MODIFIKASI METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN GELOMBANG NONLINEAR

Widiya Fitrina Sari[1*], Leli Deswita[2], Endang Lily[2]

[1]Mahasiswa Program S1 Matematika
[2]Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru, 28293, Indonesia

[*]widiya_unri@yahoo.com

ABSTRACT

This article discusses the modification of Adomian decomposition method to solve a nonlinear wave equation. Some numerical examples are used to show the effectiveness of the method. The numerical result show that the solution obtained through the modification of Adomian decomposition method is better than the solutions obtained using Adomian decomposition method.

Keywords : *Adomian decomposition method, modification Adomian decomposition method, nonlinear wave equation.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas modifikasi metode dekomposisi Adomian untuk menyelesaikan persamaan gelombang nonlinear. Untuk melihat keefektifitasan metode digunakan beberapa contoh numerik. Hasil numerik menunjukkan solusi yang diperoleh melalui modifikasi metode dekomposisi Adomian lebih baik dari solusi yang diperoleh menggunakan metode dekomposisi Adomian.

Kata kunci : *metode dekomposisi Adomian, modifikasi metode dekomposisi Adomian, persamaan gelombang nonlinear.*

1. PENDAHULUAN

Perhatikan persamaan gelombang nonlinear orde satu

$$F(x,t,u,u_x,u_t) = u_t + u_x^2 = \phi(x,t), \tag{1}$$

dengan syarat awal

$$u(x,0) = f(x).$$

Bentuk umum dari persamaan (1) adalah $u_t + cu_x = 0$, dimana c adalah konstan atau c fungsi terhadap x dan t [5]. Metode numerik yang digunakan menyelesaikan persamaan (1) adalah metode dekomposisi Adomian. Metode dekomposisi Adomian menyajikan solusi dari persamaan diferensial dalam bentuk deret [3]. Penggunaan metode dekomposisi Adomian untuk menyelesaikan persamaan (1) masih belum terlihat sederhana, sehingga metode dekomposisi Adomian perlu dimodifikasi agar dapat diperoleh solusi yang lebih baik.

Pada artikel di bagian 2 dibahas metode dekomposisi Adomian yang merupakan review dari artikel D. Kaya [2], selanjutnya pada bagian 3 dibahas mengenai penerapan metode dekomposisi Adomian pada persamaan gelombang nonlinear, kemudian pada bagian 4 dibahas modifikasi metode dekomposisi Adomian [1,4], dan pada bagian terakhir diberikan beberapa contoh numerik untuk permasalahan ini.

2. METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN

Misalkan persamaan

$$F\,u = g(t), \tag{2}$$

dimana operator diferensial F memuat bentuk linear dan nonlinear. Metode dekomposisi Adomian menguraikan bagian linear dari F menjadi $L + R$ dengan L adalah operator linear dan R adalah sisa operator linear, sedangkan bentuk nonlinear dari F dimisalkan N, sehingga persamaan (2) menjadi

$$Lu = g - Ru - Nu. \tag{3}$$

Karena L adalah operator linear, maka L dapat ditentukan inversnya yaitu L^{-1}. Untuk $L = \dfrac{d}{dt}$ dan $L^{-1} = \int_0^t (.)dt$. Kemudian, dengan menerapkan L^{-1} pada kedua ruas persamaan (3) sehingga diperoleh

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}\,Nu. \tag{4}$$

Jadi ruas kiri persamaan (4) dapat dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} L^{-1}Lu &= \int_0^t Lu\,dt \\ &= u(t) - u(0). \end{aligned} \tag{5}$$

Kemudian substitusikan persamaan (5) ke persamaan (4), diperoleh

$$u(t) - u(0) = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu. \tag{6}$$

Persamaan (6) dapat ditulis dalam bentuk

$$u = u(0) + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu. \tag{7}$$

Jika pada persamaan (7) diasumsikan $u_0 = u(0) + L^{-1}g$, maka diperoleh

$$u = u_0 - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu. \tag{8}$$

Selanjutnya pada persamaan (8) diterapkan metode dekomposisi Adomian, yang mengasumsikan solusi *u* dalam bentuk deret sebagai berikut

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \ . \tag{9}$$

Bentuk nonlinear *Nu* dinyatakan dalam suatu polinomial khusus

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \ , \tag{10}$$

dengan A_n adalah polinomial Adomian nonlinear yang nilainya tergantung pada $u_0, u \ ,\ldots, u_n$ dan A_n dapat didefinisikan dengan

$$A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} \quad , \qquad n = 0,1,2,3,\ldots \tag{11}$$

dengan λ adalah suatu parameter. Jadi dengan menggunakan persamaan (11) A_n dapat diuraikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
A_0 &= N(u_0), \\
A_1 &= u_1 \frac{d}{du_0} N(u_0), \\
A_2 &= u_2 \frac{d}{du_0} N(u_0) + \frac{u_1^2}{2!}\frac{d^2}{du_0} N(u_0), \\
A_3 &= u_3 \frac{d}{du_0} N(u_0) + u_1 u_2 \frac{d^2}{du_0^2} N(u_0) + \frac{u_1^3}{3!}\frac{d^3}{du_0^3} N(u_0), \\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}$$

Berdasarkan uraian A_n , diperoleh A_0 bergantung pada u_0, A_1 bergantung pada u_0 dan u_1, A_2 bergantung pada u_0, u_1 dan u_2, dan seterusnya. Selanjutnya substitusikan persamaan (9) dan persamaan (10) ke persamaan (8), diperoleh solusi dari *u* sebagai berikut

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1}R\sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n . \tag{12}$$

Berdasarkan persamaan (12) diperoleh relasi rekursif sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
u_1 &= -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0, \\
u_2 &= -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1, \\
u_3 &= -L^{-1}Ru_2 - L^{-1}A_2, \\
\vdots &= \vdots \\
u_{n+1} &= -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n.
\end{aligned}$$

3. PENERAPAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN PADA PERSAMAAN GELOMBANG NONLINEAR

Pandang persamaan (1). Karena yang akan dicari $u(x,t)$, nyatakan operator $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$ dan $Nu = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ dengan $L_t^{-1} = \int_0^t (.)dt$

$$L_t u(x,t) = \phi(x,t) - Nu. \tag{13}$$

Selanjutnya jika operator L_t^{-1} diterapkan pada kedua ruas persamaan (13), maka diperoleh

$$L_t^{-1} L_t u(x,t) = L_t^{-1}(\phi(x,t)) - L_t^{-1}(Nu),$$

sehingga

$$u(x,t) = u(x,0) + L_t^{-1}(\phi(x,t)) - L_t^{-1}(Nu), \tag{14}$$

karena $u(x,0) = f(x)$ maka persamaan (14) menjadi

$$u(x,t) = f(x) + L_t^{-1}(\phi(x,t)) - L_t^{-1}(Nu). \tag{15}$$

Metode dekomposisi adomian menguraikan solusi $u(x,t)$ kedalam bentuk deret

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + \cdots + u_n(x,t) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t). \tag{16}$$

Sedangkan suku nonlinear $Nu = (u_x)^2$ dinyatakan dalam polinomial Adomian A_n yaitu

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \tag{17}$$

dengan A_n merupakan suku-suku polinomial Adomian dan A_n dapat diuraikan sebagai berikut,

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= (u_{0_x})^2, \\ A_1 &= 2u_{0_x} u_{1_x}, \\ A_2 &= u_{1_x}^2 + 2u_{0_x} u_{2_x}, \\ A_3 &= 2u_{1_x} u_{2_x} + 2u_{0_x} u_{3_x}, \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Substitusikan persamaan (16) dan persamaan (17) ke persamaan(15) sehingga diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = f(x) + L_t^{-1}(\phi(x,t)) - L_t^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x,t)\right). \tag{19}$$

Berdasarkan persamaan (19), diperoleh relasi rekursif sebagai berikut:

$$\left.\begin{aligned} u_0(x,t) &= f(x) + L_t^{-1}(\phi(x,t)), \\ u_1(x,t) &= -L_t^{-1}(A_0(x,t)), \\ u_2(x,t) &= -L_t^{-1}(A_1(x,t)), \\ \vdots \quad &= \quad \vdots \\ u_{n+1}(x,t) &= -L_t^{-1}(A_n(x,t)), \quad n \geq 0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

4. MODIFIKASI METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN

Metode dekomposisi Adomian dimodifikasi agar dapat mempercepat solusi konvergensi dan memperoleh solusi yang tepat. Modifikasi metode dekomposisi Adomian memperkenalkan sedikit variasi ke relasi rekursif (20) yang mengarahkan pada penentuan komponen $u(x,t)$ dengan cara lebih cepat dan lebih mudah. Pada metode dekomposisi Adomian diperoleh relasi rekursif (20)

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= f(x) + L_t^{-1}(\phi(x,t)), \\ u_1(x,t) &= -L_t^{-1}(A_0(x,t)), \\ u_2(x,t) &= -L_t^{-1}(A_1(x,t)), \\ \vdots \quad &= \quad \vdots \\ u_{n+1}(x,t) &= -L_t^{-1}(A_n(x,t)), \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Modifikasi metode dekomposisi Adomian dibentuk dengan mengasumsikan $u_0(x,t)$ pada persamaan (20) menjadi

$$g(x) = f(x) + L_t^{-1}(\phi(x,t)).$$

Misalkan

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x). \tag{21}$$

Persamaan (21) akan dilakukan perubahan pembentukan relasi rekursif pada persamaan (20). Untuk mengurangi perhitungan, identifikasi komponen u_0 dari satu bagian $g(x)$ yaitu $g_1(x)$ atau $g_2(x)$. Bagian lain dari $g(x)$ dapat ditambahkan ke komponen u_1. dengan kata lain, identifikasi relasi rekursif dimodifikasi dengan

$$\left.\begin{aligned} u_0(x,t) &= g_1(x), \\ u_1(x,t) &= g_2(x) - L_t^{-1}(A_0(x,t)),. \\ u_2(x,t) &= -L_t^{-1}(A_1(x,t)), \\ \vdots \quad &= \quad \vdots \\ u_{k+1}(x,t) &= -L_t^{-1}(A_k(x,t)), \quad k \geq 0. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Jika diasumsikan $g_1(x) = f(x)$ dan $g_2(x) = L_t^{-1}(\phi(x,t))$ maka relasi rekursif dari persamaan (22) menjadi

$$\left.\begin{aligned} u_0(x,t) &= f(x), \\ u_1(x,t) &= L_t^{-1}(\phi(x,t)) - L_t^{-1}(A_0(x,t)), \\ u_2(x,t) &= -L_t^{-1}(A_1(x,t)), \\ \vdots \quad &= \quad \vdots \\ u_{k+1}(x,t) &= -L_t^{-1}(A_k(x,t)), \quad k \geq 0. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

5. CONTOH NUMERIK

Contoh 1 Diberikan persamaan dalam bentuk

$$u_t + u_x^2 = 1 + 4x^2, \qquad u(x,0) = x^2, \tag{24}$$

dengan solusi eksak $u(x,t) = x^2 + t.$

Penyelesaian :
Metode dekomposisi Adomian

Dari persamaan (24) diketahui $f(x) = x^2$ dan $\phi(x,t) = 1 + 4x^2$. Dengan menerapkan rumus polinomial Adomian (18) diperoleh relasi rekursif untuk u_n

$$u_0 = f(x) + L_t^{-1}(\phi(x,t)) = x^2 + t + 4x^2 t.$$

$$u_1 = -L_t^{-1}(A_0) = -\int_0^t \left[(u_{0_x})^2\right] dt = -4x^2 t - 16x^2 t^2 - \frac{64}{3} x^2 t^3.$$

$$u_2 = -L_t^{-1}(A_1) = -\int_0^t \left[2u_{0_x} u_{1_x}\right] dt = 16x^2 t^2 + \frac{256}{3} x^2 t^3 + \frac{512}{3} x^2 t^4 + \frac{2048}{15} x^2 t^5.$$

dan seterusnya.

Jadi, dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian diperoleh solusi untuk $u(x,t)$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_o + u_1 + u_2 + \cdots \\ &= x^2 + t + 4x^2 t + -4x^2 t - 16x^2 t^2 - \frac{64}{3} x^2 t^3 + 16x^2 t^2 + \frac{256}{3} x^2 t^3 \\ &\quad + \frac{512}{3} x^2 t^4 + \frac{2048}{15} x^2 t^5 + \cdots \end{aligned}$$

Modifikasi metode dekomposisi Adomian

Relasi rekursif untuk u_n dilakukan dengan menggunakan relasi rekursif modifikasi metode dekomposisi adomian pada persamaan (23)

$$u_0 = f(x) = x^2.$$

$$u_1 = L_t^{-1}(\phi(x,t)) - L_t^{-1}(A_0) = \int_0^t (1+4x^2 t)dt - \int_0^t \left[(u_{0_x})^2\right]dt = t.$$

$$u_2 = -L_t^{-1}(A_1) = -\int_0^t \left[(2u_{0_x} u_{1_x})^2\right]dt = 0.$$

Jadi, dengan menggunakan modifikasi metode dekomposisi Adomian diperoleh solusi untuk $u(x,t)$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_o + u_1 + u_2 \\ &= x^2 + t + 0 \\ &= x^2 + t. \end{aligned}$$

Contoh 2 Diberikan persamaan dalam bentuk

$$u_t + u_x^2 = 1 + \cosh^2 x, \qquad u(x,0) = \sinh x, \tag{25}$$

dengan solusi eksak $u(x,t) = \sinh x + t$.

Penyelesaian :

Metode dekomposisi Adomian

Dari persamaan (25) diketahui $f(x) = \sinh x$ dan $\phi(x,t) = 1 + \cosh^2 x$, dengan menerapkan rumus polinomial Adomian (18) diperoleh relasi rekursif untuk u_n

$$u_0 = \sinh x + t + t\cosh^2 x.$$

$$\begin{aligned} u_1 &= -L_t^{-1}(A_0) = -L_t^{-1}\left[(u_{0_x})^2\right] \\ &= -t\cosh^2 x - 2t^2 \cosh^2 x \sinh x - \frac{4}{3}t^3 \cosh^2 x \sinh^2 x. \end{aligned}$$

dan seterusnya.

Jadi, dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian diperoleh solusi untuk $u(x,t)$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_o + u_1 + \cdots \\ &= \sinh x + t + t\cosh^2 x - t\cosh^2 x - 2t^2\cosh^2 x \sinh x \\ &\quad - \frac{4}{3}t^3 \cosh^2 x \sinh^2 x + \cdots \end{aligned}$$

Modifikasi metode dekomposisi Adomian

Relasi rekursif untuk u_n dilakukan dengan menggunakan relasi rekursif modifikasi metode dekomposisi adomian pada persamaan (23) sebagai berikut

$$u_0 = \sinh x.$$

$$u_1 = L_t^{-1}(\phi(x,t)) - L_t^{-1}(A_0) = \quad = \int_0^t [(\phi(x,t)] - \int_0^t [(u_{0_x})^2] = t.$$

$$u_2 = -L_t^{-1}(A_1) = -\int_0^t [2u_{0_x} u_{1_x}] dt \qquad = 0.$$

Jadi, dengan menggunakan modifikasi metode dekomposisi Adomian diperoleh solusi untuk $u(x,t)$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_0 + u_1 + u_2 \\ &= \sinh x + t + 0 \\ &= \sinh x + t. \end{aligned}$$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Wazwaz, A. M. 2009. *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory.* Springer. New York.

[2] Kaya, D. 1998. A New Approach to Solve a Nonlinear Wave Equation. *bull. Malaysian. Math. Soc. (Second Series)*: 95-100.

[3] Adomian, G. 1994. *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*. Kluwer, Boston.

[4] Almazmumy, M., Hendi, F. A., Bakodah, H. O. and H. Alzumi. 2012. Recent Modifications of Adomian Decomposition Method for Initial Value Problem in Ordinary Differential Equations**.** *American Journal of Computational Mathematics, Vol* 2 : 228-234.

[5] Sachdev, P. L. 2000. *Self Similarity and Beyond Exact Solutions of Nonlinear Problems.* Chapman and Hall. New York.