

PENAKSIR RASIO-CUM-DUAL UNTUK VARIANSI POPULASI PADA SAMPLING ACAK SEDERHANA

Siska Yulianti^{1*}, Arisman Adnan², Haposan Sirait²

¹Mahasiswa Program S1 Matematika

²Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau

Kampus Binawidya Pekanbaru 28293, Indonesia

*Siska_yulianti279@gmail.com

ABSTRACT

This article discusses three estimators for estimating population variance in simple random sampling i.e. ratio estimator, dual ratio estimator and ratio cum dual estimator which is a review of the article of Yadav and Kadilar [*Journal of Reliability and Statistical Studies*, 6 (2013): 29-34]. These three estimators are all biased, and *MSE* (mean square error) of each estimator can be obtained. Furthermore, these *MSE* are compared to each other. An example is given to show the efficiencies of estimators.

Keywords: simple random sampling, ratio estimator, dual to ratio estimator, ratio cum dual estimator and mean square error.

ABSTRAK

Artikel ini membahas tiga penaksir untuk variansi populasi pada sampling acak sederhana, yaitu penaksir rasio, penaksir dual rasio dan penaksir rasio cum dual yang merupakan review dari artikel Yadav dan Kadilar [*Journal of Reliability and Statistical Studies*, 6 (2013): 29-34]. Ketiga penaksir ini merupakan penaksir bias dan *MSE* (*mean square error*) penaksir dapat ditentukan. Selanjutnya, *MSE* ini dibandingkan satu sama lain. Contoh diberikan untuk menunjukkan efisiensi dari penaksir.

Kata kunci: sampling acak sederhana, penaksir rasio, penaksir dual rasio, penaksir rasio cum dual, dan *mean square error*.

1. PENDAHULUAN

Dalam menaksir suatu parameter, ada beberapa metode yang digunakan sehingga sampel yang diambil dapat mewakili populasi yang akan ditaksir, salah satunya adalah metode rasio. Tujuan metode rasio adalah untuk meningkatkan ketelitian suatu penaksir dengan mengambil manfaat hubungan antara y_i dan x_i , dimana y_i adalah unit populasi Y dan x_i adalah unit populasi X [1].

Pengembangan metode rasio yang diajukan adalah dengan menggunakan metode dual rasio dan rasio cum dual, dengan X merupakan variabel tambahan yang mempunyai korelasi positif terhadap Y . Metode dual rasio adalah dibutuhkan sampel pendukung x_i^* , dengan x_i^* adalah sampel diluar x_i dalam populasi X yang berhubungan dengan y_i yang akan diteliti untuk setiap sampel. Perbandingan \bar{Y} dan \bar{y} setara dengan perbandingan \bar{x}^* dan \bar{X} [1].

Metode penaksir rasio cum dual merupakan cara untuk memperkirakan nilai dari variabel tambahan X dari suatu parameter. Dalam metode penaksir ini, suatu variabel Y yang akan diteliti diperoleh untuk setiap unit didalam sampel. Dengan memanfaatkan hubungan antara x_i dan y_i , dimana x_i unit sampel dari populasi berkarakter X dan y_i unit sampel dari populasi berkarakter Y [4].

2. SAMPLING ACAK SEDERHANA

Sampling acak sederhana yaitu suatu metode untuk mengambil n unit dari populasi berukuran N , dimana setiap unit mempunyai kesempatan yang sama untuk terambil kembali menjadi anggota sampel. Pengambilan sampel dapat dilakukan dengan pengembalian atau tanpa pengembalian. Pengambilan sampel dengan pengembalian menyatakan satuan unit yang telah diambil memiliki kemungkinan akan terambil kembali menjadi anggota sampel [1].

Misalkan sampel berukuran n unit, yang tiap unitnya terambil menjadi anggota sampel adalah n/N Probabilitas suatu unit akan terambil menjadi sampel pada pengembalian pertama adalah n/N pada pengembalian kedua adalah $(n-1)/(N-1)$ dan seterusnya. Probabilitas seluruh n unit-unit tertentu yang terambil dalam n pengambilan adalah $\binom{N}{n}^{-1}$.

Untuk menentukan bias dan MSE suatu penaksir, diperlukan beberapa definisi dan teorema sebagai berikut.

Teorema 2.1 [1:h.30] Untuk sampling acak sederhana tanpa pengembalian dengan populasi berkarakter Y , variansi sampel s_y^2 dirumuskan dengan

$$s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1},$$

merupakan penaksir tak bias untuk S_y^2 .

Bukti: Dapat dilihat pada [1:h.30]. □

Teorema 2.2 [1:h.34] Apabila sebuah sampel berukuran n diambil secara sampling acak sederhana tanpa pengembalian dari populasi berkarakter Y dan berukuran N maka variansi s_y^2 adalah

$$V(s_y^2) = \left(\frac{S_y^2}{n} \right) (\lambda_{40} - 1),$$

dengan

$$\lambda_{40} = \frac{\mu_{40}}{\mu_{20}^2}$$

Bukti: Dapat dilihat pada [1:h.34]. □

Teorema 2.3 [2:h.47] Deret Taylor dua variabel

Misalkan $k \in A$, dengan A adalah himpunan bilangan asli, misalkan $I := [a, b]$ dan misalkan $f : I \rightarrow \mathfrak{R}$ dengan $f, f', f'', \dots, f^{(k)}$ kontinu pada I dan $f^{(k+1)}$ ada pada (a, b) . Jika $x_0 \in I$, maka untuk sebarang $x \in I$ terdapat suatu titik c antara x dan x_0 sehingga

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(xc)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}.$$

Bukti: Dapat dilihat pada [2:h.46]. □

3. BIAS DAN MSE PENAKSIR RASIO-CUM-DUAL UNTUK VARIANSI PADA SAMPLING ACAK SEDERHANA

Penaksir yang dibahas pada bab ini adalah penaksir rasio, penaksir dual rasio dan penaksir rasio cum dual. Ketiga penaksir ini adalah penaksir bias, sehingga nilai dari bias dan *MSE*-nya yaitu

1. Bentuk dari penaksir rasio untuk variansi populasi pada sampling acak sederhana adalah

$$S_R^2 = s_y^2 \frac{S_x^2}{s_x^2}. \tag{1}$$

Bias dan *MSE* penaksir pada persamaan (1) yaitu

$$B(\hat{S}_R^2) = \frac{1}{n} S_y^2 (\lambda_{04} - \lambda_{22}),$$

dengan

$$\lambda_{04} = \frac{\mu_{04}}{\mu_{20}^2} \text{ dan } \lambda_{22} = \frac{\mu_{22}}{\mu_{20}\mu_{02}}$$

$$MSE(\hat{S}_R^2) \approx \frac{1}{n} S_y^2 ((\lambda_{40} - 1) + (\lambda_{04} - 1) - 2(\lambda_{22} - 1)). \tag{2}$$

2. Bentuk dari penaksir dual rasio untuk variansi populasi pada sampling acak sederhana adalah

$$S_d^2 = s_y^2 \frac{(1+g)S_x^2 - g s_x^2}{S_x^2}, \tag{3}$$

dengan

$$g = \frac{n}{N-n}.$$

Bias dan MSE penaksir pada persamaan (3) yaitu

$$B(\hat{S}_d^2) = \frac{1}{n} S_y^2 (g(\lambda_{22} - 1)),$$

$$MSE(\hat{S}_d^2) \approx \frac{1}{n} S_y^2 ((\lambda_{40} - 1) + g^2(\lambda_{04} - 1) - 2g(\lambda_{22} - 1)), \quad (4)$$

3. Bentuk dari penaksir rasio cum dual untuk variansi populasi pada sampling acak sederhana adalah

$$S_{RCDR}^2 = s_y^2 \left[\alpha \left(\frac{S_x^2}{s_x^2} \right) + (1 + \alpha) \left(\frac{(1 + g)S_x^2 - g s_x^2}{S_x^2} \right) \right], \quad (5)$$

dengan $0 < \alpha < 1$.

Bias dan MSE penaksir pada persamaan (5) yaitu

$$B(\hat{S}_{RCDR}^2) = \frac{1}{n} S_y^2 (\alpha(\lambda_{04} - 1) - \alpha_1(\lambda_{22} - 1)),$$

dengan

$$\alpha_1 = \frac{(\lambda_{22} - 1)}{(\lambda_{04} - 1)}$$

$$MSE_{min}(\hat{S}_{RCDR}^2) \approx \frac{1}{n} S_y^2 \left((\lambda_{40} - 1) - \frac{(\lambda_{22} - 1)^2}{(\lambda_{04} - 1)} \right). \quad (6)$$

4. PENAKSIR RASIO YANG EFISIEN UNTUK VARIANSI POPULASI

Untuk menentukan penaksir yang efisien dari penaksir bias ditentukan dengan cara membandingkan MSE dari masing-masing penaksir. Penaksir yang lebih efisien merupakan penaksir dengan MSE terkecil.

1. Perbandingan $MSE(\hat{S}_R^2)$ dengan $MSE(\hat{S}_d^2)$

Penaksir dual rasio \hat{S}_d^2 lebih efisien dari penaksir rasio \hat{S}_R^2 , jika

$$\lambda_{04} > \frac{2(\lambda_{22} - 1)}{(1 - g)} + 1. \quad (7)$$

2. Perbandingan $MSE(\hat{S}_R^2)$ dengan $MSE(\hat{S}_{RCDR}^2)$

Penaksir rasio cum dual rasio \hat{S}_{RCDR}^2 lebih efisien dari penaksir rasio \hat{S}_R^2 , jika

$$\lambda_{04} > 1. \quad (8)$$

3. Perbandingan $MSE(\hat{S}_d^2)$ dengan $MSE(\hat{S}_{RCDR}^2)$

Penaksir rasio cum dual rasio \hat{S}_{RCDR}^2 lebih efisien dari penaksir dual rasio \hat{S}_d^2 , jika

$$\lambda_{04} > 1. \quad (9)$$

Contoh Data pada Tabel 1 merupakan pengeluaran dan pendapatan karyawan PT. Perkebunan Nusantara V Pekanbaru tahun 2006. Ditentukan variansi pengeluaran karyawan menggunakan syarat relatif efisiensi penaksir.

Tabel 1: Pengeluaran dan Pendapatan karyawan
PT. Perkebunana Nusantara V Pekanbaru tahun 2006.

NO	Pengeluaran (Rp)	NO	Pendapatan (Rp)	NO	Pengeluaran (Rp)	NO	Pendapatan (Rp)
1	800.000	1	1.000.000	30	3.100.000	30	3.300.000
2	900.000	2	1.000.000	31	3.000.000	31	3.400.000
3	1.500.000	3	1.800.000	32	3.000.000	32	3.700.000
4	1.300.000	4	1.400.000	33	3.400.000	33	3.500.000
5	1.100.000	5	1.200.000	34	3.300.000	34	3.500.000
6	1.100.000	6	1.300.000	35	3.500.000	35	3.600.000
7	1.200.000	7	1.400.000	36	3.400.000	36	3.700.000
8	1.400.000	8	1.500.000	37	3.400.000	37	4.200.000
9	1.300.000	9	1.600.000	38	3.700.000	38	4.100.000
10	1.400.000	10	1.800.000	39	4.200.000	39	4.700.000
11	1.800.000	11	1.900.000	40	3.800.000	40	4.900.000
12	1.500.000	12	2.000.000	41	4.700.000	41	5.200.000
13	1.700.000	13	2.000.000	42	4.800.000	42	5.300.000
14	1.800.000	14	2.100.000	43	5.300.000	43	5.500.000
15	2.000.000	15	2.100.000	44	5.000.000	44	5.800.000
16	2.000.000	16	2.200.000	45	5.400.000	45	5.600.000
17	2.000.000	17	2.200.000	46	5.700.000	46	5.800.000
18	2.000.000	18	2.300.000	47	5.500.000	47	5.700.000
19	2.100.000	19	2.300.000	48	5.600.000	48	6.100.000
20	2.300.000	20	2.400.000	49	5.700.000	49	6.000.000
21	2.000.000	21	2.400.000	50	6.400.000	50	6.100.000
22	2.300.000	22	2.500.000	51	6.900.000	51	7.100.000
23	2.500.000	23	2.600.000	52	6.000.000	52	6.300.000
24	2.700.000	24	2.800.000	53	5.900.000	53	6.000.000
25	2.400.000	25	2.800.000	54	7.100.000	54	7.700.000
26	2.600.000	26	2.900.000	55	6.600.000	55	7.000.000
27	2.500.000	27	3.000.000	56	7.000.000	56	7.500.000
28	2.800.000	28	3.200.000	57	7.500.000	57	8.000.000
29	3.000.000	29	3.400.000	58	7.200.000	58	8.000.000
Jumlah				200.100.000		218.400.000	

Sumber [3]

Untuk membandingkan *MSE* dari penaksir (1), (3) dan (5) dengan bantuan Microsoft Excel diperoleh kuantitas pada Tabel 2.

Tabel 2. Kuantitas yang diperlukan untuk membandingkan *MSE* ketiga penaksir.

N	58
n	25
\bar{Y}	3.450.000
\bar{X}	3.765.517
S_y^2	3.787.456.140.350
S_x^2	4.060.895.341.802
λ_{40}	2.374.427.313.143
λ_{04}	2.793.195.122.366,50
λ_{22}	57

Substitusikan kuantitas yang diperoleh pada Tabel 2 terhadap penaksir (1), (3) dan (5) untuk menunjukkan bahwa nilai taksiran \hat{S}_{RCDR}^2 lebih mendekati nilai variansi populasi yang dimuat pada Tabel 3.

Tabel 3: Nilai taksiran masing-masing penaksir

Penaksir	Nilai taksiran
\hat{S}_R^2	2.95625E+14
S_d^2	2.28409E+13
\hat{S}_{RCDR}^2	1.75935 E+13

Pada Tabel 3 dapat dilihat bahwa penaksir \hat{S}_{RCDR}^2 lebih mendekati nilai variansi populasi dengan nilai taksiran 1.75935E+13. Dilihat pada tabel 2 bahwa \hat{S}_{RCDR}^2 merupakan penaksir yang paling efisien diantara dua penaksir lainnya. Substitusikan kuantitas yang diperoleh pada Tabel 2 ke persamaan (2), (4) dan (6), diperoleh nilai penaksir dan *MSE* dari masing-masing penaksir seperti yang disajikan pada Tabel 4.

Tabel 4. Nilai *MSE* untuk ketiga penaksir.

Penaksir	<i>MSE</i>
\hat{S}_R^2	2,96517E+36
S_d^2	2,57661E+36
\hat{S}_{RCDR}^2	1,362436E+36

Berdasarkan Tabel 4 dan kriteria penaksir yang relatif efisien pada persamaan (7), (8) dan (9) diperoleh nilai *MSE* penaksir $\hat{S}_{RCDR}^2 < \hat{S}_d^2 < \hat{S}_R^2$.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dikemukakan pada artikel ini, penaksir \hat{S}_{RCDR}^2 merupakan penaksir yang paling efisien dari penaksir \hat{S}_R^2 dan \hat{S}_d^2 .

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Cochran, W. G. 1991. *Teknik Penarikan Sampel, Edisi Ketiga*. Terj. Dari *Sampling Techniques*, oleh Radiansyah & E. R Osman. Penerbit Universitas Indonesia, Jakarta.
- [2] Phillips, G. M. & P. J. Taylor. *Theory and Applications of Numerical Analysis, Second Edition*. Academic Press, New York.
- [3] Sinaga, C. V. D. 2007. Pola Konsumsi Karyawan PT. Perkebunan Nusantara V (PTPN V) Pekanbaru. Skripsi Fakultas Ekonomi Universitas Riau, Pekanbaru.
- [4] Yadav, S. K. and C. Kadilar. 2012. *A Class of Ratio Estimator of Population Variance*. *Journal of Reliability and Statistical Studies*. 6:29-34.