METODE ITERASI TIGA LANGKAH DENGAN ORDE KONVERGENSI LIMA UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN NONLINEAR BERAKAR GANDA

Zuhnia Lega[1*], Agusni[2], Supriadi Putra[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Laboratorium Matematika Terapan, Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*zuhnial@gmail.com

ABSTRACT

This article discusses the three-step iterative method free from derivatives, modified from Newton's three-step method that contains two derivatives, to find a multiple root of a nonlinear equation with unknown multiplicity. This iterative method has fifth order of convergence and for each iteration, it requires four function evaluations, so the efficiency index of the method is 1.495. Furthermore, the computational test shows that the discussed method is better than the comparison method when the success of this method is seen in getting estimated roots.

Keywords: *Nonlinear equation, multiple roots, three steps iterative method, forward difference, divided difference, multiplicity, order of convergence.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas metode iterasi tiga langkah tanpa melibatkan turunan yang dimodifikasi dari metode Newton tiga langkah yang memuat dua turunan untuk menemukan persamaan nonlinear berakar ganda dengan multiplisitas yang tidak diketahui. Metode iterasi ini mempunyai orde konvergensi lima dan untuk setiap iterasinya memerlukan empat perhitungan fungsi, sehingga indek efisiensinya adalah 1.495. Selanjutnya dari uji komputasi terlihat bahwa metode iterasi yang didiskusikan lebih baik dari metode pembanding apabila keberhasilan metode ini dilihat dalam mendapatkan akar taksiran.

Kata kunci: *Persamaan nonlinear, akar ganda, metode iterasi tiga langkah, beda maju, beda terbagi, multiplisitas, orde konvergensi.*

1. PENDAHULUAN

Banyak metode numerik yang dapat digunakan untuk mencari solusi dari persamaan nonlinear, salah satu diantaranya yang paling sering digunakan adalah Metode Newton. Dalam artikel ini dimodifikasi metode iterasi Newton tiga langkah untuk menyelesaikan persamaan nonlinear berakar ganda dengan multiplisitas (m) tidak diketahui. Untuk kasus seperti ini, Traub [6, h. 235] menggunakan sebuah transformasi sederhana

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{f_0(x)}{f_0'(x)}, & \text{jika } f_0(x) \neq 0, \\ 0, & \text{jika } f_0(x) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Dalam kasus ini penyelesaian akar ganda dari $f_0(x)$ direduksi menjadi peyelesaian akar sederhana dari $f(x)$, dan oleh sebab itu metode iterasi manapun dapat digunakan untuk mempertahankan orde konvergensi aslinya. Selanjutnya untuk menghindari evaluasi turunan pada persamaan (1), King [2] menggunakan bentuk transformasi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-f_0^2(x)}{f_0(x-f_0(x))-f_0(x)}, & \text{jika } f_0(x) \neq 0, \\ 0, & \text{jika } f_0(x) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

dan menggunakan metode iterasi Secant

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{(x_{n-1} - x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}, \; n = 1, 2, 3, \cdots . \tag{3}$$

Selanjutnya Wu dan Fu [8] menggunakan transformasi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(f_0(x))^2}{f_0(x)-f_0(x-f_0(x))}, & \text{jika } f_0(x) \neq 0, \\ 0, & \text{jika } f_0(x) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Bentuk iterasi yang digunakan adalah

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f^2(x_n)}{\mu \cdot f^2(x_n) + f(x_n) - f(x_n - f(x_n))}, \tag{5}$$

dimana parameter $\mu \in R$, $|\mu| < \infty$.
Parida dan Gupta [4] menggunakan bentuk iterasi yang sama dengan Wu dan Fu, namun menyarankan transformasi lain sebagai berikut

$$f(x) = \begin{cases} \frac{f_0(x)^2}{\delta+f_0(x+f_0(x))-f_0(x)}, & \text{jika } f_0(x) \neq 0, \\ 0, & \text{jika } f_0(x) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

dimana $\delta = sign(f_0(x + f_0(x))f_0^2(x))$.

Dalam artikel ini pada bagian kedua akan dibahas metode iterasi tiga langkah untuk menyelesaikan persamaan nonlinear berakar ganda dimana multiplisitas (m) tidak diketahui yang merupakan *review* dari artikel Xiaowu Li, Chunlai Mu, Jinwen

Ma, dan Linke Hou [3], dengan judul *"Fifth-Order Iterative Method for Finding Multiple Roots of Nonlinear Equations"*. Selanjutnya di bagian tiga dan empat melakukan analisa kekonvergenan dan uji komputasi.

2. METODE ITERASI TIGA LANGKAH DENGAN ORDE KONVERGENSI LIMA UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN NONLINEAR BERAKAR GANDA

Pada bagian ini diberikan beberapa definisi dasar untuk pembahasan selanjutnya, kemudian dilanjutkan dengan proses terbentuknya beberapa metode iterasi baru.

Definisi 1 (Orde Konvergensi) [5]
Misalkan barisan bilangan real $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergen ke x^* dan nyatakan $e_n = x_n - x^*$ untuk $n \geq 0$. Jika terdapat konstanta positif $p > 0$, sehingga

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} = C \neq 0,$$

maka barisan tersebut dikatakan konvergen ke x^* dengan orde konvergensi p. Konstanta C disebut konstanta kesalahan asimtotik (*asymptotic error constant*). Jika $p = 1,\ 2$ dan $1 < p < 2$, maka orde konvergensi dengan barisan bilangan real berturut-turut dikenal dengan istilah *linear*, *kuadratik*, dan *superlinear*.

Definisi 2 (Persamaan Tingkat Kesalahan) [5]
Apabila notasi $e_n = x_n - x^*$ merupakan notasi untuk nilai tingkat kesalahan pada iterasi ke-n, maka

$$e_{n+1} = Ce_n^p + O(e_n^{p+1})$$

disebut sebagai persamaan tingkat kesalahan, dengan nilai p menunjukan orde konvergensinya.

Secara komputasi, orde konvergensi juga dapat dihitung dengan menggunakan definisi COC (*Computational Order of Convergence*) berikut.

Definisi 3 (COC) [7]
Misalkan x^* adalah akar dari suatu persamaan nonlinear $f(x) = 0$, dan x_{n-1}, x_n, x_{n+1} adalah tiga iterasi berturut-turut yang cukup dekat ke akar x^*. Orde konvergensi secara komputasi COC dapat diaproksimasikan dengan rumus

$$\text{COC} \approx \frac{\ln|(x_{n+1} - x^*)/(x_n - x^*)|}{\ln|(x_n - x^*)/(x_{n-1} - x^*)|}.$$

Definisi 4 (Multiplisitas) [1, h. 94]
Akar x^* dari $f(x)$ dikatakan mempunyai multiplisitas (m) jika

$$f(x) = (x - x^*)^m h(x)$$

untuk $h(x)$ fungsi kontinu dengan $h(x^*) \neq 0$, dan m bilangan bulat positif.

2.1 Metode Iterasi untuk Mencari Akar Ganda

Metode iterasi untuk mencari akar ganda diperoleh dengan memodifikasi metode Newton tiga langkah sebagai berikut

$$\left.\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots . \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Turunan $f'(x_n)$ pada persamaan (7) ditaksir dengan menggunakan pendekatan beda maju (*forward difference*) sebagai berikut

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n + h) - f(x_n)}{h},$$

dengan $h = f(x_n)$, sehingga

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}{f(x_n)} = g(x_n). \tag{8}$$

Sedangkan turunan $f'(z_n)$ pada persamaan (7) dapat ditaksir dengan

$$\begin{aligned} f'(z_n) &= \frac{f(z_n) - f(y_n)}{z_n - y_n} + \frac{\dfrac{f(z_n) - f(x_n)}{z_n - x_n} - f'(x_n)}{z_n - x_n}(z_n - y_n) \\ f'(z_n) &= f[z_n, y_n] + f[z_n, x_n, x_n](z_n - y_n) = F(x_n, y_n, z_n). \end{aligned} \tag{9}$$

Dengan menggunakan persamaan (8) dan (9) maka persamaan (7) dapat ditulis menjadi

$$\left.\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{g(x_n)}, \\ z_n &= y_n - \frac{f(y_n)}{g(x_n)}, \\ x_{n+1} &= z_n - \frac{f(z_n)}{F(x_n, y_n, z_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots . \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Persamaan (10) disebut metode iterasi tiga langkah untuk menyelesaikan persamaan nonlinear berakar ganda (MIOL) untuk kasus multiplisitas (m) tidak diketahui. Penyelesaian akar ganda dari $f_0(x) = 0$ yang diberikan akan ditransformasi ke dalam penyelesaian akar sederhana $f(x) = 0$. Transformasi yang digunakan adalah persamaan (1).

2.2 Mencari Multiplisitas

Berdasarkan Definisi 4, $f_0(x)$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$f_0(x) = (x - x^*)^m h(x), \tag{11}$$

dan turunan persamaan (11) terhadap x adalah

$$f_0'(x) = m(x - x^*)^{(m-1)}h(x) + (x - x^*)^m h'(x). \tag{12}$$

Persamaan (11) dibagi dengan persamaan (12), dimana $e_n = x_n - x^*$ sehingga diperoleh

$$f(x_n) = \frac{e_n h(x_n)}{mh(x_n) + e_n h'(x_n)}. \tag{13}$$

Karena e_n bernilai sangat kecil, maka persamaan (13) dapat diaproksimasikan menjadi

$$f(x_n) \approx \frac{e_n h(x_n)}{mh(x_n)},$$

sehingga diperoleh $f(x_n) \approx \frac{e_n}{m}$. Dengan cara yang sama diperoleh $f(x_{n+1}) \approx \frac{e_{n+1}}{m}$, sehingga multiplisitasnya dapat ditaksir dengan menghitung

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) - f(x_n) &\approx \frac{x_{n+1} - x_n}{m} \\ m &\approx \frac{x_{n+1} - x_n}{f(x_{n+1}) - f(x_n)}. \end{aligned}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan metode iterasi tiga langkah pada persamaan (10) memiliki orde konvergensi lima.

3. ANALISA KEKONVERGENAN

Teorema 5 Misalkan fungsi $f : D \to R$ mempunyai sebuah akar sederhana $x^* \subseteq D$, dimana D interval buka. Jika x_0 cukup dekat dengan x^*, maka metode iterasi tiga langkah pada persamaan (10) memiliki orde konvergensi lima.

Bukti: Dengan menggunakan Definisi 4 maka $f_0(x)$ bisa dituliskan menjadi

$$f_0(x) = (x - x^*)^m h(x). \tag{14}$$

Turunan pertama dari persamaan (14) terhadap x adalah

$$f_0'(x) = m(x - x^*)^{(m-1)}h(x) + (x - x^*)^m h'(x). \tag{15}$$

Berdasarkan transformasi yang ditunjukkan oleh persamaan (1), maka dengan membagi persamaan (14) dan (15) diperoleh

$$\frac{f_0(x)}{f_0'(x)} = \frac{(x - x^*)h(x)}{mh(x) + (x - x^*)h'(x)}. \tag{16}$$

Dari persamaan (16), persoalan menghitung akar ganda dari $f_0(x) = 0$ direduksi menjadi persoalan menghitung akar sederhana dari $f(x) = 0$.

Kemudian dilakukan ekspansi Taylor untuk $h(x_n)$ disekitar $x_n = x^*$ sampai orde lima dan mengabaikan orde yang lebih tinggi diperoleh

$$h(x_n) = h(x^*)(1 + b_1 e_n + b_2 e_n^2 + b_3 e_n^3 + b_4 e_n^4 + b_5 e_n^5) + O(e_n^6), \tag{17}$$

dengan

$$b_k = \frac{h^{(k)}(x^*)}{k! h(x^*)}, \quad k = 1, 2, 3 \cdots .$$

Selanjutnya dilakukan ekspansi Taylor untuk $h'(x_n)$ disekitar $x_n = x^*$, setelah disederhanakan diperoleh

$$h'(x_n) = h(x^*)(b_1 + 2b_2 e_n + 3b_3 e_n^2 + 4b_4 e_n^3 + 5b_5 e_n^4) + O(e_n^5). \tag{18}$$

Substitusikan persamaan (17) dan (18) ke persamaan (16), kemudian bagi kedua ruas dengan m diperoleh

$$f(x_n) = \frac{e_n(1 + b_1 e_n + b_2 e_n^2 + b_3 e_n^3 + b_4 e_n^4 + b_5 e_n^5) + O(e_n^6)}{(m + mb_1 e_n + mb_2 e_n^2 + \cdots + 4b_4 e_n^4 + 5b_5 e_n^5) + O(e_n^6)}$$

$$f(x_n) = \frac{\dfrac{e_n}{m} + \dfrac{b_1 e_n^2}{m} + \dfrac{b_2 e_n^3}{m} + \dfrac{b_3 e_n^4}{m} + \dfrac{b_4 e_n^5}{m} + \dfrac{b_5 e_n^6}{m} + O(e_n^6)}{1 + \dfrac{(mb_1 + b_1)e_n}{m} + \cdots + \dfrac{(mb_5 + 5b_5)e_n^5}{m} + O(e_n^6)}. \tag{19}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (19) digunakan identitas geometri sebagai berikut

$$\frac{1}{1+r} = 1 - r + r^2 - r^3 + \cdots + o(e_n^n).$$

dengan

$$r = \frac{(mb_1 + b_1)e_n}{m} + \frac{(mb_2 + 2b_2)e_n^2}{m} + \frac{(mb_4 + 4b_4)e_n^4}{m} + \frac{(mb_3 + 3b_3)e_n^3}{m} + \frac{(mb_5 + 5b_5)e_n^5}{m} + O(e_n^6),$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+r} = 1 &+ \left(\frac{-b_1}{m} - b_1\right)e_n + \left(\frac{-2b_2}{m} + \frac{2b_1^2}{m} + b_1^2 - b_2 + \frac{b_1^2}{m^2}\right)e_n^2 + \cdots \\ &+ \left(-b_1^3 - \cdots + \frac{6b_2 b_1}{m}\right)e_n^3 + \left(\frac{4b_2^2}{m^2} + \cdots + \frac{4b_1^4}{m^3}\right) + e_n^4 \\ &+ \left(2b_3 b_2 - \cdots + \frac{8b_2 b_1^3}{m^4}\right)e_n^5 + O(e_n^6). \end{aligned} \tag{20}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (20) ke persamaan (19) diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_n) = \frac{e_n}{m} &- \frac{b_1 e_n^2}{m^2} + \left(\frac{b_1^2}{m^2} + \frac{b_1^2}{m^3} - \frac{2b_2}{m^2}\right)e_n^3 + \left(-\frac{3b_2 b_1}{m^2} - \cdots - \frac{b_1^3}{m^4}\right)e_n^4 \\ &+ \left(\frac{4b_3 b_1}{m^2} - \cdots - \frac{b_1^4}{m^5}\right)e_n^5 + O(e_n^6). \end{aligned} \tag{21}$$

Kemudian untuk menghitung $g(x_n)$ pada persamaan (8), misalkan $w_n = x_n + f(x_n)$. Sama seperti cara sebelumnya nyatakan $f(w_n)$ menjadi persamaan (16)

$$f(w_n) = \frac{f_0(w_n)}{f_0'(w_n)} = \frac{(w_n - x^*)h(w_n)}{mh(w_n) + (w_n - x^*)h'(w_n)}.$$

Setelah disederhanakan diperoleh

$$\begin{aligned} f(w_n) = &\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m^2}\right)e_n + \left(-\frac{b_1}{m^2} - \frac{4b_1}{m^3} - \frac{3b_1}{m^4} - \frac{b_1}{m^5}\right)e_n^2 \\ &+ \left(-\frac{b_1^2}{m^2} + \cdots - \frac{b_1^2}{m^8}\right)e_n^3 + \left(-\frac{b_1^3}{m^2} - \cdots - \frac{b_1^3}{m^{11}}\right)e_n^4 \\ &+ \left(-\frac{4b_2b_1^2}{m^2} - \cdots + \frac{9b_1^4}{m^13}\right)e_n^5 + O(e_n^6). \end{aligned} \tag{22}$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (22) dan (21) ke persamaan (8), diperoleh

$$\begin{aligned} g(x_n) = &\frac{1}{m} + \left(-\frac{3b_1}{m^2} - \frac{3b_1}{m^3} - \frac{b_1}{m^4}\right)e_n + \left(\frac{4b_1^2}{m^2} + \cdots + \frac{b_1^2}{m^7}\right)e_n^2 \\ &+ \left(\frac{15b_2b_1}{m^2} - \cdots - \frac{b_1^3}{m^{10}}\right)e_n^3 + \left(\frac{24b_3b_1}{m^2} - \cdots + \frac{b_1^4}{m^{13}}\right)e_n^4 \\ &+ \left(\frac{18b_1^5}{m^3} + \cdots + \frac{b_1^5}{m^{14}}\right)e_n^5 + O(e_n^6). \end{aligned} \tag{23}$$

Kemudian untuk menghitung y_n, bagi persamaan (21) dan (23). Kemudian subtitusikan ke langkah pertama dari persamaan (10) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} y_n = x^* &+ \left(\frac{2b_1}{m} + \frac{3b_1}{m^2} + \frac{b_1}{m^3}\right)e_n^2 + \left(\frac{6b_2}{m} + \cdots - \frac{2b_2}{m^4}\right)e_n^3 \\ &+ \left(\frac{6b_1^3}{m^2} - \cdots - \frac{3b_3}{m^5}\right)e_n^4 + \left(\frac{20b_2b_1^2}{m} + \cdots + \frac{6b_1^2b_2}{m^8}\right)e_n^5 + O(e_n^6). \end{aligned} \tag{24}$$

Kemudian untuk menentukan z_n pada langkah kedua dari persamaan (10), perlu dicari nilai $f(y_n)$. Sama seperti sebelumnya nyatakan $f(y_n)$ menjadi persamaan (16)

$$f(y_n) = \frac{f_0(y_n)}{f_0'(y_n)} = \frac{(y_n - x^*)h(y_n)}{mh(y_n) + (y_n - x^*)h'(y_n)}.$$

Setelah disubtitusi dan disederhanakan diperoleh

$$\begin{aligned} f(y_n) = &\left(-\frac{2b_1}{m^2} - \frac{3b_1}{m^3} - \frac{b_1}{m^4}\right)e_n^2 + \left(\frac{3b_1^2}{m^2} - \cdots - \frac{b_1^2}{m^6}\right)e_n^3 \\ &+ \left(\frac{12b_2b_1}{m^2} - \cdots - \frac{2b_1^3}{m^7}\right)e_n^4 + \left(\frac{5b_1^4}{m^2} - \cdots + \frac{2b_1^4}{m^{11}}\right)e_n^5 + O(e_n^6). \end{aligned} \tag{25}$$

Selanjutnya dengan membagi persamaan (25) dan (23) kemudian mensubtitusikan ke langkah kedua pada persamaan (10) diperoleh

$$\begin{aligned} z_n = x^* &+ \left(\frac{b_1^2}{m^6} + \cdots + \frac{14b_1^2}{m^4}\right)e_n^3 + \left(\frac{34b_1b_2}{m^2} - \cdots + \frac{7b_1^3}{m^7}\right)e_n^4 \\ &+ \left(\frac{34b_1^4}{m^2} + \cdots + \frac{b_1^4}{m^{10}}\right)e_n^5 + O(e_n^6). \end{aligned} \tag{26}$$

Selanjutnya untuk menghitung x_{n+1} pada langkah ketiga dari persamaan (10), perlu dihitung $f(z_n)$. Dengan cara yang sama seperti sebelumnya, nyatakan $f(z_n)$ menjadi persamaan (16)

$$f(z_n) = \frac{f_0(z_n)}{f_0'(z_n)} = \frac{(z_n - x^*)h(z_n)}{mh(z_n) + (z_n - x^*)h'(z_n)}.$$

Setelah disubtitusi dan disederhanakan diperoleh

$$\begin{aligned} f(z_n) = &\left(\frac{6b_1^2}{m^3} + \cdots + \frac{b_1^2}{m^7}\right)e_n^3 + \left(\frac{34b_2b_1}{m^3} - \cdots + \frac{2b_1^3}{m^9}\right)e_n^4 \\ &+ \left(\frac{34b_1^4}{m^3} - \cdots + \frac{b_1^4}{m^{11}}\right)e_n^5 + O(e_n^6). \end{aligned} \tag{27}$$

Selanjutnya perhatikan persamaan (9). Substitusikan persamaan (24), (26), (21), (25) dan (27) ke persamaan (9) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} F(x_n, y_n, z_n) = &\frac{1}{m} + \left(\frac{-3b_1^2m^{10} - b_1^2m^9 - 2m^{11}b_1^2}{m^{14}}\right)e_n^2 \\ &+ \cdots + \left(\frac{-14b_1^3m^3 + \cdots + 30b_1^5m^{11}}{m^{14}}\right)e_n^5 + O(e_n^6). \end{aligned} \tag{28}$$

Bagi persamaan (27) dan (28), kemudian subtitusikan ke langkah ketiga pada persamaan (10) diperoleh

$$x_{n+1} = x^* + \left(-\frac{12b_1^4}{m^4} - \frac{48b_1^4}{m^5} - \frac{79b_1^4}{m^6} - \frac{69b_1^4}{m^7} - \frac{34b_1^4}{m^8} - \frac{9b_1^4}{m^9} - \frac{b_1^4}{m^{10}}\right)e_n^5 + O(e_n^6).$$

Karena $e_{n+1} = x_{n+1} - x^*$, maka persamaan tingkat kesalahan dari metode iterasi tiga langkah pada persamaan (10) adalah

$$e_{n+1} = \left(\frac{b_1}{m}\right)^4\left(-12 - \frac{48}{m} - \frac{79}{m^2} - \frac{69}{m^3} - \frac{34}{m^4} - \frac{9}{m^5} - \frac{1}{m^6}\right)e_n^5 + O(e_n^6).$$

Berdasarkan Definisi 2 dapat disimpulkan bahwa metode iterasi tiga langkah pada persamaan (10) memiliki orde konvergensi lima. □

4. UJI KOMPUTASI

Pada bagian ini dilakukan uji komputasi yang bertujuan untuk membandingkan banyak iterasi dari Metode Newton (MN) orde *linear*, metode King [2] (MK,(2),(3)) dengan dua tebakan awal yaitu x_0 dan $x_1 = x_0 - 0.1$, metode Wu dan Fu [8] (MWF,(4),(5)) dengan parameter $\mu = 0.1$, metode Parida dan Gupta [4] (MK,(6),(5)) dengan parameter $\mu = 0.5$ dan metode iterasi tiga langkah dengan orde konvergensi lima [3] (MIOL,(1),(10)). Dalam melakukan perbandingan ini, persamaan nonlinear yang digunakan adalah:

$$
\begin{array}{ll}
f_{01}(x) = \dfrac{(x-\sqrt{5})^4}{(x-1)^2+1} & x^* = 2.236067977499790 \\
f_{02}(x) = (8xe^{-x^2} - 2x - 3)^8 & x^* = -1.790353179158954 \\
f_{03}(x) = \dfrac{(2x\cos(x) + x^2 - 3)^{10}}{x^2+1} & x^* = 2.980645279438537 \\
f_{04}(x) = (e^{-x^2+x+3} - x + 2)^9 & x^* = 2.490539827608305 \\
f_{05}(x) = (\ln(x^2+3x+5) - 2x + 7)^8 & x^* = 5.469012335910142 \\
f_{06}(x) = (\sqrt{x^2+2x+5} - 2\sin(x) - x^2 + 3)^5 & x^* = 2.331967655883964 \\
f_{07}(x) = \dfrac{(x-2)^4}{(x-1)^2+1} & x^* = 2.000000000000000 \\
f_{08}(x) = (\sqrt{x} - \frac{1}{x} - 1)^7 & x^* = 2.147899035704787 \\
f_{09}(x) = (\sin(x)\cos(x) - x^3 + 1)^9 & x^* = 1.117078770687451 \\
f_{10}(x) = (\ln(x) + \sqrt{x^4+1} - 2)^7 & x^* = 1.222813963628973
\end{array}
$$

Perbandingan semua contoh di atas menggunakan program MAPLE13 dengan kriteria pemberhentian untuk setiap metode adalah

1. Jika nilai mutlak fungsi lebih kecil dari toleransi yang diberikan (1.0×10^{-17}).
2. Jika selisih nilai mutlak antara akar pendekatan dengan akar sebenarnya bernilai lebih kecil dari toleransi yang diberikan.
3. Jika jumlah iterasi mencapai maksimum iterasi (100+).

Tabel 1: Perbandingan (Jumlah Iterasi, COC) dari Beberapa Metode Iterasi

f_{0_i}	x_0	MN		MK		MWF		MPG		MIOL	
		n	COC	n	COC	n	COC	n	COC	n	COC
f_{0_1}	4.30	34	1.00	10	1.62	9	2.00	6	2.00	3	5.00
f_{0_2}	5.00	100+	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	3	5.00
f_{0_3}	4.90	65	1.00	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	3	5.06
f_{0_4}	6.50	50	1.00	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	3	4.92
f_{0_5}	8.30	49	1.00	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	2	4.94
f_{0_6}	5.50	50	1.00	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	2	4.62
f_{0_7}	3.50	34	1.00	9	1.62	8	2.00	6	2.00	3	5.00
f_{0_8}	4.50	36	1.00	10	1.62	9	2.00	5	2.00	3	5.00
f_{0_9}	2.20	58	1.00	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	3	4.81
$f_{0_{10}}$	6.00	61	1.00	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	3	5.02

Pada Tabel 1, keterangan $*$ menyatakan metode tidak dapat menemukan akar dan 100+ menyatakan jumlah iterasi dari metode melebihi jumlah iterasi maksimum. Secara keseluruhan MIOL berhasil menemukan akar yang diharapkan untuk semua contoh fungsi, dan dari segi iterasi dapat dilihat bahwa MIOL menghasilkan iterasi yang lebih sedikit jika dibandingkan dengan metode lain.

Pada Tabel 1 juga dapat dilihat bahwa MK, MWF dan MPG berhasil untuk contoh fungsi f_{0_1}, f_{0_7} dan f_{0_8}, dan gagal untuk contoh fungsi lainnya. Sedangkan MN dapat menemukan akar untuk semua contoh fungsi namun dengan tingkat keakuratan yang rendah, kecuali pada contoh fungsi kedua (f_{0_2}) MN tidak dapat menemukan akar karena jumlah iterasi yang melebihi jumlah iterasi maksimum (100+).

UCAPAN TERIMA KASIH

Ungkapan terima kasih penulis ucapkan kepada Bapak Drs.Agusni dan Bapak Supriadi Putra, M.Si yang telah meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, petunjuk, dan pengarahan kepada penulis dalam menyelesaikan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Atkinson, K.E. 1993. *Elementary Numerical Analysis, 2ndEd.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

[2] King, R.F. 1977. A Secant Method for Multiple Roots. *BIT*, **17**:321-328.

[3] Li, X., Mu, C., Ma. J & Hou, L. 2010. Fifth-Order Iterative Method for Finding Multiple Roots of Nonlinear Equations. *Numerical Algorithma* , **57**: 389-398.

[4] Parida, P.K & Gupta, D.K. 2008. An Improved Method for Finding Multiple Roots and it's Multiplicity of Nonlinear Equations in R. *Applied Mathematics and Computation*, **202**: 498-503.

[5] Sharma, J.R., Guha, R.K & Sharma, R. 2011. Some Modified Newton's Methods With Fourth-Order Convergence. *Applied Science Research*, **1**:240-247.

[6] Traub, J.F. 1964. *Iterative Methods for the Solution of Equations*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs. New Jersey.

[7] Weerakoon, S & Fernando, T.G.I. 2000. A Variant of Newton's Method with Accelerated Third Order Convergence. *Applied Mathematics Letters*, **13**: 87-93.

[8] Wu, X.Y & Fu, D.S. 2001. New Higher-Order Convergence Iteration Methods Without Employing Derivatives for Solving Nonlinear Equations. *Computers and Mathematics with Applications*, **41**: 489-495.