CADANGAN PROSPEKTIF ASURANSI JIWA BERJANGKA DENGAN HUKUM *DE MOIVRE*

Dini Ramadani[1*], Johannes Kho[2], Aziskhan[2]

[1]Mahasiswa Program S1 Matematika
[2]Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Bina Widya 28293 Indonesia

*dini_ramadani49@ymail.com

ABSTRACT

This article discusses the calculation of the prospective reserve for term life insurance with *De Moivre's* law to someone with the age of x where the money will be paid only if the insurance client dies within the term of protection. Based on the calculation, this prospective reserve is influenced by single premium, present value of annuity due, and annual premium, for which the calculation is done using *De Moivre*'s law.

Keywords: *De Moivre's law, prospective reserves, term life insurance.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas tentang perhitungan besarnya cadangan prospektif asuransi jiwa berjangka dengan hukum *De Moivre* untuk seseorang yang berusia x tahun dimana uang pertanggungannya hanya akan dibayarkan bila tertanggung meninggal dunia dalam masa perlindungan. Berdasarkan perhitungan yang dilakukan, cadangan prospektif ini dipengaruhi oleh premi tunggal, nilai tunai anuitas hidup awal dan premi tahunan yang dalam perhitungannya menggunakan hukum *De Moivre*.

Kata kunci: asuransi jiwa berjangka, cadangan prospektif, hukum *De Moivre*.

1. PENDAHULUAN

Ada dua jenis asuransi jiwa yang sedang berkembang di Indonesia, yaitu asuransi jiwa perorangan dan asuransi jiwa kelompok. Perbedaan antara kedua asuransi ini terletak pada jumlah tertanggungnya. Sesuai dengan namanya, pada asuransi jiwa perorangan jumlah tertanggung hanya satu orang atau tunggal, sementara pada asuransi jiwa kelompok perusahaan asuransi menanggung dua atau lebih tertanggung. Asuransi jiwa perorangan merupakan suatu perjanjian asuransi yang berhubungan dengan hidup matinya seseorang yang hanya ditentukan oleh satu orang saja [1]. Berdasarkan jangka waktu perlindungannya asuransi jiwa dibagi menjadi tiga, yaitu asuransi jiwa seumur hidup, asuransi jiwa berjangka dan asuransi jiwa dwiguna.

Pada suatu perusahaan asuransi jiwa, pihak perusahaan harus memelihara dana yang cukup untuk membayar santunan sesuai dengan kesepakatan diawal kontrak dalam bentuk cadangan. Secara teori, cadangan merupakan suatu besarnya uang yang ada pada perusahaan asuransi dalam jangka waktu pertanggungan dan terbagi menjadi dua, yaitu cadangan prospektif dan retrospektif [1]. Pada artikel ini, cadangan yang akan digunakan adalah cadangan prospektif.

Untuk menentukan besarnya cadangan yang akan diperoleh perusahaan asuransi, maka diperlukan premi tunggal, nilai tunai anuitas hidup awal dan premi tahunan yang dipengaruhi oleh peluang hidup dan peluang meninggal. Ada beberapa metode yang dapat digunakan dalam perhitungan premi tahunan. Pada artikel ini penulis menggunakan hukum *De Moivre*, yaitu salah satu hukum mortalita pada aktuaria. Pada dasarnya hukum ini digunakan untuk menentukan percepatan mortalita. Namun, dengan menggunakan fungsi kepadatan peluang dari hukum *De Moivre* tersebut dapat juga ditentukan peluang hidup dan peluang meninggalnya.

Berdasarkan penjelasan sebelumnya, artikel ini membahas cadangan prospektif asuransi jiwa berjangka yang diperoleh dari buku karangan Erick V. Slud [2]. Asuransi jiwa berjangka adalah asuransi jiwa yang jangka waktu perlindungannya ditentukan selama n tahun, dengan uang pertanggungan hanya akan dibayarkan apabila seorang tertanggung meninggal dunia dalam masa perlindungan. Pada artikel ini, dibahas perhitungan cadangan prospektif dengan menggunakan hukum *De Moivre* yang diperoleh dari buku karangan Erick V. Slud [2] dan Finan [3].

2. PREMI TAHUNAN ASURANSI JIWA BERJANGKA DENGAN HUKUM *DE MOIVRE*

Dalam perhitungan cadangan prospektif asuransi jiwa berjangka, diperlukan premi tunggal asuransi jiwa berjangka, anuitas hidup awal berjangka dan premi tahunan asuransi jiwa berjangka. Premi tunggal asuransi jiwa berjangka adalah pembayaran premi asuransi yang dilakukan pada waktu kontrak asuransi disetujui dan selanjutnya tidak ada lagi pembayaran premi hingga jangka waktu n tahun. Anuitas hidup adalah suatu pembayaran yang dilakukan berdasarkan hidup atau meninggalnya seseorang. Apabila pembayaran tersebut dilakukan diawal periode maka dinamakan anuitas hidup awal. Sementara premi tahunan asuransi jiwa berjangka merupakan pembayaran premi yang dilakukan selama jangka waktu yang telah ditentukan dalam kontrak asuransi. Premi tahunan dipengaruhi oleh premi tunggal dan nilai tunai anuitas hidup awal. Sedangakan, premi tunggal dan nilai tunai anuitas hidup awal dipengaruhi oleh peluang hidup, peluang meninggal dan faktor diskon.

Fungsi kepadatan peluang untuk hukum *De Moivre* [3] adalah

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega}, & 0 \le x \le \omega, \\ 0, \text{untuk } x \text{ lainnya}, \end{cases} \tag{1}$$

dimana x merupakan umur seseorang dan ω adalah perkiraan umur maksimal seseorang.

Berdasarkan persamaan (1), diperoleh peluang hidup seseorang yang berumur x hingga t tahun dan peluang meninggal seseorang yang berumur $x+t$ tahun sebagai

$$ {}_t p_x = \frac{\omega - x - t}{\omega - x} \tag{2} $$

dan

$$ q_{x+t} = \frac{1}{\omega - x - t}. \tag{3} $$

Dalam perhitungan premi tunggal dan nilai tunai anuitas hidup awal asuransi jiwa berjangka akan digunakan peluang hidup dan peluang meninggal pada persamaan (2) dan (3).

Premi tunggal asuransi jiwa berjangka untuk seorang yang berumur x tahun, dengan jangka waktu perlindungan selama n tahun adalah

$$ A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t}, \tag{4} $$

dimana v merupakan faktor diskon yang dinyatakan dengan

$$ v = \frac{1}{1+i}. \tag{5} $$

Berdasarkan persamaan (4), maka premi tunggal asuransi jiwa berjangka untuk seorang yang berumur x tahun dengan jangka waktu perlindungan selama n tahun dengan menggunakan hukum *De Moivre* dinyatakan dengan

$$ A^{1}_{x:\overline{n}|} = \left(\frac{v}{\omega - x} \right) \ddot{a}_{\overline{n}|}, \tag{6} $$

dimana $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ merupakan nilai tunai anuitas pasti awal selama n tahun yang dinyatakan dengan

$$ \ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{d}, \tag{7} $$

dimana $d = 1 - v$ merupakan tingkat diskon. Sehingga, premi tunggal asuransi jiwa berjangka untuk peserta asuransi yang berumur $x+t$ tahun dengan jangka pertanggungan asuransi selama $n-t$ tahun dengan hukum *De Moivre* sebagai berikut

$$ A^{1}_{x+t\,:\,\overline{n-t}|} = \left(\frac{v}{\omega - x - t} \right) \ddot{a}_{\overline{n-t}|}. \tag{8} $$

Nilai tunai anuitas hidup awal berjangka n tahun untuk seorang berumur x tahun biasanya dinyatakan dengan

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=\sum_{t=0}^{n-1} v^{t}\,{}_{t}p_{x}. \tag{9}$$

Apabila premi tunggal asuransi jiwa berjangka diketahui, maka berdasarkan persamaan (9) nilai tunai anuitas hidup awal juga dapat dinyatakan seperti berikut

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=\frac{1-v^{n}\,{}_{n}p_{x}-A^{1}_{x:\overline{n}|}}{d}. \tag{10}$$

Selanjutnya dengan menggunakan peluang hidup pada persamaan (2) dan mensubstitusikan persamaan (6) ke persamaan (10), diperoleh nilai tunai anuitas hidup awal untuk seorang yang berumur x tahun dengan jangka waktu n tahun seperti berikut

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=\ddot{a}_{\overline{n}|}+\left(\frac{n v^{n}-v\ddot{a}_{\overline{n}|}}{d(\omega-x)}\right). \tag{11}$$

Kemudian, nilai tunai anuitas hidup awal berjangka untuk peserta asuransi yang berumur $x+t$ tahun dengan jangka pertanggungan asuransi selama $n-t$ tahun dengan hukum *De Moivre* yaitu

$$\ddot{a}_{x+t\,:\,\overline{n-t}|}=\left(\left(\frac{\ddot{a}_{\overline{n-t}|}}{\omega-x-t}\right)(\omega-x)\right)-\left(\frac{t-nv^{n-t}+v\ddot{a}_{\overline{n-t}|}}{d(\omega-x-t)}\right). \tag{12}$$

Menurut W. O. Menge & C.H Fischer [4], premi tahunan asuransi jiwa berjangka untuk orang yang berumur x tahun dengan jangka waktu pelindungan n tahun yang uang pertanggungannya akan dibayarkan diakhir tahun polis dinyatakan dengan

$$P^{1}_{x:\overline{n}|}=R\frac{A^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}. \tag{13}$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (6) dan (11), maka diperoleh premi tahunan asuransi jiwa berjangka dengan jangka waktu perlindungan selama n tahun dan uang pertanggungan sebesar R yang dibayarkan di akhir tahun polis dengan menggunakan hukum *De Moivre* yaitu

$$P^{1}_{x:\overline{n}|}=R\frac{dv\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}d(\omega-x)+nv^{n}-v\ddot{a}_{\overline{n}|}} \tag{14}$$

dimana ω merupakan perkiraan umur maksimal seseorang.

3. CADANGAN PROSPEKTIF ASURANSI JIWA BERJANGKA DENGAN HUKUM *DE MOIVRE*

Cadangan prospektif adalah besar cadangan yang berorientasi pada pengeluaran di masa yang akan datang, dengan pengertian lain yaitu perhitungan cadangan berdasarkan nilai sekarang dari semua pengeluaran diwaktu yang akan datang dikurangi dengan nilai sekarang total pendapatan di waktu yang akan datang untuk tiap pemegang polis. Cadangan prospektif asuransi jiwa berjangka dengan hukum *De Moivre* adalah cadangan prospektif untuk seseorang yang berumur x tahun dengan jangka waktu pelindungan n tahun yang uang pertanggungannya akan dibayarkan jika seorang tertanggung tersebut meninggal dunia dengan uang pertanggungan akan dibayarkan diakhir tahun polis.

Berdasarkan [2], cadangan prospektif asuransi jiwa berjangka dengan uang pertanggungan sebesar R yang dibayarkan di akhir tahun polis dinyatakan dengan

$${}_tV^1_{x:\overline{n}|} = RA^1_{x+t:\overline{n-t}|} - P^1_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \,. \tag{15}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (8), (12) dan (14) ke persamaan (15), maka besarnya cadangan prospektif asuransi jiwa berjangka dengan uang pertanggungan sebesar R berdasarkan hukum *De Moivre* diperoleh

$${}_tV^1_{x:\overline{n}|} = R\left(\frac{v}{\omega - x - t}\right)\ddot{a}_{\overline{n-t}|} - \left(R\frac{dv\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}d(\omega - x) + nv^n - v\ddot{a}_{\overline{n}|}}\right) \left(\left(\left(\frac{\ddot{a}_{\overline{n-t}|}}{\omega - x - t}\right)(\omega - x)\right) - \left(\frac{t - nv^{n-t} + v\ddot{a}_{\overline{n-t}|}}{d(\omega - x - t)}\right)\right). \tag{16}$$

Contoh: Bu Emma adalah seorang karyawan di sebuah perusahaan swasta. Tahun ini ia genap berumur 36 tahun. Ia hendak mengikuti program asuransi berjangka dengan masa pertanggungan selama 20 tahun. Jika rata-rata umur maksimal adalah 95 tahun dan besar uang pertanggungan yang akan diterima ahli waris ketika Bu Emma meninggal dunia adalah Rp 80.000.000,00 dengan tingkat bunga 5%, maka besarnya premi tahunan yang harus dibayar Bu Emma setiap awal tahun selama 20 tahun dan cadangan prospektif premi tahunan yang akan diperoleh perusahaan asuransi setiap tahunnya untuk 4 tahun yang akan datang dengan menggunakan hukum *De Moivre* dapat ditentukan dengan langkah-langkah sebagai berikut

Dari kasus di atas, diketahui $\omega = 95$, $n = 20$, $t = 4$, $x = 36$, $i = 5\% = 0{,}05$ dan R = Rp 80.000.000,00. Dengan menggunakan persamaan (5) diperoleh

$$v = \frac{1}{1 + 0{,}05} = 0{,}952381$$

Sehingga,

$$d = 1 - 0{,}952381 = 0{,}047619$$

Selanjutnya, dengan menggunakan persamaan (7) diperoleh

$$\ddot{a}_{\overline{20|}} = \frac{1-(0{,}952381)^{20}}{0{,}047619} = 13{,}08532$$

Sehingga dengan menggunakan persamaan (6), maka diperoleh premi tunggal asuransi jiwa berjangka sebagai berikut

$$A^{1}_{36:\overline{20|}} = \left(\frac{0{,}952381}{(95-36)}\right) \times (13{,}08532)$$

$$A^{1}_{36:\overline{20|}} = (0{,}016142) \times (13{,}08532)$$

$$A^{1}_{36:\overline{20|}} = 0{,}211223.$$

Dengan menggunakan persamaan (11) diperoleh nilai tunai anuitas hidup awal berjangka yaitu

$$\ddot{a}_{40:\overline{20|}} = 13{,}08532 + \left(\frac{(20 \times (0{,}952381)^{20}) - (0{,}952381 \times 13{,}08532)}{0{,}047619(95-36)}\right)$$

$$\ddot{a}_{40:\overline{20|}} = 13{,}08532 + \left(\frac{7{,}53779 - 12{,}46221}{2{,}809521}\right) = 11{,}33256.$$

Sehingga berdasarkan persamaan (14), diperoleh

$$P^{1}_{36:\overline{20|}} = R\frac{A^{1}_{36:\overline{20|}}}{\ddot{a}_{36:\overline{20|}}}$$

$$= (80.000.000)\left(\frac{0{,}211223}{11{,}33256}\right)$$

$$P^{1}_{36:\overline{20|}} = 1.491.087{,}627.$$

Jadi, besarnya premi tahunan yang harus dibayarkan oleh bu Emma setiap awal tahun adalah sebesar Rp 1.491.087,63.

Kemudian substitusikan hasil-hasil yang telah diperoleh ke persamaan (8), maka akan diperoleh sebagai berikut

$$A^{1}_{36+4:\overline{20-4|}} = \left(\frac{0{,}952381}{95-36-4}\right)(11{,}33256)$$

$$= \left(\frac{0{,}952381}{55}\right)(11{,}33256)$$

$$A^{1}_{36+4:\overline{20-4|}} = 0{,}19624.$$

Begitu juga untuk nilai tunai anuitas pada persamaan (12), dengan mensubstitusikan hasil yang telah diperoleh tersebut dapat ditentukan pula nilai tunai anuitas berikut

$$\ddot{a}_{36+4:\overline{20-4|}} = \left(\left(\frac{11{,}33256}{95-36-4}\right)(95-36)\right) - \left(\frac{4-(20)(0{,}95238)^{20-4} + (0{,}95238)(11{,}33256)}{0{,}047619(95-36-4)}\right)$$

$$\ddot{a}_{36+4:\overline{20-4|}} = 12{,}15678 - 2{,}149898$$

$$\ddot{a}_{36+4:\overline{20-4|}} = 10{,}006852\,.$$

Dengan demikian, dari persamaan (16) dapat ditentukan besarnya cadangan prospektif asuransi jiwa berjangka dengan hukum *De Moivre* sebagai berikut

$${}_4V^1_{36:\overline{20|}} = RA^1_{36+4:\overline{20-4|}} - P^1_{36:\overline{20|}}\ddot{a}_{36+4:\overline{20-4|}}$$

$${}_4V^1_{36:\overline{20|}} = (80.000.000)(0{,}19624) - (1.491.087{,}63)(10{,}006852)$$

$${}_4V^1_{36:\overline{20|}} = 778.106{,}77.$$

Jadi, perusahaan asuransi akan memperoleh dana cadangan sebesar Rp 778.106,77 untuk 4 tahun yang akan datang atau Rp 194.526,69/tahun dari seorang peserta asuransi yang berusia 36 tahun untuk setiap tahunnya.

4. KESIMPULAN

Besarnya cadangan prospektif yang harus disediakan perusahaan asuransi bergantung pada besarnya premi tahunan yang dibayarkan peserta asuransi kepada pihak perusahaan asuransi. Sementara premi tahunan bergantung pada umur peserta asuransi, besarnya uang pertanggungan dan tingkat bunga. Semakin tinggi umur peserta asuransi ketika memulai program asuransi, maka semakin besar premi yang harus dibayarkannya setiap awal tahunnya dan semakin besar pula cadangan prospektif yang akan diperoleh perusahaan asuransi. Selain itu, semakin tinggi perkiraan umur maksimalnya, maka akan semakin rendah premi yang harus dibayarkannya dan semakin rendah pula cadangan yang akan diperoleh.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Futami, T. 1993. *Matematika Asuransi Jiwa, Bagian 1*. Terj. dari *Seimei Hoken Sugaku, Jokan ("92 Revision)*, oleh Herliyanto, G. Penerbit Incorporated Foundation Oriental Life Insurance Cultural Development Center, Japan.

[2] Slud, Erick V. 2001. *Actuarial Mathematics and Life-Table Statistics*. University of Maryland, College Park.

[3] Finan, M. B. 2011. *A Reading of the Theory of Life Contingency Models : A Preparation for Exam MLC/3L.* Arkansas Tech University, Arkansas.

[4] Menge, W. O. & C. H Fischer. 1985 *The Mathematics of Life Insurance*. Ulrich's Books Inc, United State.