

# FORMULA AKUMULASI FACKLER UNTUK CADANGAN PREMI BERDASARKAN ASUMSI *CONSTANT FORCE*

Marintan Butar-butar<sup>1\*</sup>, Hasriati<sup>2</sup>, Aziskhan<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Mahasiswa Program S1 Matematika

<sup>2</sup>Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau

Kampus Bina Widya 28293 Indonesia

\* marintan.butarbutar@gmail.com

## ABSTRACT

This article discusses Fackler accumulation formula which is used to determine reserve premium of an endowment life insurance by constant force assumption. The constant force assumption is the one that uses probability density function of exponential distribution. The counting of reserve premium is obtained by determining the annuity and premium using the constant force assumption. Furthermore, an example is given to explain the problem discussed. On this case reserve premium is gotten using Fackler accumulation formula by the constant force assumption.

Keywords: *Constant force, premium, Fackler accumulation formula.*

## ABSTRAK

Artikel ini membahas formula akumulasi Fackler yang digunakan untuk menentukan besarnya cadangan premi pada asuransi jiwa berdasarkan asumsi *constant force*. Asumsi *constant force* merupakan suatu asumsi yang menggunakan fungsi kepadatan peluang dari distribusi eksponensial. Perhitungan cadangan premi tersebut diperoleh dengan menentukan anuitas dan premi menggunakan asumsi *constant force*. Untuk memperjelas tentang masalah yang dibahas diberikan contoh kasus. Pada kasus tersebut besar cadangan premi diperoleh dengan menggunakan formula akumulasi Fackler berdasarkan asumsi *constant force*.

Kata kunci: *Constant force, premi, formula akumulasi Fackler.*

## 1. PENDAHULUAN

Asuransi jiwa dwiguna merupakan gabungan dari asuransi jiwa dwiguna murni dan asuransi jiwa berjangka yang berarti dalam maupun saat berakhirnya masa pertanggungan kepada pemegang polis, baik meninggal maupun bertahan hidup akan dibayarkan uang pertanggungan [3]. Sehingga pada suatu perusahaan asuransi harus

mempunyai dana yang cukup untuk digunakan membayar uang pertanggungan sesuai dengan kesepakatan diawal kontrak dalam bentuk cadangan.

Cadangan merupakan besarnya uang yang ada pada perusahaan asuransi dalam jangka waktu pertanggungan [3]. Nilai cadangan yang dimiliki perusahaan asuransi jiwa dipengaruhi oleh besarnya premi yang dibayarkan oleh tertanggung. Beberapa jenis pembayaran premi yang digunakan yaitu premi tunggal, premi tahunan dan premi  $m$  kali pembayaran dalam setahun. Namun, pada kertas kerja ini premi yang digunakan merupakan premi  $m$  kali pembayaran dalam setahun.

Menurut Futami [3], terbagi dua cara perhitungan cadangan yaitu cadangan prospektif dan retrospektif. Cadangan prospektif adalah perhitungan cadangan dengan berdasarkan nilai sekarang dari semua pengeluaran pada waktu yang akan datang dikurangi dengan nilai sekarang total pendapatan pada waktu yang akan datang untuk tiap pemegang polis. Sedangkan cadangan retrospektif adalah perhitungan cadangan dengan berdasarkan jumlah total pendapatan pada waktu yang lalu sampai saat dilakukan perhitungan cadangan, dikurangi dengan jumlah pengeluaran diwaktu yang lalu untuk setiap pemegang polis.

Formula Akumulasi Fackler merupakan perluasan dari cadangan retrospektif. Perhitungan metode ini digunakan untuk memperhitungkan cadangan premi bersih yang belum dijumlahkan dengan biaya operasional lainnya sehingga cadangan ini sangat diperlukan untuk menghitung cadangan premi bersih beberapa tahun kedepan secara berurutan [4].

Pada buku Menge [4], formula akumulasi Fackler untuk besar cadangan premi asuransi jiwa dwiguna menggunakan fungsi komutasi, sedangkan pada kertas kerja ini dibahas tentang perhitungan besar cadangan dengan menggunakan asumsi *constant force* yang diperoleh dari buku Dickson et al [2].

## 2. ANUITAS HIDUP AWAL BERJANGKA DAN PREMI BERDASARKAN ASUMSI *CONSTANT FORCE*

Pada bagian ini dibahas anuitas hidup awal berjangka dengan pembayaran  $m$  kali dalam setahun dan premi  $m$  kali pembayaran dalam setahun pada asuransi jiwa dwiguna. Dalam perhitungan premi  $m$  kali pembayaran dalam setahun pada asuransi jiwa, diperlukan anuitas hidup awal  $m$  kali pembayaran dalam setahun. Namun sebelumnya diberikan mengenai peluang hidup berdasarkan asumsi *constant force*.

Percepatan mortalita dari peserta asuransi yang berusia  $x$  tahun berdasarkan asumsi *constant force* dinyatakan dengan [2]

$$\mu_{\overline{x}|} = \mu, \quad x \geq 0 \quad \mu \geq 0.$$

Artinya percepatan mortalita konstan untuk semua  $x$  tahun, sehingga percepatan mortalita untuk usia  $(x + s)$  tahun dapat dinyatakan dengan

$$\mu_{\overline{x+s}|} = \mu, \quad x \geq 0 \quad \mu \geq 0. \quad (1)$$

Hubungan antara peluang hidup dengan percepatan mortalita adalah sebagai berikut:

$${}_t p_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds} \quad (2)$$

Berdasarkan persamaan (1) dan (2), maka peluang orang yang berusia  $x$  tahun akan hidup hingga  $t$  tahun dapat dinyatakan dengan

$${}_t p_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds} \quad (3)$$

Lalu, persamaan (3) digunakan dalam perhitungan nilai tunai anuitas dan premi asuransi jiwa.

Pada [2], anuitas hidup awal berjangka adalah anuitas yang pembayarannya dilakukan pada jangka waktu tertentu. Nilai tunai anuitas hidup awal berjangka dari peserta asuransi yang berusia  $x$  tahun dinyatakan dengan

$$\ddot{a}_{x:n} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_t p_x \quad (4)$$

Nilai tunai anuitas hidup awal berjangka dengan  $m$  kali pembayaran dalam setahun dengan jangka waktu  $n$  tahun dari peserta asuransi jiwa yang berusia  $x$  tahun dapat dinyatakan dengan [2]

$$\ddot{a}_{x:n}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{mn-1} v^{t/m} {}_{t/m} p_x \quad (5)$$

dengan  $v$  adalah faktor diskon. Dari [3], faktor diskon dinyatakan dengan

$$v = \frac{1}{1+i} \quad (6)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3) ke persamaan (5), maka nilai tunai anuitas hidup awal berjangka  $m$  kali pembayaran dalam setahun selama  $n$  tahun dari peserta asuransi yang berusia  $x$  tahun dapat dinyatakan dengan

$$\ddot{a}_{x:n}^{(m)} = \frac{\left( +i \frac{1}{m} \left( -\left( {}_{t/m} p_x \right)^n \right) \right)}{i \left( 1 + m \frac{1}{m} q_x \right)} \quad (7)$$

dengan  $\frac{1}{m} q_x$  menyatakan peluang meninggal seseorang yang berusia  $x$  tahun hingga  $\frac{1}{m}$  tahun berikutnya dan  $i^{(m)}$  menyatakan tingkat bunga nominal.

Dari [3], tingkat bunga nominal dinyatakan dengan

$$i^{(m)} = m \left( \left( 1 + \frac{i}{m} \right)^m - 1 \right). \quad (8)$$

Premi merupakan serangkaian pembayaran yang dilakukan oleh pemegang polis asuransi. Pembayaran premi asuransi yang dilakukan pada waktu kontrak asuransi disetujui, selanjutnya tidak ada pembayaran lagi disebut dengan premi tunggal [2].

Premi tunggal asuransi jiwa dwiguna untuk peserta asuransi yang berusia  $x$  tahun, dengan jangka waktu pertanggungan selama  $n$  tahun dinyatakan dengan

$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} (q_x + v^n p_x). \quad (9)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3) ke persamaan (9), maka premi tunggal asuransi jiwa dwiguna dari peserta yang berusia  $x$  tahun dengan masa pertanggungan asuransi selama  $n$  tahun dinyatakan dengan

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{q_x + p_x \cdot i}{q_x + i}. \quad (10)$$

Pada [1], besar premi tahunan oleh peserta asuransi jiwa dwiguna yang berusia  $x$  tahun dengan jangka waktu pembayaran  $n$  tahun dengan uang pertanggungan sebesar  $R$  adalah

$$p_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} R. \quad (11)$$

Besar premi  $m$  kali pembayaran pada asuransi jiwa dwiguna dengan uang pertanggungan sebesar  $R$  dan masa pertanggungan asuransi selama  $n$  tahun dinyatakan dengan [1]

$$p_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}} R. \quad (12)$$

Lalu, dengan mensubstitusikan persamaan (7) dan (10) ke persamaan (12), maka premi  $m$  kali pembayaran dalam setahun pada asuransi jiwa dwiguna berdasarkan asumsi *constant force* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$p_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{\left( q_x + p_x \cdot i \right) \left( i^{(m)} + m \cdot \frac{1}{m} q_x \right)}{\left( q_x + i \right) \left( \left( 1 + \frac{i}{m} \right)^m - \left( 1 - p_x \cdot i \right) \right)} R. \quad (13)$$

### 3. FORMULA AKUMULASI FACKLER UNTUK CADANGAN PREMI BERDASARKAN ASUMSI *CONSTANT FORCE*

Formula akumulasi Fackler pertama kali diperkenalkan oleh aktuaris Amerika yaitu David Parks Fackler [5]. Formula akumulasi Fackler merupakan formula yang nilai cadangan akhirnya adalah cadangan akhir tahun berikutnya. Dengan kata lain nilai cadangan yang dicari adalah tahun ke  $t + 1$ . Perhitungan formula ini digunakan untuk memperhitungkan cadangan premi bersih yang belum dijumlahkan dengan biaya operasional lainnya sehingga cadangan ini sangat diperlukan untuk menghitung cadangan premi bersih beberapa tahunan ke depan secara berurutan [4].

Menurut Menge [4], formula akumulasi Fackler untuk cadangan premi dinyatakan dengan

$${}_{t+1}V = \frac{(l_{x+t} {}_tV + l_{x+t} P)(1+i) - d_{x+t}}{l_{x+t+1}} \quad (14)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (3) dan persamaan (13) ke persamaan (14), diperoleh cadangan premi dengan  $m$  kali pembayaran dalam setahun menggunakan formula akumulasi Fackler pada asuransi jiwa dwiguna berdasarkan asumsi *constant force* sebagai berikut

$${}_{t+1}V_{x:n}^{(m)} = \frac{\left( \left( {}_tV_{x:n}^{(m)} \left( q_x + i \right) \left( 1 + i \right)^{\frac{1}{m}} \left( 1 - p_x \right)^{\frac{n}{m}} \right) + \left( q_x + p_x \right) i \left( 1 + i \right)^{\frac{1}{m}} + m \frac{1}{m} q_x \right) (1+i) - \left( 1 - p_x \right)}{p_x} \quad (15)$$

### 4. CONTOH PENYELESAIAN KASUS

**Contoh 1** Pak Albert yang berusia 40 tahun mengikuti program asuransi jiwa dwiguna selama 10 tahun. Pak Albert berharap mendapatkan uang santunan sebesar Rp30.000.000,- yang dibayarkan pada akhir tahun polis dengan tingkat bunga 8%. Maka tentukan

- Besar premi jika Pak Albert menggunakan pembayaran premi tiap tahun
- Cadangan premi berdasarkan (a) untuk akhir tahun kelima yang diperoleh perusahaan asuransi jiwa dwiguna dengan menggunakan formula akumulasi *Fackler*

Dari kasus di atas diketahui bahwa  $x = 40$ ,  $n = 10$  tahun, tingkat bunga sebesar  $i = 8\%$ ,  $t = 5$  tahun dan  $R = \text{Rp}30.000.000,00$ .

- Sebelum menentukan besar premi yang dibayar tiap tahun, terlebih dahulu ditentukan faktor diskon dengan tingkat bunga sebesar 8% berdasarkan persamaan (6), yaitu

$$v = \frac{1}{1+0,08} = 0,9260$$

Berdasarkan Tabel Mortalita Indonesia tahun 1999 pada Tabel 1, untuk jenis kelamin perempuan diketahui

$$p_{40} = 0,9984 \text{ dan } q_{40} = 0,0016$$

Tabel 1: Tabel Mortalita Indonesia (TMI) 1999  
Jenis Kelamin: Perempuan  
 $i = 8\%$

$x$	$l_x$	$d_x$	$p_x$	$q_x$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
38	96667	134	0,9986	0,0014
39	96533	146	0,9985	0,0015
<b>40</b>	<b>96387</b>	<b>158</b>	<b>0,9984</b>	<b>0,0016</b>
41	96229	173	0,9982	0,0018
42	96056	189	0,998	0,002
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Sumber : Persatuan Aktuaris Indonesia 1999

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan nilai dari faktor diskon ke persamaan (4), diperoleh

$$\ddot{a}_{40:\overline{10}|} = \sum_{t=0}^{10-1} v^t \cdot p_{40} = 7,1919$$

Sebelum menentukan premi yang dibayarkan tiap tahun pada asuransi jiwa dwiguna, terlebih dahulu ditentukan premi tunggal asuransi jiwa dwiguna dengan jangka pertanggungan  $n$  tahun. Substitusikan persamaan nilai dari faktor diskon ke persamaan (9), diperoleh

$$A_{40:\overline{10}|} = \sum_{t=0}^{10-1} v^{t+1} \cdot q_{40} + v^{10} \cdot p_{40} = 0,4678$$

dengan mensubstitusikan hasil yang telah diperoleh sebelumnya ke persamaan (11), maka besar premi yang dibayarkan tiap tahun dari peserta asuransi jiwa yang berusia  $x$  tahun dengan jangka waktu pertanggungan  $n$  tahun diperoleh

$$P_{40:\overline{10}|} = \frac{0,4678}{7,1919} \text{Rp}30.000.000,00 = \text{Rp}1.951.32,88 \text{ tiaptahun}$$

Jadi, besarnya premi tiap tahun dari peserta asuransi jiwa yang berusia 40 tahun dengan jangka waktu perjanjian 10 tahun adalah sebesar Rp1.951.312,88.

b. Cadangan akhir tahun kelima yang diperoleh perusahaan asuransi jiwa dwiguna dengan menggunakan formula akumulasi Fackler

Sebelum menentukan cadangan pada akhir tahun kelima, akan ditentukan dahulu cadangan pada akhir tahun pertama sampai cadangan akhir tahun keempat dari peserta asuransi jiwa dwiguna. Dengan mensubstitusikan hasil yang diperoleh sebelumnya kepersamaan (14), diperoleh cadangan pada akhir tahun pertama menggunakan formula akumulasi Fackler yaitu

$${}_{0+1}V_{40:\overline{10}|} = \frac{(l_{40+0} \cdot {}_0V_{40:\overline{10}|} + l_{40+0} \cdot P_{40:\overline{10}|})(1 + 0,08) - d_{40+0}}{l_{40+0+1}}$$

Karena  ${}_0V_{40:\overline{10}|} = 0$ , diperoleh

$${}_1V_{40:\overline{10}|} = \text{Rp}2.110.878,11$$

Selanjutnya, dari cadangan akhir tahun pertama ini akan ditentukan cadangan akhir tahun kedua yaitu sebagai berikut

$${}_2V_{40:\overline{10}|} = \frac{(\text{Rp}2.110.878,11 + \text{Rp}1.951.312,88 \cdot 0,6229 \cdot 0,08) \cdot 1,08 - 0,173}{0,6056} = \text{Rp}4.395.068,70$$

Dengan rumus yang sama diperoleh cadangan pada akhir tahun ketiga hingga akhir tahun kelima yang dimiliki perusahaan asuransi jiwa.

Hasil perhitungan cadangan akhir tahun secara lebih lengkap ditampilkan pada Tabel 2.

Tabel 2: Cadangan Asuransi Jiwa Dwiguna dengan Tingkat Bunga 8% menggunakan formula akumulasi Fackler

Tahun	Besar Cadangan (Rp)
0	0
1	2.110.878,11
2	4.395.068,70
3	6.867.604,74
4	9.544.741,65
5	12.444.226,20

**Contoh 2** Berdasarkan Contoh 1, menggunakan asumsi *constant force*, tentukan

- Besar premi jika pak Albert menggunakan premi semester
- Cadangan premi berdasarkan (a) untuk akhir tahun kelima yang diperoleh perusahaan asuransi jiwa dwiguna menggunakan formula akumulasi Fackler

Dari kasus contoh 2 diketahui bahwa  $x = 40$ ,  $n = 10$  tahun, pembayaran dilakukan setiap semester maka banyaknya pembayaran dalam setahun adalah  $m = 2$ , tingkat bunga sebesar  $i = 8\%$ ,  $t = 5$  tahun,  $v = 0,9260$  dan  $R = \text{Rp}30.000.000,00$ .

- Sebelum menentukan premi semester, terlebih dahulu anuitas hidup awal berjangka dengan  $m$  kali pembayaran dalam setahun dan premi tunggal. Substitusikan nilai faktor diskon ke persamaan (7), diperoleh

$$\ddot{a}_{40:\overline{10}|}^{(2)} = \frac{1 + 0,08 \left( - 0,9260 p_{40}^{\overline{10}} \right)}{0,08 + 2 \cdot \frac{1}{2} q_{40}} = 7,0574$$

Kemudian, substitusikan nilai faktor diskon ke persamaan (10), diperoleh

$$A_{40:\overline{10}|} = \frac{q_{40} + 0,9260 p_{40}^{\overline{10}} \cdot 0,08}{q_{40} + 0,08} = 0,4657$$

Substitusikan hasil yang telah diperoleh sebelumnya ke persamaan (13), maka premi semester bagi peserta asuransi jiwa yang berusia  $x$  tahun dengan jangka waktu pertanggungan  $n$  tahun diperoleh

$$p_{40:\overline{10}|}^{(2)} = \frac{0,4657}{7,0574} \text{Rp}30.000.000,00 = \text{Rp}1.979.624,22 \text{ tiap tahun}$$

Jadi, besarnya premi semester dalam setahun yang harus dibayar oleh peserta asuransi jiwa yang berusia 40 tahun dengan jangka waktu perjanjian 10 tahun, berdasarkan asumsi *constant force* adalah sebesar Rp1.979.624,22.

- Cadangan akhir tahun kelima yang diperoleh perusahaan asuransi jiwa dwiguna  
Sebelum menentukan cadangan pada akhir tahun kelima, akan ditentukan dahulu cadangan pada akhir tahun pertama sampai cadangan akhir tahun keempat dari peserta asuransi jiwa dwiguna. Dengan mensubstitusikan hasil yang diperoleh sebelumnya ke persamaan (15), diperoleh cadangan pada akhir tahun pertama menggunakan formula akumulasi Fackler yaitu

$${}_{0+1}V_{40:\overline{10}|}^{(2)} = \frac{({}_0V_{40:\overline{10}|}^{(2)} + p_{40:\overline{10}|}^{(2)}) (1 + 0,08) - q_{40}}{P_{40}}$$

Karena  ${}_0V_{40:10}^{(2)} = 0$ , diperoleh

$${}_1V_{40:10}^{(2)} = \text{Rp}2.141.420,43$$

Selanjutnya, dari cadangan akhir tahun pertama ini akan ditentukan cadangan akhir tahun kedua yaitu sebagai berikut

$${}_2V_{40:10}^{(2)} = \frac{({}_1V_{40:10}^{(2)} + \text{Rp}1.979.622,22)(1,08) - (-0,9984)}{0,9984} = \text{Rp}4.457.860,80$$

Dengan menggunakan rumus yang sama diperoleh cadangan pada akhir tahun ketiga hingga akhir tahun kelima yang dimiliki perusahaan asuransi jiwa.

Hasil perhitungan cadangan akhir tahun secara lebih lengkap ditampilkan pada Tabel 3.

Tabel 3: Cadangan Asuransi Jiwa Dwiguna dengan Tingkat Bunga 8% menggunakan Formula Akumulasi Fackler berdasarkan Asumsi *Constant Force*

Tahun	Besar cadangan (Rp)
0	0
1	2.141.420,43
2	4.457.860,80
3	6.963.625,62
4	9.674.188,52
5	12.606.287,82

Jadi, cadangan premi  $m$  kali pembayaran pada akhir tahun kelima yang diperoleh oleh perusahaan asuransi jiwa dwiguna bagi peserta yang berusia  $x$  tahun adalah sebesar Rp12.606.287,82.

## 5. KESIMPULAN

Besarnya cadangan premi pada asuransi jiwa dwiguna berdasarkan asumsi *constant force* dengan menggunakan formula akumulasi Fackler memperhatikan peluang hidup dan peluang meninggal dari peserta asuransi, tingkat bunga, faktor diskon serta besarnya uang pertanggungan. Peluang hidup dari peserta asuransi jiwa menggunakan

asumsi *constant force* lebih besar dibandingkan dengan peluang hidup secara umum yang ada pada tabel mortalita Indonesia tahun 1991. Berdasarkan hasil peluang hidup tersebut diperoleh premi yang dibayarkan oleh peserta asuransi dengan menggunakan premi  $m$  kali pembayaran dalam setahun berdasarkan asumsi *constant force*, lebih besar dibandingkan dengan yang tidak menggunakan asumsi *constant force*. Kemudian, dari premi diperoleh besar cadangan yang dimiliki perusahaan asuransi jiwa menyebabkan nilainya juga lebih besar jika menggunakan asumsi *constant force* dibandingkan dengan yang tidak menggunakan asumsi *constant force*. Penentuan besar cadangan premi asuransi jiwa dwiguna menggunakan formula akumulasi Fackler sangat berpengaruh pada nilai premi bersih. Semakin kecil nilai premi bersih semakin kecil pula nilai cadangan tersebut. Saran untuk studi selanjutnya dapat meneliti cadangan dengan formula akumulasi Fackler berdasarkan asumsi dan asuransi yang lain.

### DAFTAR PUSTAKA

- [1] Bowers N. L., H. U. Gerber, J. C. Hickman, D. A. Jones & C. J. Nesbitt. 1997. *Actuarial Mathematics*, Ithasca III; Society of Actuaries. 93-119.
- [2] Dickson, D. C. M. , M. R. Hardy & H. R. Waters. 2009. *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. Cambridge University Pres, Cambridge.
- [3] Futami, T. 1993. *Matematika Asuransi Jiwa, Bagian I*. Terjemahan dari: *Seimei Hoken Sugaku, Jokan ("92 Revision)*, oleh Herliyanto, Gatot. Penerbit Incorporated Foundation Oriental Life Insurance Cultural Development Center, Japan.
- [4] Menge, W. O. & C. H. Fischer. 1985. *The Mathematics of Life Insurance*. Ulrich's I Books Inc. United States.
- [5] Sembiring, R. K. 1986. *Asuransi I*. Karunika. Jakarta.