KONSEP METODE ITERASI VARIASIONAL

Yuliani[1*], **Leli Deswita**[2], **Agusni**[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*Yuliani_9392@ yahoo.co.id

ABSTRACT

We discuss a basic concept of variational iteration method for solving partial differential equations. Variational iteration method, which can be used for finding iterative formula, consists of three basic concepts, namely a general Lagrange multiplier, a restricted variation and a correction functional.

Keywords: *Variational iteration method, Lagrange multiplier, partial differential equation, restricted variation, correction functional.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas tentang konsep metode iterasi variasional untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial. Metode iterasi variasional terdiri dari tiga konsep dasar, yaitu pengali Lagrange umum, variasi terbatas dan fungsi koreksi yang dapat digunakan untuk membentuk rumus iterasi.

Kata kunci: *Metode iterasi variasional, pengali Lagrange, persamaan diferensial parsial, variasi terbatas, fungsi koreksi.*

1. PENDAHULUAN

Suatu persamaan yang memuat turunan dari satu atau beberapa fungsi yang tidak diketahui disebut persamaan diferensial. Jika turunan fungsi itu hanya tergantung pada satu variabel bebas disebut persamaan diferensial biasa dan jika tergantung pada lebih dari satu variabel bebas disebut persamaan diferensial parsial.

Persamaan diferensial parsial dapat digolongkan sebagai persamaan diferensial parsial linear dan nonlinear, dan persamaan diferensial parsial juga dapat berbentuk homogen dan nonhomogen. Salah satu penyelesaian persamaan diferensial parsial dalam metode numerik adalah menggunakan metode iterasi variasional.

Metode iterasi variasional terdiri dari tiga konsep dasar, yaitu pengali Lagrange umum, variasi terbatas dan fungsi koreksi. Ketiga konsep dasar ini dapat digunakan untuk membentuk rumus iterasi yang digunakan pada metode iterasi variasional.

Pada artikel ini dibahas tentang konsep metode iterasi variasional yang merupakan review dari artikel [2].

2. KONSEP METODE ITERASI VARIASIONAL

Konsep metode iterasi variasional terdiri dari tiga konsep dasar yaitu pengali Lagrange umum, variasi terbatas dan fungsi koreksi.

2.1. Pengali Lagrange Umum

Pengali Lagrange umum dapat digunakan untuk membangun fungsi koreksi pada persamaan nonlinear, yang dilambangkan dengan λ. Untuk memahami konsep pengali Lagrange umum, perhatikan persamaan nonlinear

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Jika x_n adalah suatu akar approksimasi, maka persamaan (1) menjadi

$$f(x_n) \neq 0. \tag{2}$$

Pada persamaan (2), persamaan koreksi dapat dinyatakan dengan

$$x_{n+1} = x_n + \lambda f(x_n), \tag{3}$$

dalam hal ini, λ adalah sebuah pengali Lagrange umum [2], yang bisa diidentifikasi secara optimal dengan menggunakan

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_n} = 0. \tag{4}$$

Apabila persamaan (3) diturunkan terhadap x_n diperoleh

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_n} = 1 + \lambda f'(x_n). \tag{5}$$

Kemudian, dengan memperhatikan persamaan (4), maka dari persamaan (5) diperoleh

$$\lambda = -\frac{1}{f'(x_n)}. \tag{6}$$

Pensubstitusi nilai λ ke persamaan (3), menghasilkan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{7}$$

Persamaan (7) merupakan bentuk dari metode Newton.

Selanjutnya, pada persamaan(3) dengan menambahkan fungsi sembarang $g(x_n)$, maka fungsi koreksi dapat ditulis menjadi [2]

$$x_{n+1} = x_n + \lambda g(x_n) f(x_n). \tag{8}$$

Apabila persamaan (8) diturunkan terhadap x_n diperoleh

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_n} = 1 + \lambda(g(x_n) f'(x_n) + g'(x_n) f(x_n)). \tag{9}$$

Kemudian, dengan menggunakan persamaan (4), dan disubstitusikan ke persamaan (9) menjadi

$$\lambda = -\frac{1}{(g(x_n) f'(x_n) + g'(x_n) f(x_n)}. \tag{10}$$

Substitusikan persamaan (10) ke persamaan (9) diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n) f(x_n)}{(g(x_n) f'(x_n) + g'(x_n) f(x_n)}, \tag{11}$$

dengan $g(x_n) \neq 0$.

Misalkan $g(x_n) = e^{-\alpha x_n}$, dan diperoleh $g'(x_n) = -\alpha e^{-\alpha x_n}$. Kemudian substitusikan hasil ini ke persamaan (11) diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - \alpha f(x_n)}. \tag{12}$$

Persamaan (12) merupakan metode iterasi bertipe Newton.

2.2. Variasi Terbatas

Variasi terbatas digunakan untuk mendapatkan metode iterasi dari suatu persamaan nonlinear. Variasi terbatas x dilambangkan dengan $\widetilde{x}$. Nilai untuk variasi terbatas merupakan konstanta. Untuk mengetahui cara kerja variasi terbatas dalam metode iterasi variasional, perhatikan persamaan berikut

$$x^2 - 3x + 2 = 0. \tag{13}$$

Persamaan (13) dapat ditulis dengan menggunakan variasi terbatas [2], yaitu

$$\widetilde{x}.x - 3x + 2 = 0, \tag{14}$$

dengan $\widetilde{x}$ disebut variasi terbatas. Selanjutnya, dengan menyelesaikan x dari persamaan (14) diperoleh

$$x = \frac{2}{3 - \widetilde{x}}. \tag{15}$$

Jika nilai $\widetilde{x}$ diasumsikan sebagai tebakan awal, maka persamaan (15) dapat ditulis dalam bentuk iterasi yaitu

$$x_{n+1} = \frac{2}{3 - x_n}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \cdots. \tag{16}$$

dengan tebakan awal yang dipilih [2], adalah

$$x_0 = 0,5 + b, \tag{17}$$

dan b merupakan sebuah parameter. Jika $n = 0$, maka persamaan (16) diperoleh

$$x_1 = \frac{2}{3 - x_0}. \tag{18}$$

Substitusikan persamaan (17) ke persamaan (18) dengan menggunakan deret geometri sehingga diperoleh

$$x_1 = 0,8 + 0,32b. \tag{19}$$

Selanjutnya, untuk mendapatkan nilai b, ditetapkan

$$x_0 = x_1. \tag{20}$$

Subtitusikan persamaan (17) dan persamaan (19) ke persamaan (20) sehingga diperoleh

$$b = 0,44118 \approx 0,4412,$$

atau

$$b = 0,4412. \tag{21}$$

Kemudian, substitusikan nilai b ke persamaan (19) diperoleh

$$x_1 = 0,9412,$$

dengan x_1 adalah akar untuk metode (16).

Selanjutnya, variasi terbatas dapat dilihat pada sebuah fungsi variasional adalah [2]

$$\frac{d}{dx}\left[(1 + \beta\theta)\frac{d\theta}{dx}\right] - \psi^2\theta = 0, \tag{22}$$

dengan syarat batas $\theta'(0) = 0$, dan $\theta(1) = 1$. Nilai θ dan ψ adalah konstanta.

Diberikan suatu fungsi variasional dengan menggunakan variasi terbatas sebagai berikut [2]

$$J(\theta) = \int_0^1 (1 + \beta\tilde{\theta})\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 + \psi^2\theta^2 dx, \tag{23}$$

dengan $\tilde{\theta}$ adalah sebuah variasi terbatas. Persamaan (23) dapat ditulis dalam bentuk iterasi menjadi

$$J(\theta_{n+1}) = \int_0^1 (1+\beta\theta_n)\left(\frac{d\theta_{n+1}}{dx}\right)^2 + \psi^2\theta_{n+1}^2 dx. \tag{24}$$

Jika diberikan tebakan awal yang memenuhi syarat batas $\theta_0'(0) = 0$ dan $\theta_0(1) = 1$, yaitu [2]

$$\theta_0 = 1 - a + ax^2, \tag{25}$$

dengan a adalah parameter bebas dan diasumsikan θ_1 dalam bentuk sebagai berikut [2]

$$\theta_1 = 1 - b + bx^2, \tag{26}$$

dengan b adalah parameter, maka substitusikan persamaan (25) dan persamaan (26) ke persamaan (24) diperoleh

$$J = \frac{4}{3}(b^2 + \beta b^2 - \beta ab^2) + \frac{4}{5}\beta ab^2 + \psi^2(1-b)^2 + \frac{2}{3}\psi^2(1-b)b + \frac{1}{5}\psi^2 b^2. \tag{27}$$

Selanjutnya, dengan menurunkan persamaan (27) terhadap b, dengan menetapkan [2]

$$\frac{dJ}{db} = 0, \tag{28}$$

sehingga persamaan (27) menjadi

$$\frac{8}{3}(1+\beta(1-a))b + \frac{8}{5}\beta ab - 2\psi^2(1-b) + \frac{2}{3}\psi^2(1-2b) + \frac{2}{5}b\psi^2 = 0, \tag{29}$$

Untuk mendapatkan nilai a pada persamaan (29), ditetapkan $\theta_0 = \theta_1$, kemudian substitusikan $b = a$ pada persamaan (29), diperoleh

$$(-\frac{16}{15}\beta)a^2 + (\frac{8}{3} + \frac{8}{3}\beta + \frac{16}{15}\psi^2)a - \frac{4}{3}\psi^2 = 0. \tag{30}$$

Persamaan (30) adalah persamaan kuadratik, sehingga dengan menggunakan rumus abc didapat

$$a = -\frac{(-5 - 5\beta - 2\psi^2) + \sqrt{25\beta^2 + 50\beta + 25 + 20\psi^2 + 4\psi^4}}{4\beta}. \tag{31}$$

Kemudian, untuk mendapatkan nilai b, substitusikan persamaan (31) ke persamaan (29) dan disederhanakan, diperoleh

$$b = \frac{5\psi^2}{5 \pm 5\beta + 2\psi^2 + \sqrt{25\beta^2 + 50\beta + 25 + 20\psi^2 + 4\psi^4}}. \tag{32}$$

Selanjutnya, untuk memperoleh nilai J, sederhanakan persamaan (27) menjadi

$$J = \frac{4}{3}b^2 + \frac{4}{3}\beta b^2 - \frac{8}{15}\beta ab^2 + \psi^2 - \frac{4}{3}\psi^2 b + \frac{2}{15}\psi^2 b^2. \tag{33}$$

Kemudian, substitusikan nilai a dan b ke persamaan (33) diperoleh setelah penyerdehanaan adalah

$$\begin{aligned} J = &\frac{100\psi^4}{(5+5\beta+2\psi^2+\sqrt{25\beta^2+50\beta+25+20\psi^2+4\psi^4})^2} \\ &+ \frac{100\psi^4\beta}{(5+5\beta+2\psi^2+\sqrt{25\beta^2+50\beta+25+20\psi^2+4\psi^4})^2} \\ &- \frac{10\psi^4\beta(-5-5\beta-2\psi^2+\sqrt{25\beta^2+50\beta+25+20\psi^2+4\psi^4})}{3\beta(5+5\beta+2\psi^2+\sqrt{25\beta^2+50\beta+25+20\psi^2+4\psi^4})^2} + \psi^2 \\ &- \frac{20\psi^4}{3(5+5\beta+2\psi^2+\sqrt{25\beta^2+50\beta+25+20\psi^2+4\psi^4})} \\ &+ \frac{10\psi^6}{3(5+5\beta+2\psi^2+\sqrt{25\beta^2+50\beta+25+20\psi^2+4\psi^4})^2}. \end{aligned}$$

2.3. Metode Iterasi Variasional

Metode iterasi variasional dapat menyelesaikan masalah persamaan diferensial linear, nonlinear, homogen dan nonhomogen dengan menggunakan approksimasi yang solusinya menuju konvergen.

Perhatikan persamaan diferensial berikut [2]

$$L[u(t)] + N[u(t)] = g(t), \tag{34}$$

dengan L adalah sebuah operator linear, N adalah operator nonlinear, dan $g(t)$ adalah bentuk suku nonhomogen.

Bentuk umum dari metode iterasi variasional adalah untuk membentuk sebuah fungsi koreksi dari persamaan (34), sebagai berikut

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^1 \lambda(s)Lu_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - g(s)ds, \tag{35}$$

dengan λ adalah sebuah pengali Lagrange umum yang dapat diidentifikasi secara optimal, u_n adalah solusi taksiran ke-n, dan $\tilde{u}_n$ adalah sebuah variasi terbatas, dengan $\delta\tilde{u}_n = 0$, dan δ adalah turunan variasional. [3, h. 47]

Untuk menentukan pengali Lagrange λ dapat diidentifikasi secara optimal dengan menggunakan integral parsial [3, h. 47]. Setelah menentukan pengali Lagrange λ, approksimasi u_{n+1}, $n \geq 0$, dengan menggunakan tebakan awal u_0 untuk mendapatkan nilai solusi.

Contoh 1 [3, h. 48]
Diberikan suatu persamaan diferensial linear nonhomogen

$$u_x + u_y = x + y, \qquad u(0, y) = 0, \quad u(x, 0) = x. \tag{36}$$

Fungsi koreksi dapat ditulis dengan menggunakan persamaan (35) dari persamaan (36) menjadi

$$u_{n+1}(x, y) = u_n(x, y) + \int_0^x \lambda(s)\left(\frac{\partial u_n(s, y)}{\partial s} + \frac{\partial \widetilde{u_n}(s, y)}{\partial x} - s - y\right)ds, \tag{37}$$

sehingga persamaan (37) diturunkan terhadap u_n, diperoleh

$$\begin{aligned}\delta u_{n+1}(x, y) = \delta u_n(x, y) - \delta \int_0^x \lambda(s)\frac{\partial u_n(s, y)}{\partial s}ds + \delta \int_0^t \lambda(s)\frac{\partial \widetilde{u_n}(s, y)}{\partial x}ds \\ - \delta \int_0^x \lambda(s)sds - \delta \int_0^x \lambda(s)yds,\end{aligned} \tag{38}$$

dengan $\widetilde{u_n}$ sebagai variasi terbatas, dan $\delta\widetilde{u_n}(x, y) = 0$, sehingga persamaan (38) menjadi

$$\delta u_{n+1}(x, y) = \delta u_n(x, y) + \delta \int_0^x \lambda(s)\frac{\partial u_n(s, y)}{\partial s} - \delta \int_0^x \lambda(s)sds - \delta \int_0^x \lambda(s)yds. \tag{39}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan integral parsial [3, h. 47], sehingga persamaan (39) menjadi

$$\begin{aligned}\delta u_{n+1}(x, y) = (1 + \lambda)\delta u_n(s, y)|_{s=x} - \delta \int_0^t \lambda' u_n(s, y)ds - \delta \int_0^x \lambda(s)sds \\ - \delta \int_0^x \lambda(s)yds,\end{aligned} \tag{40}$$

pada persamaan (40) didapatkan syarat batas

$$\begin{aligned}1 + \lambda|_{s=x} &= 0, \\ \lambda'|_{s=x} &= 0,\end{aligned}$$

dan nilai pengali Lagrange, diperoleh

$$\lambda = -1. \tag{41}$$

Substitusikan nilai pengali Lagrange, $\lambda = -1$, ke fungsi persamaan (37), sehingga diperoleh

$$u_{n+1}(x, y) = u_n(x, y) - \int_0^x \left(\frac{\partial u_n(s, y)}{\partial s} + \frac{\partial \widetilde{u_n}(s, y)}{\partial x} - s - y\right)ds, \tag{42}$$

atau persamaan (42) dalam bentuk iterasi menjadi

$$u_{n+1}(x,y) = u_n(x,y) - \int_0^x \left(\frac{\partial u_n(s,y)}{\partial s} + \frac{\partial u_n(s,y)}{\partial x} - s - y \right) ds, \qquad n \geq 0, \quad (43)$$

dengan $u_0(x,y) = 0$ dan disubstitusikan ke persamaan (43) diperoleh approksimasi sebagai berikut

$$\begin{aligned}
u_1(x,y) &= 0 - \int_0^x \left(\frac{\partial u_n(s,y)}{\partial s} + \frac{\partial u_n(s,y)}{\partial x} - s - y \right) ds = \frac{1}{2}x^2 + xy, \\
u_2(x,y) &= \frac{1}{2}x^2 + xy - \int_0^x \left(\frac{\partial u_n(s,y)}{\partial s} + \frac{\partial u_n(s,y)}{\partial x} - s - y \right) ds = xy, \\
u_3(x,y) &= xy - \int_0^x \left(\frac{\partial u_n(s,y)}{\partial s} + \frac{\partial u_n(s,y)}{\partial x} - s - y \right) ds = xy, \\
\vdots &= \vdots \\
u_n(x,y) &= xy. \qquad (44)
\end{aligned}$$

Pada persamaan (44) didapatkan solusi yaitu

$$u(x,y) = xy.$$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Greenspan, D. 1961. *Introduction to Partial Differential Equations*. McGraw-Hill,Inc. New York.

[2] He, J. H. 2007. Variational Iteration Method-Some Recent Result and New Interpretations. *Applied Mathematics and Computation*. **207**. h. 3-17.

[3] Wazwaz, A. M. 2009. *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*. Springer. New York.