PERLUASAN METODE NEWTON DENGAN PENDEKATAN PARABOLIK

Abdul Rahman[1], **Supriadi Putra**[2], **Bustami**[2]

[1]Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2]Dosen JurusanMatematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293) Indonesia
* Abdrahman_mathunri07@yahoo.com

ABSTRACT

This article discusses the extension of Newton's method derived from the Taylor expansion, where the curve is approached by a tangent line of the parabola. Analytically, it is shown that the iterative method has the cubic order of convergence, so it is more effective than the Newton's method. Furthermore, computational results show that the iterative method is superior to the comparison methods in term of the number of iterations to obtain the estimated roots.

Keywords**:** *Newton's method, parabolic method, order of convergence.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas tentang perluasan metode Newton yang diperoleh dari ekspansi Taylor berorde dua, dimana kurva dihampiri oleh barisan parabola singgung yang digunakan untuk menemukan hampiran akar dari suatu persamaan nonlinear. Secara analitik metode iterasi ini mempunyai orde konvergen kubik, sehingga lebih efektif dari pada metode Newton. Selanjutnya hasil komputasi menunjukkan bahwa metode iterasi yang dibahas lebih unggul dari pada metode pembanding dari segi jumlah iterasi dari untuk mendapatkan akar hampiran.

Kata kunci**:** *Metode Newton, metode parabolik, orde konvergensi.*

1. PENDAHULUAN

Menyelesaikan suatu persamaan nonlinear adalah topik yang sangat penting di bidang analisis numerik. Pada kajian ini dibahas bagaimana menemukan akar dari persamaan nonlinear. Banyak metode numerik yang dapat digunakan dalam menyelesaikan persamaan nonlinear, salah satunya yaitu metode Newton. Metode Newton adalah salah satu metode iterasi yang paling sering digunakan dan cukup dikenal dalam mencari hampiran akar dari persamaan nonlinear, dan bentuk iterasinya dinyatakan oleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n = 0, 1, 2, \cdots,\ \text{dengan } f'(x_n) \neq 0.$$

Dalam perkembangannya metode Newton telah mengalami beberapa modifikasi. Tujuan terpenting dari semua modifikasi ini adalah untuk mempercepat kekonvergenan atau memperkecil tingkat kesalahan. Dalam artikel ini penulis mempelajari ulang dari artikel yang ditulis oleh Gordon dan Von Eschen [3] yang berjudul *"A Parabolic Extension Of Newton's Method"*.

2. METODE ITERASI BARU DENGAN PENDEKATAN PARABOLA

Dengan menggunakan ekspansi Taylor berorde orde untuk $f(x)$ di sekitar $x = x_n$. Misalkan α adalah akar dari persamaan nonlinear $f(x) = 0$, dimana

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + (x - x_0)^2 \frac{f''(x_n)}{2!}. \tag{1}$$

Karena $f(x) = 0$, maka persamaan (1) menjadi

$$0 = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + (x - x_0)^2 \frac{f''(x_n)}{2!}. \tag{2}$$

Misalkan diambil akar α dari $f(x)$ didekat akar sebenarnya, sebut saja x_1 penyelesaian untuk pencarian akar $(x_1 - x_0)$ dengan menggunakan formula kuadrat didapat

$$(x_1 - x_0) = \frac{-f'(x_0) \pm \sqrt{(f'(x_0))^2 - 4\frac{f''(x_0)}{2!} f(x_0)}}{2\frac{f''(x_0)}{2!}} \tag{3}$$

$$(x_1 - x_0) = \frac{-f'(x_0) \pm \sqrt{(f'(x_0))^2 - 2f''(x_0) f(x)}}{f''(x_0)} \tag{4}$$

$$x_1 = x_0 + \frac{-f'(x_0) \pm \sqrt{(f'(x_0))^2 - 2f''(x_0) f(x_0)}}{f''(x_0)} \quad . \tag{5}$$

Bila proses (5) diulang sebanyak n, maka barisan $\{x_n\}$ dapat ditulis

$$x_{n+1} = x_n + \frac{-f'(x_n) \pm \sqrt{(f'(x_n))^2 - 2f''(x_n) f(x_n)}}{f''(x_n)}. \tag{6}$$

Untuk merubah tanda $\pm$ pada persamaan (6) agar tidak menghasilkan dua nilai, maka dilakukan dengan membagi $\dfrac{-f'(x_n) \pm \sqrt{(f'(x_n))^2 - 2f''(x_n) f(x_n)}}{f''(x_n)}$ dengan $f'(x_n)$, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{-1 + \sqrt{1 - 2\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}}{\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}}. \tag{7}$$

Kemudian dilakukan perkalian rasionalisasi pembilang, maka didapatkan hasil sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{-1+\sqrt{1-2\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}}{\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}}\left(-\frac{-1+\sqrt{1-2\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}}{-1+\sqrt{1-2\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}}\right) \quad (8)$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{2\frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2}\left(-\frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}\right)}{1+\sqrt{1-2\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}} \quad (9)$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}{1+\sqrt{1-2\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}}, \quad (10)$$

dimana $f'(x_n) \neq 0$ dan $n = 0, 1, 2, ...$

Berikut adalah teorema yang membuktikan bahwa persamaan (10) memiliki orde kekonvergenan kubik.

Teorema 1 (Orde Konvergensi Metode Iterasi Baru) [1] Misalkan fungsi f, f' dan f'' yang kontinu dan α merupakan akar dari persamaan nonlinear. Jika tebakan awal cukup dekat ke α maka metode iterasi Baru konvergen kubik ke α. Maka persamaan (10) adalah berorde tiga, dan memenuhi persamaan error

Bukti. Dengan Misalkan α adalah akar dari fungsi $f(x) = 0$, maka $f(\alpha) = 0$. Asumsikan $f' \neq 0$, $f'' \neq 0$, dan $e_n = x_n - \alpha$. Dengan melakukan ekspansi Taylor untuk $f(x_n)$ di sekitar $x_n = \alpha$

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!}e_n^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}e_n^3 + O(e_n^4).(8)$$

Karena $f(\alpha) = 0$, maka dengan melakukan manipulasi aljabar pada persamaan (8) diperoleh

$$f(x_n) = f'(\alpha)e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!}e_n^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}e_n^3 + O(e_n^4). \quad (9)$$

Selanjutnya dengan memfaktorkan $f'(\alpha)$ dari persamaan (9), maka diperoleh

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left(e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!\,f'(\alpha)}e_n^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!\,f'(\alpha)}e_n^3 + \frac{O(e_n^4)}{f'(\alpha)}\right). \quad (10)$$

Untuk menyederhanakan notasi misalkan $C_j = \frac{1}{j!}\frac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$ untuk j = 2, 3. Sehingga persamaan (10) menjadi

$$f(x_n) = f'(\alpha)(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)). \qquad (11)$$

Dengan cara yang sama, untuk nilai $f'(x_n)$ dan $f''(x_n)$ diperoleh

$$f'(x_n) = f'(\alpha)(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + O(e_n^4)) \qquad (12)$$

dan

$$f''(x_n) = f'(\alpha)(2c_2 + 6c_3e_n + 12c_4e_n^2 + 20c_5e_n^3 + O(e_n^4)). \qquad (13)$$

Kemudian persamaan (11) bagi persamaan (12) menggunakan persamaan deret geometri didapat

$$2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = 2e_n - 2c_2e_n^2 + O(e_n^3) \qquad (14)$$

Persamaan (12) dikuadratkan, sehingga diperoleh

$$(f'(x_n))^2 = f'(\alpha)^2(1 + 4c_2e_n + (6c_3 + 4c_2^2)e_n^2 + (8c_4 + 12c_2c_3)e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (15)$$

Dengan mengalikan persamaan (11) dengan persamaan (13) diperoleh

$$2f(x_n)f''(x_n) = f'(\alpha)^2(4c_2e_n + (12c_3 + 2c_2^2)e_n^2 + (16c_2c_3 + 24c_4)e_n^3 + O(e_n^4)) \qquad (16)$$

Jika persamaan (16) bagi persamaan (15) menggunakan persamaaan deret geometri, sehingga diperoleh

$$\frac{2f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2} = 4c_2e_n + (-28c_2^2 + 12c_3)e_n^2 + (24c_4 - 192c_2^3 - 128c_2c_3)e_n^3 + O(e_n^4). \qquad (17)$$

Dengan menggunakan identitas $(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + ...,$ dan dengan mengambil suku sampai x^2, maka hasil dari $\left(1 - \frac{2f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}\right)$ adalah

$$1 - \frac{2f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2} = 1 + 4c_2e_n + (-28c_2^2 + 12c_3)e_n^2 + (24c_4 - 192c_2^3 - 128c_2c_3)e_n^3 + O(e_n^4). \qquad (18)$$

Selanjutnya persamaan (18) diaproksimasi dengan menggunakan persamaan deret geometri, sehingga diperoleh

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{2f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = 1 + 2c_2e_n + (63c_3)e_n^2 + (8c_2c_3 - 8c_2^3 + 12c_4)e_n^3 + O(e_n^4). \qquad (19)$$

Kemudian persamaan (14) dikali persamaan (19), didapat

$$2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.\frac{1}{\left(1-2\frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = 2e_n + 2c_2e_n^2 + (-4c_2^2 + 12c_2) + O(e_n^4). \quad (20)$$

Selanjutnya persamaan (20) disubstitusikan ke persamaan (5) dan persamaan (6), sehingga diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - (-4c_2^2 + 12c_2)e_n^3 + O(e_n^4). \quad (21)$$

Karena $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$, maka persamaan (21) menjadi

$$e_{n+1} + \alpha = \alpha - (-4c_2^2 + 12c_2)e_n^3 + O(e_n^4). \quad (22)$$

Dengan mengurangkan kedua ruas persamaan (22) dengan α, sehingga diperoleh

$$e_{n+1} = -\left(-4c_2^2 + 12c_3\right)e_n^3 + O(e_n^4). \quad (23)$$

Persamaan (23) merupakan persamaan tingkat kesalahan dari metode iterasi baru ■

3. KOMPUTASI NUMERIK

Dilakukan uji komputasi untuk melihat kekonvergenan dan membandingkan jumlah iterasi pada metode Newton, metode Halley [4] dan metode Parabolik. Perbandingan dilakukan dengan menggunakan program Maple. Fungsi nonlinear yang digunakan untuk uji komputasinya adalah

1. $f_1(x) = \sin(x^2 - 10)$
2. $f_2(x) = x^3 - 10$
3. $f_3(x) = x^3 - 2x + 10$

Kriteria pemberhentian komputasi yaitu apabila $|x_{n+1} - x_n|$ atau $|f(x_n)|$ lebih kecil dari pada toleransi atau maksimum iterasi yang diberikan telah terlewati. Toleransi yang diberikan yaitu sebesar 10^{-17}, sedangkan iterasi maksimum adalah sebanyak 100 kali.

Tabel 1. Perbandingan Komputasi Metode Newton, Metode Halley dan Metode Parabolik

$f_i(x)$	Tebakan awal	Jumlah Iterasi		
		Newton	Halley	Parabolik
f_1	1.5	5	4	3
f_2	0.4	13	7	6
f_3	1.5	7	5	4

Secara umum Tabel 1 memberikan hasil bahwa, metode Parabolik dengan orde kekonvergenan kubik menemukan akar hampiran dan jumlah iterasinya lebih sedikit dibandingkan dengan metode Newton dan metode Halley.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dikemukakan sebelumnya, maka diperoleh kesimpulan bahwa untuk memperoleh metode iterasi baru dilakukan modifikasi metode Newton dengan menggunakan ekspansi Taylor sehingga menghasilkan metode iterasi Baru yang memiliki orde konvergensi tiga.

Berdasarkan contoh komputasi dapat diambil kesimpulan secara umum bahwa metode Parabolik dengan orde kekonvergenan kubik menemukan akar hampiran dan jumlah iterasinya lebih sedikit dibandingkan dengan metode Newton dan metode Halley.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bartle, R. G & Donald, R.S. 2000. *Introduction to Real Analisis, Third Edition*. John Willy and Sons. New York.

[2] Cheney, W. & D. Kincaid. 1994. *Numerical Mathematics and Computer Third ed.* Brooks / Cole Publishing Company. New jersey

[3] Gordon S P. & Von Eschen E. R. 2001. A Parabolic Extension Of Newton's Method. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 4: 519 - 525.

[4] Wait, R. 1979. *The Numerical Solution of Algebraic Equation*. A Wiley-Interscience Publication, Chichester.