PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN INTEGRAL VOLTERRA DENGAN METODA DEKOMPOSISI ADOMIAN

Okmi Zerlan[1*], M. Natsir[2], Endang Lily[2]

[1]Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2]Dosen JurusanMatematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293) Indonesia

*zerlan_07@yahoo.co.id

ABSTRACT

This article discusses the construction of the systems of Volterra integral equations from extended Lane-Emden equation. The system of Volterra integral equations of the settlement is determined by using the Adomian Decomposition Method. The Adomian decomposition method gives reliable result for analytic approximate solutions of these systems. The results are supported by investigating the example problems.
Keywords**:** *Adomian Decomposition Method , Systems of the Volterra Integral Equations, Lane-Emden Equation.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas uraian pembentukan sistem persamaan integral Volterra dari persamaan Lane-Emden yang sudah diperluas. Adapun sistem persamaan integral Volterra tersebut selanjutnya akan ditentukan penyelesaiannya dengan menggunakan Metode Dekomposisi Adomian. Metode Dekomposisi Adomian diharapkan dapat digunakan untuk menganalisis perkirakan hasil dari sistem persamaan ini. Hasil yang didapat didukung dengan menyelidiki contoh soal.
Kata kunci**:** *Metoda Dekomposisi Adomian, Sistem Persamaan Integral Volterra, Persamaan Lane-Emden.*

1. PENDAHULUAN

Persamaan integral Volterra merupakan persamaan yang memuat fungsi tidak diketahui dan fungsi tersebut berada dalam operasi integral. Sejalan dengan perkembangan zaman dan kemajuan teknik dari ilmu pengetahuan maka semakin banyak variasi bentuk-bentuk dan penyelesaian persamaan integral Volterra. Salah satu bentuk perluasan dari persamaan integral Volterra adalah sistem pengintegral Volterra yang diketahui mempunyai n fungsi tidak diketahui dengan $n \geq 2$. Selain itu banyak pula variasi metode penyelesainnya diantaranya transformasi, pemisahan fungsi kernel dan lain lain. Selanjutnya dapat ditinjau metode yang ditemukan pada penyelesain persamaan diferensial biasa yang dikenal dengan metoda dekomposisi adomian [6]. Selain itu dapat ditinjau pula didalam [1] bahwa bentuk suatu persamaan integral Volterra mempunyai bentuk ekuivaken dengan persamaan diferensial biasa orde dua.

Berdasarkan tinjauan dari [1] dan [6] terdapat gagasan yang cukup menarik untuk menuliskan metode dekomposisi adomian pada penyelesaian persamaan integral

Volterra. Pada artikel ini diuraikan hubungan antara persamaan diferensial dan persamaan integral Volterra.

2. SISTEM PERSAMAAN INTEGRAL VOLTERRA MENGGUNAKAN METODA DEKOMPOSISI ADOMIAN

Dalam tulisan ini dibahas bagaimana mencari solusi penyelesaian suatu sistem integral Volterra yang dibentuk dari persamaan Lane-Emden kemudian diselesaikan dengan menggunakan Metoda Dekomposisi Adomian.

2.1 Sistem Persamaan Lane-Emden

Persamaan Lane-Emden adalah persamaan differensial biasa orde dua yang biasa ditulis dalam bentuk [6, h. 37 10]

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{du}{dx}+u^n=0. \tag{1}$$

dengan n adalah konstanta dan syarat batas,

$$u(x)=1 \text{ dan } \quad \frac{du(x)}{dx}=0 \qquad \text{untuk } x=0.$$

Selanjutnya persamaan Lane-Emden pada persamaan (1) dapat ditulis secara umum dalam bentuk

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{du}{dx}+f(u)=0, \tag{2}$$

dengan $f(u)$ adalah fungsi terhadap u dan syarat batas

$$u(x)=\alpha \text{ dan } \quad \frac{du(x)}{dx}=0 \qquad \text{untuk } x=0 \text{ dimana } \alpha \text{ adalah konstanta.}$$

Selanjutnya bentuk persamaan Lane-Emden dapat dikembangkan lagi dalam bentuk [6, h 37 11]

$$\frac{d^nu}{dx^n}+\frac{n}{x}\frac{du}{dx}+f(u)=0,\ \ n\geq 0, \tag{3}$$

dengan syarat batas

$$u(x)=\alpha \text{ dan } \quad \frac{du(x)}{dx}=0 \qquad \text{untuk } x=0.$$

Berikutnya permasalahan yang dibicarakan dalam artikel ini adalah sistem persamaan Lane-Emden berbentuk [6, h 37 11]

$$\begin{aligned} &\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{du}{dx}+f(u,v)=0.\\ &\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dv}{dx}+f(u,v)=0, \end{aligned} \tag{4}$$

dengan syarat batas

$$u(x) = \alpha \text{ dan } \quad \frac{du(x)}{dx} = 0 \quad \text{untuk } x = 0.$$

$$v(x) = \beta \text{ dan } \quad \frac{dv(x)}{dx} = 0 \quad \text{untuk } x = 0. \tag{5}$$

Permasalahan yang harus diselesaikan pada persamaan (4) adalah menentukan solusi $u(x)$ dan $v(x)$ yang memenuhi persamaan (4) dan (5). Selanjutnya perluasan dari persamaan (4) berbentuk

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{k_1}{x}\frac{du}{dx} + f(u,v) = 0, k_1 > 0, x > 0.$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{k_2}{x}\frac{dv}{dx} + f(u,v) = 0, k_2 > 0, x > 0. \tag{6}$$

dengan syarat batas persamaan (5)

2.2 Sistem Persamaan Integral Volterra pada Sistem Persamaan Lane-Emden

Pada bagian ini diperlihatkan sistem persamaan Integral Volterra dapat memperlihatkan sistem persamaan Lane – Emden. Di dalam [6, h 37 11] dirumuskan sistem persamaan Volterra sebagai solusi sistem persamaan (4), sebagai berikut:

$$u(x) = \alpha - \int_0^x t\left(1 - \frac{t}{x}\right) f\big(u(t), v(t)\big)\, dt,$$

dan

$$v(x) = \beta - \int_0^x t\left(1 - \frac{t}{x}\right) g\big(u(t), v(t)\big)\, dt. \tag{7}$$

Persamaan (6) dapat ditunjukkan solusi persamaan (4) sebagai berikut. Dengan menentukan turunan pertama $U(x)$ dan $V(x)$ masing – masing diperoleh

$$\frac{du}{dx} = -\int_0^x \left(\frac{t^2}{x^2}\right) f\big(u(t), v(t)\big)\, dt,$$

dan

$$\frac{dv}{dx} = -\int_0^x \left(\frac{t^2}{x^2}\right) g\big(u(t), v(t)\big)\, dt. \tag{8}$$

Dari persamaan (8) diperoleh turunan kedua $\mathrm{u}(x)$ dan $v(x)$ masing – masing

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -f\big(u(t), v(t)\big) + \int_0^x \left(2\,\frac{t^2}{x^3}\right) f\big(u(t), v(t)\big)\, dt,$$

dan

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -g\big(u(t), v(t)\big) + \int_0^x \left(2\,\frac{t^2}{x^3}\right) g\big(u(t), v(t)\big)\, dt. \tag{9}$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (8) dan (9) kedalam persamaan (4) diperoleh

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{du}{dx} + f(u,v)$$

$$= -f(u,v) + \int_0^x \left(2\,\frac{t^2}{x^3}\right) f(u,v)\,dt$$

$$+\frac{2}{x}\int_0^x \left(\frac{t^2}{x^2}\right) f(u,v)\,dt + f(u,v) = 0, \tag{10}$$

dan

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dv}{dx} + g(u,v)$$

$$= -g(u,v) + \int_0^x \left(2\,\frac{t^2}{x^3}\right) g(u,v)\,dt$$

$$+\frac{2}{x}\int_0^x \left(\frac{t^2}{x^2}\right) g(u,v)\,dt + g(u,v) = 0. \tag{11}$$

Dari persamaan (10) dan (11) terlihat sistem persamaan integral Volterra merupakan solusi sistem persamaan Lane-Emden dari persamaan (4).

2.3 Perluasan Sistem Persamaan Integral Volterra pada Sistem persamaan Lane-Emden

Di bagian ini diperlihatkan sistem persamaan integral Volterra adalah solusi dari bentuk umum persamaan Lane-Emden. Didalam [6, h 37 12] dirumuskan sistem persamaan Integral Volterra yang memuat konstanta k_1 dan k_2 sebagai solusi sistem persamaan Lane-Emden bentuk umum pada persamaan (5), yaitu

$$u(x) = \alpha - \frac{1}{k_1 - 1}\int_0^x t\left(1 - \frac{t^{k_1-1}}{x^{k_1-1}}\right) f\big(u(t), v(t)\big)\,dt,$$

dan

$$v(x) = \beta - \frac{1}{k_2 - 1}\int_0^x t\left(1 - \frac{t^{k_2-1}}{x^{k_2-1}}\right) g\big(u(t), v(t)\big)\,dt,$$

untuk $k_1 \neq 1$ dan $k_2 \neq 1$ (12)

Persamaan (12) dapat ditunjukkan sebagai solusi persamaan (5) sebagai berikut. Dengan menentukan turunan pertama $u(x)$ dan $v(x)$ masing – masing diperoleh

$$\frac{du}{dx} = -\int_0^x \left(\frac{t^{k_1}}{x^{k_1}}\right) f\big(u(t), v(t)\big)\,dt,$$

dan

$$\frac{dv}{dx} = -\int_0^x \left(\frac{t^{k_2}}{x^{k_2}}\right) g\big(u(t), v(t)\big)\, dt. \tag{13}$$

Dari persamaan (13) diperoleh turunan kedua dari $u(x)$ dan $v(x)$ masing – masing diperoleh

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -f(u(x), v(x)) + \int_0^x \left(\frac{t^{k_1}}{x^{k_1+1}}\right) f\big(u(t), v(t)\big)\, dt,$$

dan

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -g(u(x), v(x)) + \int_0^x \left(\frac{t^{k_2}}{x^{k_2+1}}\right) g\big(u(t), v(t)\big)\, dt. \tag{14}$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (13) dan (14) ke dalam persamaan (5) diperoleh

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{k_1}{x}\frac{du}{dx} + f(u(x), v(x)) = \\
&-f(u(x), v(x)) + \int_0^x k_1 \left(\frac{t^{k_1}}{x^{k_1+1}}\right) f(u(t), v(t))\, dt \\
&+\frac{k_1}{x}\int_0^x \left(\frac{t^{k_1}}{x^{k_1}}\right) f(u(t), v(t))\, dt + f(u(x), v(x)) = 0,
\end{aligned} \tag{15}$$

dan

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{k_2}{x}\frac{dv}{dx} + g(u(x), v(x)) = \\
&-g(u, v) + \int_0^x k_2 \left(\frac{t^{k_2}}{x^{k_2+1}}\right) g(u(t), v(t))\, dt \\
&+\frac{k_2}{x}\int_0^x \left(\frac{t^{k_2}}{x^{k_2}}\right) g(u(t), v(t))\, dt + g(u(x), v(x)) = 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Dari persamaan (15) dan (16) terbukti sistem persamaan integral pada persamaan (12) adalah solusi sistem persamaan Lane-Emden persamaan (5) dengan $k_1 \neq 1$ dan $k_2 \neq 1$.

Jika $k_1 = 1$ dan $k_2 = 1$, maka pada persamaan (12) diperoleh

$$u(x) = \alpha + \int_0^x t \ln\left(\frac{t}{x}\right) f\big(u(t), v(t)\big)\, dt,$$

dan

$$v(x) = \beta + \int_0^x t \ln\left(\frac{t}{x}\right) g\big(u(t), v(t)\big)\, dt. \tag{17}$$

Persamaan (17) dapat dibuktikan sebagai berikut:

$$\lim_{k_1\to 1}\frac{1}{k_1-1}\left(1-\left(\frac{t}{x}\right)^{k_1-1}\right) = -\lim_{k_1\to 1}\left(\frac{t}{x}\right)^{k_1-1}\ln\left(\frac{t}{x}\right) = -\ln\frac{t}{x},$$

dan

$$\lim_{k_2\to 1}\frac{1}{k_2-1}\left(1-\left(\frac{t}{x}\right)^{k_2-1}\right) = -\lim_{k_2\to 1}\left(\frac{t}{x}\right)^{k_2-1}\ln\left(\frac{t}{x}\right) = -\ln\frac{t}{x}.$$

Selanjutnya dapat disimpulkan sistem persamaan integral Volterra sebagai solusi sistem persamaan Lane-Emden sebagai berikut:

$$u(x) = \begin{cases} \alpha + \int_0^x t\ ln\left(\frac{t}{x}\right) f\big(u(t),v(t)\big)\,dt. & \text{untuk } k_1 = 1 \\ \alpha + \dfrac{1}{k_1-1}\displaystyle\int_0^x t\left(1-\frac{t^{k_1-1}}{x^{k_1-1}}\right) f\big(u(t),v(t)\big)\,dt. & \text{untuk } k_1 > 0, k_1 \neq 1 \\ v(x) = \beta + \displaystyle\int_0^x t\ ln\left(\frac{t}{x}\right) g\big(u(t),v(t)\big)\,dt. & \text{untuk } k_2 = 1 \\ \beta + \dfrac{1}{k_2-1}\displaystyle\int_0^x t\left(1-\frac{t^{k_2-1}}{x^{k_2-1}}\right) g\big(u(t),v(t)\big)\,dt. & \text{untuk } k_2 > 0, k_2 \neq 1 \end{cases} \qquad (18)$$

2.4 Metode Dekomposisi Adomian pada Penyelesaian Sistem Integral Volterra

Pada bagian ini diuraikan pemekaian Metode Dekomposisi Adomian dalam menyelesaikan sistem persamaan Integral Volterra. Didalam menggunakan Metode Dekomposisi Adomian ini disubtitusikan deret tak hingga

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x),$$

$$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(x),$$

dan Polinomial Adomian tak hingga

$$f(u,v) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0,u_1,\cdots,u_n,v_0,v_1,v_2,\cdots,v_n),$$

$$g(u,v) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(u_0,u_1,\cdots,u_n,v_0,v_1,v_2,\cdots,v_n). \qquad (19)$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (19) ke dalam persamaan (18) maka diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) = \alpha - \frac{1}{k_1 - 1}\int_0^x t\left(1 - \frac{t^{k_1-1}}{x^{k_1-1}}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \cdots, u_n, v_0, v_1, v_2, \cdots, v_n)\ dt.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n(x) = \beta - \frac{1}{k_2 - 1}\int_0^x t\left(1 - \frac{t^{k_2-1}}{x^{k_2-1}}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(u_0, u_1, \cdots, u_n, v_0, v_1, v_2, \cdots, v_n)\ dt. \tag{20}$$

Didefinisikan operator L^{-1}, yaitu

$$L^{-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \cdots, u_n, v_0, v_1, v_2, \cdots, v_n)\right]$$

$$= \frac{1}{k_1 - 1}\int_0^x t\left(1 - \frac{t^{k_1-1}}{x^{k_1-1}}\right) \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \cdots, u_n, v_0, v_1, v_2, \cdots, v_n) dt.$$

dan

$$L^{-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty} B_n(u_0, u_1, \cdots, u_n, v_0, v_1, v_2, \cdots, v_n)\right]$$

$$= \frac{1}{k_2 - 1}\int_0^x t\left(1 - \frac{t^{k_2-1}}{x^{k_2-1}}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(u_0, u_1, \cdots, u_n, v_0, v_1, v_2, \cdots, v_n) dt, \tag{21}$$

maka persamaan (19) menjadi

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) = \alpha - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \cdots, u_n, v_0, v_1, v_2, \cdots, v_n)\ dt.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n(x) = \beta - \sum_{n=0}^{\infty} B_n(u_0, u_1, \cdots, u_n, v_0, v_1, v_2, \cdots, v_n)\ dt. \tag{22}$$

Jika ditetapkan pada persamaan (21) $u_0(x) = \alpha$ dan $v_0(x) = \beta$, maka untuk $n = 1$ diperoleh

$$u_0(x) + u_1(x) = \alpha - L^{-1}[A_0],$$

sehingga $u_1(x) = -L^{-1}[A_0]$.

Untuk $n=2$ diperoleh

$$u_0(x)+\ u_1(x)+u_2(x)=\ \alpha-L^{-1}[A_0]-L^{-1}[A_1],$$

sehingga $u_2(x)=-L^{-1}[A_1]$.

Untuk $n=3$ diperoleh

$$u_0(x)+\ u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)=\ \alpha-L^{-1}[A_0]-L^{-1}[A_1]-L^{-1}[A_2],$$

sehingga $u_3(x)=-L^{-1}[A_2]$.

Selanjutnya dapat dilihat secara umum rumus rekursif

$$u_0(x)=\alpha,$$

$$u_{n+1}(x)=-L^{-1}[A_n],$$

dan

$$v_0(x)=\beta,$$

$$v_{n+1}(x)=-L^{-1}[B_n]. \tag{23}$$

Berdasarkan persamaan (20) maka diperoleh persamaan (23) menjadi

$$u_0(x)=\alpha,$$

$$u_{n+1}(x)=\frac{1}{k_1-1}\int_0^x t\left(1-\frac{t^{k_1-1}}{x^{k_1-1}}\right)\ A_n dt \qquad \text{untuk } n\geq 0,$$

dan

$$v(x)=\beta,$$

$$v_{n+1}(x)=\frac{1}{k_2-1}\int_0^x t\left(1-\frac{t^{k_2-1}}{x^{k_2-1}}\right)\ B_n dt \qquad \text{untuk } n\geq 0. \tag{24}$$

3. CONTOH

Dengan menggunakan persamaan (2) dapat dibentuk Sistem persamaan integral Volterra dari persamaan Lane-Emden sebagai berikut

$$u''+\frac{3}{x}u'-4(u+v)=0$$

$$v''+\frac{2}{x}v'-3(u+v)=0 \tag{25}$$

dengan syarat awal

$$u(0)=1, u'(0)=0$$

$$v(0)=1, v'(0)=0,$$

diperoleh untuk $k_1, k_2 > 1$, bentuk sistem integral Volterra yang dipakai adalah

$$u(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x t\left(1 - \frac{t^2}{x^2}\right) 4(u + v)\, dt.$$

$$v(x) = 1 - \int_0^x t\left(1 - \frac{t}{x}\right) 3(u + v)\, dt.$$

bila persamaan di atas menggunakan Metoda Dekomposisi Adomian dengan $u_0(x) = \alpha = 1$ dan $v_0(x) = \beta = 1$ maka dengan menggunakan rumus rekursif diperoleh

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1, \\ u_{n+1}(x) &= 4\frac{1}{2}\int_0^x t\left(1 - \frac{t^2}{x^2}\right) (u + v)\, dt, \qquad n \geq 0, \\ v_0(x) &= 1, \\ v_{n+1}(x) &= -3\int_0^x t\left(1 - \frac{t}{x}\right) (u + v)\, dt, \qquad n \geq 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Untuk $n = 0$

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 4\frac{1}{2}\int_0^x t\left(1 - \frac{t^2}{x^2}\right)(u_0 + v_0)\, dt \\ &= \frac{8}{2}\left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}\frac{t^4}{x^2}\right]_0^x = x^2, \\ v_1(x) &= -3\int_0^x t\left(1 - \frac{t}{x}\right)(u_0 + v_0)\, dt \\ &= -6\int_0^x t\left(1 - \frac{t^2}{x}\right) dt \\ &= -6\left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}\frac{t^3}{x^2}\right]_0^x = -x^2. \end{aligned} \tag{27}$$

Untuk $n \geq 1$ diperoleh $u_{n+1}(x)$ dan $v_{n+1}(x)$ =0, (28)
lalu didapat rumus rekursif untuk sistem persamaan (26), (27), dan (28) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1 \\ u_1(x) &= x^2 \\ u_i(x) &= 0, \qquad i \geq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_0(x) &= 1 \\ v_2(x) &= -x^2 \\ v_j(x) &= 0, \qquad j \geq 2 \end{aligned}$$

Didapat solusi untuk sistem persamaan (25)

$$\big(u(x), v(x)\big) = (1 + x^2, 1 - x^2)$$

4. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dikemukakan dalam artikel ini, maka diperoleh kesimpulan bahwa untuk mencari penyelesaian sistem persamaan integral Volterra $u(x) = f(x) + \int_0^x K(t,x)u(t)dt$ bisa diselesaikan dengan MDA (Metoda Dekomposisi Adomian). Tentunya integral Volterra tersebut secara khusus dibentuk dari sistem persamaan diferensial Lane-Emden $u'' + \frac{k_1}{x}u' + f(u,v) = 0$ dan $u'' + \frac{k_2}{x}u' + g(u,v)$, $k_1, k_1, x > 0$ dengan syarat awal $u(0) = v(0) = 1, u'(0) = v'(0) = 0.$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Ali, H S. 2010. Approximate Solution for System of Linear- Nonlinear Volterra Integral Equations by Using Decomposition Method. *Journal of College of Education*. 1: 1-12.

[2] Almazmumy, M., Hendi F A, Bakodah H O & Alzumi H. 2012. Recent Modifications of Adomian Decomposition Method for Initial Value Problem in Ordinary Differential Equations. *American Journal of Computational Mathematics.* 2: 228-234.

[3] Biazar, J & M Eslami. 2011. Homotopy Perturbation and Taylor Series for Volterra Integral Equations Of the Second Kind. *Middle-East Journal of Scientific Reseach* 7(4): 604-609.

[4] Mashayekhi, S., M. Razzaghi & O.Tripak. 2014. Solution of the Nonlinear Mixed Volterra-Fredholm Integral Equations by Hybrid of ablok-Pulse Functions and Bernaulli Polynomial. *The Scientific World Journal.* 413623:1-8.

[5] Wazwaz, A M. 2002. A New Method for solving singular initial value problem in the second-order ordinary differential equations. *Applied Mathematics and Computations.* 128: 45-47.

[6] Wazwaz, A M., Randolph R. & D. Jun-Sheng. 2013. A Study on the System of the Volterra integral forms of the Lane-Emden equations by the Adomian decomposition Method. *Mathematical Methods in the Applied Sciences.* 37: 10-14.