibonacci baru muncul pada abad ke-19 dan diperkenalkan oleh Lucas, seorang matematikawan Perancis. Lucas mengembangkan barisan yang mempunyai sifat seperti barisan Fibonacci, yang selanjutnya disebut barisan Lucas, yaitu

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, \cdots$$

Sifat dasar barisan Lucas sama dengan barisan Fibonacci, yang berbeda adalah suku keduanya. Suku ke-n barisan Lucas dilambangkan dengan L_n, dengan bentuk umumnya [3, h.136]

$$\begin{aligned} &L_1 = 1 \quad \text{dan} \quad L_2 = 3 \\ &L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad \text{dengan} \quad n \geq 3. \end{aligned}$$

Selanjutnya diperoleh beberapa identitas bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas [5,6,7] :

(a) $F_n^2 - F_nF_{n-1} - F_{n-1}^2 = (-1)^{n+1}$ dengan $n \in Z$.
(b) $L_n^2 - L_nL_{n-1} - L_{n-1}^2 = (-1)^n 5$ dengan $n \in Z$.
(c) $F_{m+1}L_n + L_{n-1}F_m = L_{n+m}$ dengan $m, n \in Z$.
(d) $L_mL_n + 5F_mF_n = 2L_{n+m}$ dengan $m, n \in Z$.
(e) $F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$ dengan $n \in Z$.
(f) $L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$ dengan $n \in Z$.
(g) $L_n^2 - 5F_n^2 = (-1)^n 4$ dengan $n \in Z$.
(h) $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dengan $n \in Z$.
(i) $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ dengan $n \in Z$.
(j) $F_{2n} = F_{2n+2} - F_{2n+1}$ dengan $n \in Z$.
(k) $F_{m+1}F_n + F_{n-1}F_m = F_{n+m}$ dengan $m, n \in Z$.

Kemudian dengan menggunakan identitas-identitas tersebut, dapat diperoleh solusi bilangan bulat dari beberapa teorema yang telah dibahas oleh Demirturk dan Keskin dalam [4] sebagai berikut

Teorema 1 Semua solusi bilangan bulat dari persamaan $x^2 - xy - y^2 = \pm 1$ diberikan oleh $(x, y) = \pm(F_n, F_{n-1})$ dengan $n \in Z$.
Bukti. Misalkan $x = F_n$ dan $y = F_{n-1}$ maka persamaan $x^2 - xy - y^2 = \pm 1$ dapat ditulis,

$$F_n^2 - F_n F_n - 1 - F_n - 1^2 = (-1)^{n+1}. \tag{1}$$

Pada dasarnya, untuk membuktikan Teorema 1 sama halnya dengan membuktikan persamaan (1). Untuk membuktikan persamaan (1), digunakan induksi matematika. Untuk $n = 1$ maka persamaan (1) menjadi

$$\begin{aligned} &F_1^2 - F_1 F_0 - F_0^2 = (-1)^2 \\ &1 - (1)(0) - (0)^2 = (-1)^2 \quad \text{(persamaan (1) benar untuk } n = 1). \end{aligned}$$

Asumsikan persamaan (1) benar untuk $n = k$,

$$F_k^2 - F_k F_{k-1} - F_{k-1}^2 = (-1)^{k+1}.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan persamaan (1) benar untuk $n = k + 1$, yaitu

$$F_{k+1}^2 - F_{k+1} F_k - F_k^2 = (-1)^{k+2}. \tag{2}$$

Dengan menggunakan identitas (h) yang ditulis dalam bentuk $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ maka,

$$\begin{aligned} F_{k+1}^2 - F_{k+1} F_k - F_k^2 &= F_{k+1}^2 - (F_k + F_{k-1})(F_{k+1} - F_{k-1}) - F_k^2 \\ &= F_{k+1}^2 - (F_k F_{k+1} - F_k F_{k-1} + F_{k-1} F_{k+1} - F_{k-1}^2) - F_k^2 \\ F_{k+1}^2 - F_{k+1} F_k - F_k^2 &= F_{k+1}^2 - F_k F_{k+1} + F_k F_{k-1} - F_{k-1} F_{k+1} + F_{k-1}^2 - F_k^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Dengan menggunakan persamaaan (2) maka persamaan (3) dapat menjadi,

$$\begin{aligned} F_{k+1}^2 - F_{k+1} F_k - F_k^2 =& F_{k+1}^2 - F_k F_{k+1} + F_k F_{k-1} - F_{k-1} F_{k+1} + F_{k-1}^2 \\ &+ (-1)^{k+2} - F_{k+1}^2 + F_{k+1} F_k \\ =& F_k F_{k-1} - F_{k-1} F_{k+1} + F_{k-1}^2 + (-1)^{k+2} \\ =& F_k F_{k-1} - F_{k-1}(F_{k+1} - F_{k-1}) + (-1)^{k+2} \\ =& F_k F_{k-1} - F_{k-1} F_k + (-1)^{k+2} \\ F_{k+1}^2 - F_{k+1} F_k - F_k^2 =& (-1)^{k+2}. \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $F_n^2 - F_n F_{n-1} - F_{n-1}^2 = (-1)^{n+1}$ dengan $n \in Z$. Hal ini menjelaskan bahwa semua solusi bilangan bulat dari persamaan $x^2 - xy - y^2 = \pm 1$ diberikan oleh $(x, y) = \pm(F_n, F_{n-1})$ dengan $n \in Z$. $\square$

Akibat 2 Semua solusi bilangan bulat dari persamaan $x^2 - xy - y^2 = -1$ diberikan oleh $(x, y) = \pm(F_{2n}, F_{2n-1})$ dan semua solusi bilangan bulat dari $x^2 - xy - y^2 = 1$ diberikan oleh $(x, y) = \pm(F_{2n+1}, F_{2n})$.

Bukti. Perhatikan persamaan (1) pada Teorema 1, maka dengan mensubstitusikan nilai n bilangan ganjil yaitu $n = 2k + 1, k \in Z$ pada persamaan (1), akan diperoleh

$$F_{2k+1}^2 - F_{2k+1}F_{2k} - F_{2k}^2 = (-1)^{2k+2}.$$

Nilai $(-1)^{2k+2}$ akan selalu 1, sebab $2k+2$ merupakan pola bilangan genap dengan $k \in Z$. Sehingga semua solusi bilangan bulat dari $x^2 - xy - y^2 = 1$ dapat dinyatakan dengan $(x, y) = \pm(F_{2n+1}, F_{2n})$ dengan $n \in Z$.

Kemudian dengan cara yang sama, yaitu mensubstitusikan nilai n bilangan genap yaitu $n = 2k, k \in Z$ pada persamaan (1), akan diperoleh

$$F_{2k}^2 - F_{2k}F_{2k-1} - F_{2k-1}^2 = (-1)^{2k+1}.$$

Nilai $(-1)^{2k+1}$ akan selalu bernilai -1, sebab $2k + 1$ merupakan pola bilangan ganjil dengan $k \in Z$. Sehingga semua solusi bilangan bulat dari $x^2 - xy - y^2 = 1$ dapat dinyatakan dengan $(x, y) = \pm(F_{2n}, F_{2n-1})$ dengan $n \in Z$. □

Teorema 3 Semua solusi bilangan bulat tak negatif dari persamaan $u^2 - 5v^2 = \pm 4$ diberikan oleh $(u, v) = (L_n, F_n)$ dengan $n \geq 0$.

Bukti. Misalkan $x = \frac{(u+v)}{2}$ dan $y = v$, kemudian diperoleh

$$\begin{aligned} x^2 - xy - y^2 =& (\frac{u+v}{2})^2 - (\frac{u+v}{2})v - v^2 \\ =& \frac{-u^2 - 5v^2}{4} \\ x^2 - xy - y^2 =& \pm 1. \end{aligned}$$

Dari Teorema 1, nilai $(x, y) = (F_{n+1}, F_n)$ dengan $n \geq 0$, sehingga diperoleh

$$F_{n+1} = \frac{(u+v)}{2} \quad \text{dan} \quad y = F_n,$$

atau dapat ditulis $u = 2F_{n+1} - F_n$ dan $v = F_n$. Dengan menggunakan identitas (h) yang ditulis dalam bentuk $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ dan identitas (e), maka nilai u menjadi,

$$\begin{aligned} u =& 2F_{n+1} - F_n \\ u =& L_n. \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa semua solusi bilangan bulat tak negatif dari persamaan $u^2 - 5v^2 = \pm 4$ diberikan oleh $(u, v) = (L_n, F_n)$ dengan $n \geq 0$. □

3. SOLUSI BILANGAN BULAT SUATU PERSAMAAN DIOPHANTINE MELALUI BILANGAN FIBONACCI DAN BILANGAN LUCAS

Pada artikel ini dibahas penerapan bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas untuk menyelesaikan 3 buah bentuk persamaan Diophantine $x^2 + axy + by^2 = c$, dengan nilai a, b, dan c dikonstruksi menggunakan bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas, yaitu $x^2 - 5F_nxy - 5(-1)^ny^2 = \pm L_n^2$, $x^2 - L_nxy + (-1)^ny^2 = \pm 5F_n^2$, dan $x^2 - L_nxy + (-1)^ny^2 = \pm F_n^2$. Penyelesaian ketiga persamaan tersebut telah dibahas sebelumnya oleh Demirturk dan Keskin dalam [4] yang dipaparkan pada Teorema 4, Teorema 5, dan Teorema 6 sebagai berikut.

Teorema 4 Semua solusi bilangan bulat dari persamaan $x^2 - 5F_nxy - 5(-1)^ny^2 = -L_n^2$ adalah $(x, y) = \pm(L_{n+m}, F_m)$ dengan nilai m bilangan bulat ganjil dan $x^2 - 5F_nxy - 5(-1)^ny^2 = L_n^2$ adalah $(x, y) = \pm(L_{n+m}, F_m)$ dengan nilai m bilangan bulat genap, $n > 0$ dan $n \in Z$.
Bukti. Pandang persamaan

$$x^2 - 5F_nxy - 5(-1)^ny^2 = -L_n^2. \tag{4}$$

Kemudian dengan melakukan modifikasi aljabar pada persamaan (4) diperoleh

$$(2x - 5F_ny)^2 - 5L_n^2y^2 = -4L_n^2. \tag{5}$$

Kemudian dengan menerapkan tahap-tahap Teorema 2 pada persamaan (5), dapat diambil nilai $u = \frac{\frac{2x-5F_ny}{L_n}+y}{2}$ dan $v = y$. Dengan menggunakan nilai $u = \frac{x-L_n-1y}{L_n}$ dan $v = y$ kemudian diperoleh

$$\begin{aligned} u^2 - uv - v^2 =& (\frac{x - L_{n-1}y}{L_n})^2 - (\frac{x - L_{n-1}y}{L_n})y - y^2 \\ u^2 - uv - v^2 =& \frac{x^2 - xy(L_{n-1} + L_{n+1}) - y^2(L_n^2 - L_{n-1}L_n - L_{n-1}^2)}{L_n^2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Dengan menggunakan identitas (b) dan (f) persamaan (6) menjadi

$$\begin{aligned} u^2 - uv - v^2 =& \frac{(x^2 - 5F_nxy - 5(-1)^ny^2)}{L_n^2} \\ =& \frac{-L_n^2}{L_n^2} \\ u^2 - uv - v^2 =& -1, \end{aligned}$$

kemudian dengan menggunakan Akibat 2, nilai $(u, v) = \pm(F_{2n}, F_{2n-1})$ atau dapat ditulis $(u, v) = \pm(F_{m+1}, F_m)$ dengan $m = 2n - 1$, m bilangan bulat ganjil.

Oleh karena itu diperoleh,

$$\frac{x - L_{n-1}y}{L_n} = \pm F_{m+1} \quad \text{dan} \quad y = \pm F_m.$$

atau dapat ditulis

$$x = \pm(F_{m+1}L_n + L_{n-1}F_m) \quad \text{dan} \quad y = \pm F_m.$$

Dengan menggunakan identitas (c), maka solusi x dan y menjadi $(x, y) = \pm(L_{n+m}, F_m)$. Kemudian melalui cara yang sama akan diperoleh solusi bilangan bulat persamaan $x^2 - 5F_nxy - 5(-1)^ny^2 = L_n^2$ yang diberikan oleh $(x, y) = \pm(L_{n+m}, F_m)$.

Jadi, terbukti bahwa semua solusi bilangan bulat dari persamaan $x^2 - 5F_nxy - 5(-1)^ny^2 = -L_n^2$ dengan m bilangan bulat ganjil dan $n > 0$ adalah $(x, y) = \pm(L_{n+m}, F_m)$ dan semua solusi bilangan bulat dari persamaan $x^2 - 5F_nxy - 5(-1)^ny^2 = L_n^2$ dengan m bilangan bulat genap, $n > 0$ dan $n \in Z$ adalah $(x, y) = \pm(L_{n+m}, F_m)$. □

Teorema 5 Semua solusi bilangan bulat dari persamaan $x^2 - L_nxy + (-1)^ny^2 = -5F_n^2$ adalah $(x, y) = \pm(L_{n+m}, L_m)$ dengan nilai m bilangan bulat genap dan $x^2 - L_nxy + (-1)^ny^2 = -5F_n^2$ adalah $(x, y) = \pm(L_{n+m}, L_m)$ dengan m bilangan bulat ganjil, $n > 0$ dan $n \in Z$.

Bukti. Pandang persamaan

$$x^2 - L_nxy + (-1)^ny^2 = -5F_n^2. \tag{7}$$

Kemudian dengan melakukan operasi aljabar pada persamaan (7) diperoleh

$$(2x - L_ny)^2 - 5F_n^2y^2 = -20F_n^2. \tag{8}$$

Kemudian dengan menerapkan tahap-tahap pada Teorema 2 pada persamaan (8), dapat diambil nilai $u = \frac{\frac{2x-L_ny}{5F_n}+y}{2}$ dan $v = \frac{2x-L_ny}{5F_n}$. Dengan menggunakan nilai $u = \frac{x+L_{n-1}y}{5F_n}$ dan $v = \frac{2x-L_ny}{5F_n}$, dapat diperoleh

$$\begin{aligned} u^2 - uv - v^2 =& (\frac{x + L_{n-1}y}{5F_n})^2 - (\frac{x + L_{n-1}y}{5F_n})(\frac{2x - L_ny}{5F_n}) - (\frac{2x - L_ny}{5F_n})^2 \\ u^2 - uv - v^2 =& \frac{-5x^2 - y^2(-L_{n-1}^2 - L_{n-1}L_n + L_n^2) + xy(L_n + 4L_n)}{25F_n^2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Dengan menggunakan identitas (b) maka persamaan (9) menjadi

$$\begin{aligned} u^2 - uv - v^2 =& \frac{-5x^2 - y^2((-1)^n5) + 5L_nxy}{25F_n^2} \\ u^2 - uv - v^2 =& 1, \end{aligned}$$

kemudian dengan menggunakan Akibat 2, nilai $(u, v) = \pm(F_{2n+1}, F_{2n})$ atau dapat ditulis $(u, v) = \pm(F_{m+1}, F_m)$ dengan $m = 2n$, m bilangan bulat genap.

Oleh karena itu diperoleh,

$$\frac{x + L_{n-1}y}{5F_n} = \pm F_{m+1} \quad \text{dan} \quad \frac{2x - L_ny}{5F_n} = \pm F_m.$$

Dari hasil diatas didapat dua persamaan sebagai berikut

$$2x - L_n y = 5F_m F_n$$

$$x + L_{n-1} y = 5F_{m+1} F_n.$$

Dengan menggunakan Aturan Cramer, maka didapat nilai $y = L_m$, selanjutnya akan diperoleh nilai $x = l_{n+m}$. Kemudian melalui cara yang sama akan diperoleh solusi bilangan bulat persamaan $x^2 - L_n xy + (-1)^n y^2 = 5F_n^2$ yaitu $(x, y) = \pm(L_{n+m}, L_m)$.

Jadi, terbukti bahwa semua solusi bilangan bulat dari persamaan $x^2 - L_n xy + (-1)^n y^2 = -5F_n^2$ dengan m bilangan bulat genap, $n > 0$ dan $n \in Z$ adalah $(x, y) = \pm(L_{n+m}, L_m)$ dan semua solusi bilangan bulat dari persamaan $x^2 - L_n xy + (-1)^n y^2 = 5F_n^2$ dengan m bilangan bulat ganjil, $n > 0$ dan $n \in Z$ adalah $(x, y) = \pm(L_{n+m}, L_m)$. $\square$

Teorema 6 Semua solusi bilangan bulat dari persamaan $x^2 - L_n xy + (-1)^n y^2 = -F_n^2$ adalah $(x, y) = \pm(F_{n+m}, F_m)$ dengan nilai m bilangan bulat ganjil dan $x^2 - L_n xy + (-1)^n y^2 = F_n^2$ adalah $(x, y) = \pm(F_{n+m}, F_m)$ dengan m bilangan bulat ganjil, $n > 0$ dan $n \in Z$.

Bukti. Pandang persamaan

$$x^2 - L_n xy + (-1)^n y^2 = -F_n^2. \tag{10}$$

Kemudian dengan melakukan operasi aljabar pada persamaan (10) diperoleh

$$(2x - L_n y)^2 - 5F_n^2 y^2 = -4F_n^2. \tag{11}$$

Kemudian dengan menerapkan tahap-tahap Teorema 2 pada persamaan (11), dapat diambil nilai $u = \frac{\frac{2x - L_n y}{F_n} + y}{2}$ dan $v = y$. Dengan menggunakan nilai $u = \frac{x - F_{n-1} y}{F_n}$ dan $v = y$, maka

$$\begin{aligned} u^2 - uv - v^2 =& (\frac{x - F_{n-1} y}{F_n})^2 - (\frac{x - F_{n-1} y}{F_n}) y - y^2 \\ u^2 - uv - v^2 =& \frac{x^2 - xy(F_{n-1} + F_{n-1} + F_n) + y^2(F_{n-1}^2 + F_n F_{n-1} - F_n^2)}{F_n^2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Dengan menggunakan identitas (a) dan (h) yang ditulis dalam bentuk $F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$ maka persamaan (12) menjadi,

$$u^2 - uv - v^2 \frac{x^2 - xy(F_{n-1} + F_{n+1}) + y^2(-(-1)^{n+1})}{F_n^2}. \tag{13}$$

Dengan menggunakan identitas (e) maka persamaan (13) menjadi

$$\begin{aligned} u^2 - uv - v^2 =& \frac{x^2 - xyL_n + y^2(-1)^n}{F_n^2} \\ =& \frac{-F_n^2}{F_n^2} \\ u^2 - uv - v^2 =& -1, \end{aligned}$$

kemudian dengan menggunakan Akibat 2, nilai $(u, v) = \pm(F_{2n}, F_{2n-1})$ atau dapat ditulis $(u, v) = \pm(F_{m+1}, F_m)$ dengan $m = 2n - 1$, m bilangan bulat ganjil.

Oleh karena itu diperoleh,

$$\frac{x - F_{n-1}y}{F_n} = \pm F_{m+1} \quad \text{dan} \quad v = \pm F_m,$$

atau dapat ditulis

$$x = \pm(F_{m+1}F_n + F_{n-1}F_m) \quad \text{dan} \quad y = \pm F_m.$$

Dengan menggunakan identitas (k), maka solusi x dan y menjadi $(x, y) = \pm(F_{n+m}, F_m)$. Kemudian dengan menggunakan cara yang sama maka akan diperoleh solusi bilangan bulat persamaan $x^2 - L_nxy + (-1)^ny^2 = F_n^2$ yaitu $(x, y) = \pm(F_{n+m}, F_m)$.

Jadi, terbukti bahwa semua solusi bilangan bulat dari persamaan $x^2 - L_nxy + (-1)^ny^2 = -F_n^2$ dengan m bilangan bulat ganjil, $n > 0$ dan $n \in Z$ adalah $(x, y) = \pm(F_{n+m}, F_m)$ dan semua solusi bilangan bulat dari persamaan $x^2 - L_nxy + (-1)^ny^2 = F_n^2$ dengan m bilangan bulat genap, $n > 0$ dan $n \in Z$ adalah $(x, y) = \pm(F_{n+m}, F_m)$. $\square$

4. CONTOH

CONTOH 7 Akan ditentukan solusi dari $x^2 - 5xy - 5y^2 = -9$. Dari persamaan $x^2 - 5xy - 5y^2 = -9$, terlihat bahwa $-9 = -(3)^2$ dengan 3 merupakan nilai L_2. Oleh karena itu persamaan $x^2 - 5xy - 5y^2 = -9$ dapat ditulis sebagai berikut :

$$x^2 - 5(1)xy - 5(-1)^2y^2 = -\,(3)^2$$
$$x^2 - 5F_2xy - 5(-1)^2y^2 = -\,L_2^2.$$

Bentuk dari persamaan $x^2 - 5F_2xy - 5(-1)^2y^2 = -L_2^2$ memenuhi bentuk persamaan pada Teorema 3 $x^2 - 5F_nxy - 5(-1)^ny^2 = -L_n^2$ dengan nilai $n = 2$. Oleh karena itu dengan menggunakan hasil dari Teorema 3 yaitu bahwa solusi dari $x^2 - 5F_nxy - 5(-1)^ny^2 = -L_n^2$ adalah $(x, y) = (L_{n+m}, F_m)$ dengan $m = 2n - 1$, m bilangan bulat ganjil diperoleh solusi dari persamaan $x^2 - 5xy - 5y^2 = -9$ adalah $(x, y) = (L_5, F_3) = (11, 2)$.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dikemukakan sebelumnya, maka dapat disimpulkan bahwa solusi persamaan Diophantine nonlinear yang berbentuk $x^2+axy+by^2=c$ dapat ditunjukkan dalam bentuk bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas. Keterkaitan ini disebabkan karena solusi persamaan Diophantine merupakan bilangan bulat, serta bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas juga bilangan bulat.

Pada artikel ini hanya dibahas penyelesaian persamaan Diophantine nonlinear yang berbentuk $x^2-5F_nxy-5(-1)^ny^2=\pm L_n^2$, $x^2-L_nxy+(-1)^ny^2=\pm 5F_n^2$, dan $x^2-L_nxy+(-1)^ny^2=\pm F_n^2$. Penyelesaian ketiga persamaan tersebut dengan menggunakan identitas bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas, serta dengan melakukan modifikasi aljabar. Pada penyelesaian persamaan-persamaan tersebut hanya akan didapat satu solusi, padahal pada persamaan Diophantine memiliki solusi yang banyak. Hal ini disebabkan karena nilai solusi persamaan-persamaan tersebut bergantung pada nilai n, dalam hal ini nilai n yang didapat hanya satu nilai saja. Oleh karena itu, jumlah solusi yang didapat hanya satu solusi saja.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Andreescu, T & D. Andrica. 2002. *An Introduction to Diophantine Equation.* Gil Publishing House. Zalau, Romania.

[2] Dunlap, R. A. 1997. *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. USA.

[3] Koshy, T. 2007. *Elementary Number Theory with Application, second edition.* Elsevier Academic Press. UK.

[4] Demirturk, B & R. Keskin. 2009. Integer Solutions of Some Diophantine Equations via Fibonacci and Lucas Numbers. *Journal of Integer Sequences.* 12:1-14

[5] V. E. Jr. Hoggatt. 1969. *Fibonacci and Lucas Numbers.* Houghton Mifflin Company. Boston.

[6] Koshy, T. 2001. *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications.* John Wiley and Sons, Proc., New York-Toronto.

[7] Vadja, S. 1989. *Fibonacci and Lucas Numbers and the Golden Section.* Ellis Horwood Limited Publ., England.