METODE MODIFIKASI NEWTON DENGAN ORDE KONVERGENSI $1+\sqrt{2}$

Lely Jusnita[1*]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*Lelyjusnita@yahoo.com

ABSTRACT

We discuss the modification of Newton's method, which is a *Predictor* and *Corrector* method, to solve a nonlinear equation. Using a series based on the equation error of the method, we show that the order of convergence of the method is $1+\sqrt{2}$ and for each iteration, it requires two function evaluations, so the efficiency index of the method is 2.4142. To see the advantages of the proposed method, we compare the method with some known iterative methods using four test functions by varying an initial guess.

Keywords: *Newton's method, nonlinear equation, root finding, iterative methods.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas modifikasi metode Newton yang berprinsip *Predictor* dan *Corrector* untuk memperoleh akar hampiran persamaan nonlinear. Melalui pendekatan deret ditunjukkan bahwa metode ini mempunyai orde konvergensi $1+\sqrt{2}$, dan untuk setiap iterasinya memerlukan dua perhitungan fungsi, sehingga indeks efisiensinya adalah 2.4142. Selanjutnya untuk melihat keunggulan metode dilakukan uji komputasi menggunakan beberapa fungsi uji dengan menvariasikan tebakan awal.

Kata kunci: *Metode Newton, persamaan nonlinear, akar sederhana, metode iterasi.*

1. PENDAHULUAN

Menemukan akar dari suatu persamaan nonlinear

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

adalah salah satu topik yang dibahas dalam mata kuliah metode numerik. Metode numerik yang populer digunakan untuk menyelesaikan persamaan (1) adalah Metode Newton dengan bentuk iterasi

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots,$$

dengan $f'(x_k) \neq 0$. Metode ini merupakan metode iterasi yang memiliki orde konvergensi kuadratik apabila nilai tebakan awal x_0 diberikan cukup dekat dengan akar [1, h.60] [5, h.11]. Indeks efisiensi dapat dihitung dengan menggunakan rumus $P^{\frac{1}{w}}$ dimana P adalah orde konvergensi dan w adalah banyaknya fungsi yang di evaluasi pada setiap iterasinya [5, h. 12]. Dengan demikian, indeks efisiensi metode Newton adalah 1.4142 [5].

Dalam perkembangannya metode Newton banyak mengalami modifikasi yang bertujuan untuk meningkatkan orde konvergensi dan mempercepat iterasi dalam menemukan akar, diantaranya adalah artikel yang ditulis Mc.Dougnall dan Simon J.Wotherspoon [3] yang berjudul *"A Simple modification of Newton's method to achieve convergence of order* $1+\sqrt{2}$*"*. Artikel inilah yang di*review* pada tulisan ini.

Adapun struktur penulisan artikel ini adalah di bagian dua dibahas modifikasi metode Newton yang diturunkan berdasarkan taksiran garis singgung, kemudian di bagian tiga dilakukan analisa kekonvergenan metode yang didiskusikan. Selanjutnya dilakukan uji komputasi menggunakan program Maple 13 untuk melihat keunggulan metode yang didiskusikan.

2. METODE MODIFIKASI NEWTON

Misalkan akar dari persamaan nonlinear $f(x) = 0$ adalah r, dan fungsi f dapat didiferensialkan sehingga grafik $y = f(x)$ mempunyai garis singgung disetiap titik $(x_k, f(x_k))$. Misalkan x_0 adalah nilai awal untuk mendekati r, maka dapat ditarik sebuah garis singgung L_1 melalui titik $(x_0, f(x_0))$ dengan kemiringan $f'(x_0)$, yang persamaannya diberikan oleh

$$y - f(x_0) = f'\left(\frac{x_0 + x_0^*}{2}\right)(x - x_0),$$

dengan $x_0^* = x_0$ sehingga $f'(x_0) = f'\left(\frac{x_0 + x_0^*}{2}\right)$.

Pada saat garis singgung L_1 memotong sumbu x maka $y = 0$, dan titik potong dengan sumbu x ini disebut x_1 sehingga diperoleh

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'\left(\frac{x_0 + x_0^*}{2}\right)}. \tag{2}$$

Dalam menentukan nilai akar hampiran kedua, terlebih dahulu ditentukan titik x_1^*. Titik x_1^* diperoleh dengan menarik persamaan garis melalui titik $(x_1, f(x_1))$, dengan kemiringan $f'(\frac{x_0+x_0^*}{2})$ yang sama dengan kemiringan garis singgung pada titik x_1, sehingga diperoleh

$$y - f(x_1) = f'\left(\frac{x_0 + x_0^*}{2}\right)(x - x_1),$$

persamaan garis memotong sumbu x maka $y = 0$, dan titik potong dengan sumbu x ini disebut x_1^* sehingga diperoleh

$$x_1^* = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'\left(\dfrac{x_0 + x_0^*}{2}\right)}. \tag{3}$$

Untuk iterasi $k \geq 1$ diperoleh

$$x_k^* = x_k - \frac{f(x_k)}{f'\left(\dfrac{x_{k-1} + x_{k-1}^*}{2}\right)}, \tag{4}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'\left(\dfrac{x_k + x_k^*}{2}\right)}. \tag{5}$$

Persamaan (2) – (5) merupakan bentuk iterasi dua langkah dari Metode Modifikasi Newton (MMN) yang berbentuk *Predictor-Corrector*, persamaan (4) merupakan *Predictor* dan persamaan (5) merupakan *Corrector*.

3. ANALISA KEKONVERGENAN

Sebelum menemukan analisis kekonvergenan dari Metode Modifikasi Newton [MMN], terlebih dahulu berikan definisi persamaan tingkat kesalahan.

Definisi 1 (Persamaan Tingkat Kesalahan) [4]
Misalkan barisan bilangan real $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ konvergen ke r dan nyatakan $e_k = x_k - r$ merupakan notasi untuk kesalahan pada iterasi ke-k, maka relasi

$$e_{k+1} = Ce_k^p + O(e_k^{p+1}), \tag{6}$$

disebut sebagai persamaan tingkat kesalahan dari suatu metode iterasi, dengan nilai p menunjukkan orde konvergensinya.

Teorema 2 Misalkan f, f', dan f'' kontinu untuk semua x disekitar r dan x_0 adalah nilai tebakan awal yang cukup dekat dengan r, maka metode iterasi pada persamaan(2)–(5) memiliki orde konvergensi $1 + \sqrt{2}$.

Bukti
Misalkan r adalah akar pada persamaan nonlinear $f(x) = 0$ maka $f(r) = 0$, dan $f'(r) \neq 0$. Dengan menggunakan Teorema Taylor [2, h.184], ekspansikan $f(x_k)$ dimana $x_k = r$ diperoleh

$$f(x_k) = f(r) + f'(r)(x_k - r) + \frac{f''(r)}{2!}(x_k - r)^2 + O(x_k - r)^3.$$

Karena $f(r)=0$ maka diperoleh

$$f(x_k)=f'(r)e_k+\frac{f''(r)}{2!}e_k^2+O(e_k^3),$$

atau

$$f(x_k)=f'(r)\left(e_k+\frac{f''(r)}{2!f'(r)}e_k^2\right)+O(e_k^3). \tag{7}$$

Misalkan

$$C_2=\frac{1}{2!}\frac{f''(r)}{f'(r)},$$

maka persamaan (7) dapat ditulis dalam bentuk

$$f(x_k)=f'(r)\left(e_k+C_2e_k^2+O(e_k^3)\right).$$

Misalkan

$$e_k^*=x_k^*-r,$$

dan

$$e_k=x_k-r.$$

Maka dari persamaan (4) dan persamaan (5) diperoleh berturut-turut

$$e_k^*=e_k-\frac{f'(r)(e_k+C_2e_k^2+O(e_k^3))}{f'\left(\frac{1}{2}\left(e_{k-1}+e_{k-1}^*+2r\right)\right)}, \tag{8}$$

dan

$$e_{k+1}=e_k-\frac{f'(r)(e_k+C_2e_k^2+O(e_k^3))}{f'\left(\frac{1}{2}\left(e_k+e_k^*+2r\right)\right)}. \tag{9}$$

Untuk $k=0$, ditetapkan

$$e_0^*=e_0,$$

dan dari persamaan (2) didapat

$$e_1=e_0-\frac{f'(r)(e_0+C_2e_0^2+O(e_0^3))}{f'(x_0)}. \tag{10}$$

Dengan mengekspansikan $f'(x_0)$ disekita $x_0=r$ menggunakan Teorema Taylor [2, h.184], maka diperoleh

$$f'(x_0)=f'(r)(1+2C_2e_0+4C_2^2+O(e_0^3)). \tag{11}$$

Sehingga persamaan (10) menjadi

$$e_1 = e_0 - \frac{(e_0 + C_2 e_0^2 + O(e_0^3))}{(1 + 2C_2 e_0 + 4C_2^2 + O(e_0^3))}. \tag{12}$$

Misalkan

$$s = 2C_2 e_0 + 4C_2^2 + O(e_0^3),$$

maka dengan menggunakan identitas geometri diperoleh

$$\frac{1}{1+s} = 1 - 2C_2 e_0 + 4C_2^2 + O(e_0^3). \tag{13}$$

Jadi dengan menggunakan persamaan (13) maka persamaan (12) menjadi

$$e_1 = C_2 e_0^2 + O(e_0^3).$$

Selanjutnya untuk $k = 1$ dengan menggunakan persamaan (8) maka diperoleh

$$e_1^* = e_1 - \frac{f'(r)(e_1 + C_2 e_1^2 + O(e_1^3))}{f'(x_0)}. \tag{14}$$

Dengan menggunakan persamaan (11) diperoleh

$$e_1^* = e_1 - \frac{(e_1 + C_2 e_1^2 + O(e_1^3))}{1 + 2C_2 e_0 + 4C_2^2 + O(e_0^3)}. \tag{15}$$

Misalkan

$$s = 2C_2 e_0 + 4C_2^2 + O(e_0^3).$$

Maka dengan menggunakan identitas geometri diperoleh

$$\frac{1}{1+s} = 1 - 2C_2 e_0 + 4C_2^2 + O(e_0^3). \tag{16}$$

Menggunakan persamaan (16) maka persamaan (15) menjadi

$$e_1^* = 2C_2^2 e_0^3 + O(e_1^3).$$

Dengan cara yang sama sebagaimana mendapatkan e_1 diperoleh

$$e_2 = 2C_2^4 e_0^5 + O(e_1^3).$$

Proses yang sama dapat dilakukan untuk memperoleh

$$e_2^* = 2C_2^6 e_0^7 + O(e_2^3),$$

dan

$$e_3 = 2^2 C_2^{11} e_0^{12} + O(e_2^3).$$

$$
\begin{aligned}
& & e_0^* &= e_0 \\
e_1 &= C_2 e_0^2 & e_1^* &= 2C_2^2 e_0^3 \\
e_2 &= 2C_2^4 e_0^5 & e_2^* &= 2C_2^6 e_0^7 \\
e_3 &= 2^2 C_2^{11} e_0^{12} & e_3^* &= 2^3 C_2^{16} e_0^{17} \\
e_4 &= 2^5 C_2^{28} e_0^{29} & e_4^* &= 2^7 C_2^{40} e_0^{41} \\
e_5 &= 2^{12} C_2^{69} e_0^{70} & e_5^* &= 2^{17} C_2^{98} e_0^{99} \\
e_6 &= 2^{29} C_2^{168} e_0^{169} & e_6^* &= 2^{41} C_2^{238} e_0^{239} \\
e_7 &= 2^{70} C_2^{407} e_0^{408} & e_7^* &= 2^{99} C_2^{576} e_0^{577} \\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}
$$

Jika dilakukan proses di atas untuk beberapa nilai k yang lebih besar, maka akan diperoleh hubungan persamaan tingkat kesalahan yang terjadi sebagai berikut

Bila diperhatikan barisan pangkat dari e_k dan e_k^* pada pasangan langkah di atas berturut-turut adalah

$$2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, ..., \tag{17}$$

dan

$$3, 7, 17, 41, 99, 239, 577, ... \tag{18}$$

Bila diperhatikan persamaan (17) dan (18), suku suku pada barisannya dapat diperoleh dari persamaan rekursif

$$N_i = 2N_{i-1} + N_{i-2}. \tag{19}$$

Mengingat rasio yang dihasilkan, R, pada persamaan (19) sama, yaitu

$$\frac{N_i}{N_{i-1}} = \frac{N_{i-1}}{N_{i-2}} = R,$$

maka dengan membagi persamaan (19) dengan N_{i-1} dapat dilihat bahwa R adalah solusi dari

$$R = 2 + R^{-1},$$

yaitu

$$R_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2},$$

dan karena nilai R positif maka diperoleh

$$R = 1 + \sqrt{2}.$$

Hasil yang sama juga diperoleh dari barisan rasio pangkat e_k dan e_k^* yaitu berturut-turut adalah

$$2.5,\ 2.41,\ 2.4167,\ 2.4138,\ 2.4143,\ 2.4142,\ 2.4142,\ \dots, \tag{20}$$

dan

$$2.33, 2.422, 2.411, 2.4146, 2.4142, 2.4142, 2.4142, \dots. \tag{21}$$

Terlihat bahwa barisan rasio pada persamaan (20) dan (21) konvergen ke 2.4142 atau $1+\sqrt{2}$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa Metode Modifikasi Newton (MMN) dapat menyelesaikan persamaan nonlinear $f(x) = 0$ mempunyai orde konvergensi $1 + \sqrt{2}$.

Metode Modifikasi Newton memerlukan dua kali evaluasi fungsi pada setiap iterasinya, maka indeks efisiensi Metode Modifikasi Newton adalah $(1 + \sqrt{2})^{\frac{1}{2}} \approx 1.5538$.

4. KOMPUTASI NUMERIK

Pada bagian ini, akan dilakukan komputasi numerik untuk melihat kecepatan dari kekonvergenan Metode Modifikasi Newton (MMN), yang dibandingkan dengan metode Newton (MN), metode Wang (WG) [6], dan metode Weerakoon (WF) [7]. Perbandingan dilakukan dengan menggunakan pemrograman Maple 13. Komputer yang digunakan adalah prosesor Intel Core i3. Fungsi yang digunakan dalam melakukan komputasi numerik adalah

1. $f_1(x) = \sin^2 x - x^2 + 1$
2. $f_2(x) = x^2 - e^x - 3x + 2$
3. $f_3(x) = xe^{x^2} - \sin^2 x + 3\cos x + 5$
4. $f_4(x) = e^{x^2+7x-30} - 1$

Dalam menentukan solusi numerik dari keempat fungsi di atas diperlukan tebakan awal x_0, toleransi = 1.0e-27, dan untuk metode Wang memerlukan $\beta = \frac{3}{4}$. Dalam menentukan solusi numerik juga ditentukan kriteria pemberhentian program komputasi yang sama pada setiap metode, yaitu $|x_{k+1} - x_k| <$ toleransi dan $|f(x_k)| <$ toleransi. Hasil dari Komputasi Numerik untuk keempat fungsi di atas ditunjukkan pada Tabel 1.

Tabel 1: Perbandingan Hasil Komputasi untuk Metode Newton, Wang, Weerakoon, dan Metode Modifikasi Newton

No.fungsi	x_0	Metode	k	k_f	$\|f(x_k)\|$	$\|x_k - x_{k-1}\|$	x_k
$f_1(x)$	1.0	MN	8	16	3.4e-101	4.2e-51	1.404491648215 34122603508681 7786868077177
		WG	5	15	2.0e-93	1.1e-31	
		WF	5	15	8.9e-89	3.8e-30	
		MMN	7	14	8.8e-113	3.1e-47	
	3.0	MN	8	16	2.0e-88	1.0e-44	
		WG	6	18	1.5e-242	2.1e-81	
		WF	5	15	7.9e-181	7.8e-61	
		MMN	7	14	1.2e-129	3.1e-54	
	5.0	MN	9	18	1.6e-89	2.8e-45	
		WG	6	18	3.8e-137	2.9e-46	
		WF	6	18	9.7e-108	1.8e-36	
		MMN	8	16	3.4e-143	7.7e-60	
$f_2(x)$	0.0	MN	6	12	6.0e-100	4.1e-50	0.2575302854398 60760455367304 937241781385
		WG	4	12	6.3e-127	2.7e-42	
		WF	4	12	7.8e-106	1.7e-35	
		MMN	5	10	1.2e-105	8.0e-44	
	2.0	MN	6	12	2.9e-55	9.1e-28	
		WG	5	15	5.1e-158	1.2e-52	
		WF	5	15	5.9e-103	1.6e-34	
		MMN	6	12	3.5e-107	1.9e-44	
	3.0	MN	8	16	4.1e-104	3.4e-52	
		WG	5	15	3.1e-102	4.5e-34	
		WF	6	18	5.0e-151	1.5e-50	
		MMN	7	14	7.4e-122	1.6e-50	

No.fungsi	x_0	Metode	k	k_f	$\|f(x_k)\|$	$\|x_k - x_{k-1}\|$	x_k
$f_3(x)$	-1.0	MN	7	14	2.3e-63	8.6e-33	-1.207647827130 918927009416758 356084097760
		WG	5	15	1.2e-121	1.4e-41	
		WF	5	15	4.6e-98	8.8e-34	
		MMN	6	12	2.3e-77	3.8e-33	
	-2.0	MN	10	20	3.8e-81	1.1e-41	
		WG	7	21	1.1e-170	6.2e-58	
		WF	7	21	2.0e-129	3.1e-44	
		MMN	9	18	3.6e-155	2.4e-65	
	-3.0	MN	15	30	6.5e-54	4.6e-28	
		WG	10	30	5.7e-93	5.0e-32	
		WF	11	33	3.0e-154	1.7e-52	
		MMN	13	26	6.9e-86	1.2e-36	
$f_4(x)$	3.2	MN	9	18	1.4e-53	4.0e-28	3.0
		WG	7	21	6.2e-225	2.2e-76	
		WF	7	21	3.1e-181	7.4e-62	
		MMN	8	16	2.2e-86	3.8e-37	
	3.5	MN	14	28	1.2e-94	1.1e-48	
		WG	9	27	3.2e-110	3.8e-38	
		WF	10	30	4.5e-212	3.9e-72	
		MMN	12	24	7.0e-136	1.2e-57	
	5.0	MN	37	74	1.7e-74	1.4e-38	
		WG	24	72	7.0e-133	1.1e-45	
		WF	26	78	1.4e-216	1.2e-73	
		MMN	31	62	2.3e-88	5.7e-38	

Dari Tabel 1 dapat dilihat bahwa Metode Modifikasi Newton (MMN) memberikan iterasi yang lebih sedikit dari metode Newton (MN), namun metode Wang (WG) dan Weerakoon (WF) jauh lebih sedikit dibanding dari pada Metode Modifikasi Newton (MMN) dikarenakan metode Wang (WG) dan Weerakoon (WF) memiliki orde konvergensi yang lebih tinggi. Dalam hal ini, kelebihan Metode Modifikasi Newton (MMN) adalah hanya memerlukan dua kali evaluasi fungsi pada setiap iterasinya dan memiliki indeks efisiensi yang lebih besar yaitu, $(1+\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} \approx 1.5538$.

UCAPAN TERIMA KASIH

Ungkapan terima kasih penulis ucapkan kepada Bapak Supriadi Putra, M.Si selaku pembimbing I dan Bapak Zulkarnain, M.Si selaku pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan tenaga dalam memberikan bimbingan, arahan, dorongan dan kesabaran dalam membimbing penulis menyelesaikan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Atkinson, K. E. 1993. *Elementary Numerical Analysis, 2nd Ed.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

[2] Bartle, R. G. & Shebert. R. D. 1999. *Introduction to Real Analysis, 3rdEd.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

[3] McDougnall, T. J. & Wotherspoon, S. J. 2014. A Simple Modification of Newton's method to Achieve Convergence of order $1 + \sqrt{2}$. *Applied Mathematics*. **29**. **pp**. 20-25.

[4] Sharma, J. R., Guha. R. K. & Sharma. R. 2011. Some Modified Newton's Methods with Fourth-Order Convergence. *Advance in Science Research*. **2**. **pp**. 240-247.

[5] Traub, J. F. 1964. *Iterative Methods for the Solution of Equations*. Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.

[6] Wang, P. 2011. A third Order Family of Newton-Like Iteration Methods for Solving Nonlinear Equations. *Numerical Mathematics and Stochastics*. **3**. **pp**. 13-19.

[7] Weerakoon, S. & Fernando. T. G. I. 2000. A Variant of Newton's Method with Accelerated Third Order Convergence. *Applied Mathematics Letters*. **13**. **pp**. 87-93.