PELABELAN GRACEFUL DAN PELABELAN RHO TOPI PADA GRAF 8-BINTANG DENGAN C_3 UNTUK n GENAP

Zulfi Amri[1], Tua Halomoan Harahap[2]
[1,2] Universitas of Muhammadiyah Sumatera Utara
Jl. Kapten Muktar Basri No. 3 Medan 20238
email: zulfiamri@umsu.ac.id, tuahalomoan@umsu.ac.id

ABSTRAK

Suatu graf G = (V,E) adalah pasangan himpunan terurut dimana V adalah himpunan simpul tak kosong dan E adalah himpunan busur. Pelabelan graceful adalah fungsi injektif f dari himpunan simpul V ke himpunan bilangan $\{0,1,2,\dots.|E|\}$ yang menginduksi fungsi bijektif f' dari himpunan busur E ke himpunan bilangan $\{1,2,\dots.|E|\}$ dimana setiap busur $uv \in E$ dengan simpul $u,v \in V$ berlaku $f'(uv) = |f(u) - f(v)|$, berseta dengan variasi dan modifikasi pelabelan graceful. Ide dasar mengkonstruksi pelabelan graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$ pada graf 8-bintang berawal dari graf A-Bintang dan H-Bintang[1] yang kemudian disebut sebagai graf alfabet bintang dengan pertanyaan bagaimana jika bilangan diberikan graf bintang S_n yang kemudian suatu graf yang dibangun dari 2 graf lingkaran dimana salah satu simpul dari graf lingkaran menjadi pusat graf tersebut sedangkan simpul lainnya diberikan graf bintang S_n. Pada makalah ini diberikan Pelabelan Graceful dan rho topi pada graf 8-Bintang dengan C_3 untuk n genap.

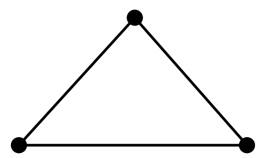
Kata kunci: pelabelan graceful, pelabelan $\hat{\rho}$, graf bintang, graf Lingkaran, graf 8-bintang.

1. Pendahuluan

Suatu graf G adalah pasangan terurut (V, E) dengan V merupakan himpunan *simpul* (*node*) dan E adalah himpunan dari multiset yang terdiri dari dua elemen yakni elemen V dan elemen E masing-masing disebut dengan simpul dan busur. Pelabelan pada suatu graf pada dasarnya adalah memberikan nilai tertentu pada simpul dan atau busur yang memenuhi aturan tertentu pula. Galian (2010) mencatat selama 50 an tahun terakhir sampai data tertanggal 13 November 2010 terdapat 1198 artikel yang membahas tentang bebagai macam pelabelan. [3]. Secara umum, **Pelabelan graceful** pada graf G(V,E) adalah fungsi injektif f dari himpunan simpul V ke himpunan bilangan $\{0,1,2,\dots.|E|\}$ yang menginduksi fungsi bijektif f' dari himpunan busur E ke himpunan bilangan $\{1,2,\dots.|E|\}$ dimana setiap busur $uv \in E$ dengan simpul $u,v \in V$ berlaku $f'(uv) = |f(u) - f(v)|$.

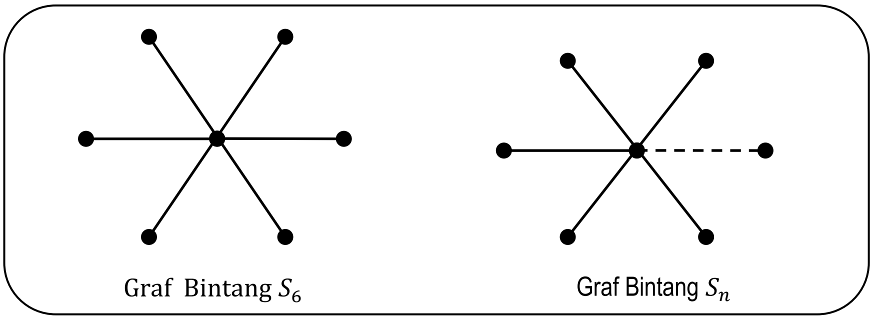
Pelabelan $\hat{\rho}$ adalah modifikasi dari pelabelan graceful yaitu fungsi injektif g dari himpunan simpul V ke himpunan bilangan $\{0,1,2,\dots.|E|+1\}$ yang menginduksi fungsi bijektif g' dari himpunan busur E ke himpunan bilangan $\{1,2,\dots.|E|\}$ dimana setiap busur $uv \in E$ dengan simpul $u,v \in V$ berlaku $g'(uv) = |g(u) - g(v)|$.[1,2,3]

Graf lingkaran (cycle) dengan panjang n adalah graf dengan n simpul $v_1, v_2, \dots, v_n$ dan busur $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$, v_nv_1. Pada Gambar 1.1 diberikan contoh graf lingkaran C_3, C_4, C_5.



Gambar 1.1 Graf Lingkaran (cycle)

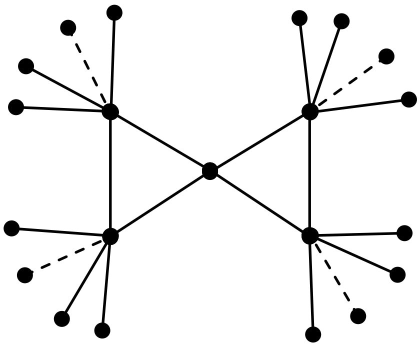
Graf bintang S_n adalah graf yang dibangun dari satu simpul pusat kemudian menambahkan sejumlah simpul daun pada simpuls pusat tersebut. Graf bintang memiliki n+1 simpul dan n busur (Choudum & Kishore, 1996).



Gambar 1.2 Graf Bintang

Graf bintang merupakan sub kelas dari graf pohon, karena graf bintang tidak mempunyai subgraf lingkaran.

Graf 8-bintang dengan unsur pembangun C_3 (Gambar 1.3) adalah suatu graf yang dibangun dari 2 graf lingkaran C_3 dimana salah satu simpul dari graf lingkaran C_3 menjadi pusat graf tersebut sedangkan simpul lainnya diberikan graf bintang S_n.



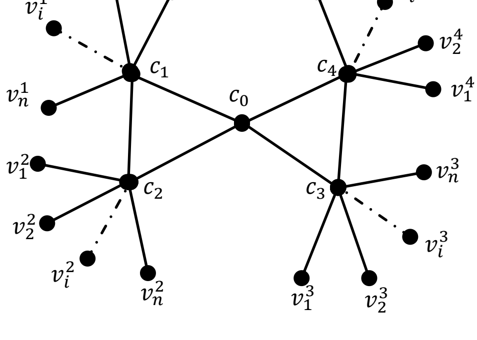
Gambar 1.3 Graf 8-Bintang dengan C_3

2. Metode Penelitian

2.1 Pelabelan Graceful Pada Graf 8-Bintang

Pada bagian ini akan diberikan konstruksi pelabelan graceful pada graf 8-Bintang.

Teorema 2.1 Graf 8-Bintang dengan C_3 memiliki pelabelan graceful untuk n genap
Bukti. Misalkan notasi simpul graf 8-Bintang dengan C_3 diberikan pada Gambar 2.1



Gambar 2.1 Notasi Graf 8-Bintang dengan C_3

 ISSN: 2442-6024
e-ISSN: 2442-7063

Pada Gambar 2.1 diatas terlihat bahwa himpunan simpul graf 8-Bintang adalah $\{ c_0, \ldots, c_4, v_1^1, .., v_n^1, v_1^2, \ldots, v_n^2, v_1^3, \ldots, v_n^3, v_1^4, \ldots, v_n^4\}$, dan himpunan busur graf 8-Bintang adalah $\{c_0c_1, c_1c_2, c_2c_3, c_3c_0, c_0c_4, c_4c_5, c_5c_6, c_6c_0, c_1v_1^1, \ldots, c_1v_n^1, c_2v_1^2, \ldots, c_2v_n^2, c_3v_1^3, \ldots, c_3v_n^3, c_4v_1^4, \ldots, c_4v_n^4\}$ sehingga banyaknya elemen V dan E masing-masing adalah $|V| = 4n + 5$ dan $|E| = 4n + 6$.

Didefinisikan pelabelan dengan mengunakan notasi f untuk simpul sebagai berikut :

$f(c_0) = n + 1$ (2.1)
$f(c_1) = 0$ (2.2)
$f(c_2) = 3n + 6$ (2.3)
$f(c_3) = n + 2$ (2.4)
$f(c_4) = 3n + 5$ (2.5)
$f(v_i^1) = 4n + 6 - i;$ $\quad i = 1, 2 \ldots, n$ (2.6)
$f(v_i^2) = i;$ $\quad i = 1, 2 \ldots, n$ (2.7)

$$f(v_i^3) = \begin{cases} n + 2 + 2i; & i = 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}n \\ n + 3 + 2i; & i = \frac{1}{2}n + 1, \ \frac{1}{2}n + 2, \ldots, n \end{cases} \quad (2.8)$$

$$f(v_i^4) = \begin{cases} n + 1 + 2i; & i = 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}n + 1 \\ n + 2 + 2i; & i = \frac{1}{2}n + 2, \ldots, n \end{cases} \quad (2.9)$$

Pelabelan f yang didefinisikan pada persamaan (2.1)-(2.9), melabelkan setiap simpul anggota graf 8-Bintang merupakan pemetaan injektif dari V ke himpunan $\{0, 1, \ldots, |E|\}$. Setiap busur $uv \in E$ diberikan label dengan pelabelan f', yang diinduksikan oleh pelabelan simpul melalui persaman $f'(uv) = |f(u) - f(v)|$ pada graf 8-bintang yang dinyatakan sebagai berikut:

$f'(c_0c_1) = |f(c_0) - f(c_1)| = |(n+1) - (0)| = |n+1|$ (2.10)
$f'(c_1c_2) = |f(c_1) - f(c_2)| = |(0) - (3n + 6)| = |3n + 6|$ (2.11)
$f'(c_2c_0) = |f(c_2) - f(c_0)| = |(3n + 6) - (n+1)| = |2n+5|$ (2.12)
$f'(c_0c_3) = |f(c_0) - f(c_3)| = |(n+1) - (n + 2)| = |1|$ (2.13)

$f'(c_3c_4) = |f(c_3) - f(c_4)| = |(n + 2) - (3n + 5)| = |2n + 3|$ (2.14)

$f'(c_4c_0) = |f(c_4) - f(c_0)| = |(3n + 5) - (n+1)| = |2n + 4|$ (2.15)

$f'(c_1v_i^1) = |f(c_1) - f(v_i^1)| = |(0) - (4n + 6 - i)| = |4n + 6 - i|;$ $\quad i = 1, 2 \ldots, n$ (2.16)
$f'(c_2v_i^2) = |f(c_2) - f(v_i^2)| = |(3n + 6) - i| = |3n + 6 - i|;$ $\quad i = 1, 2 \ldots, n$ (2.17)

Oleh karena $f(v_i^3)$ mempunyai dua kondisi seperti persamaan (2.8) maka nilai busur yang bertetangga dengan simpul $f(v_i^3)$ dapat dinyatakan sesuai yang disebutkan pada kondisi persaman 2.8 yaitu untuk $i = 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}n$ diperoleh persaman (2.18) dan untuk kondisi $i = \frac{1}{2}n + 1, \frac{1}{2}n + 2, \ldots, n$ diperoleh persamaan (2.19) dibawah ini:

$f'(c_3v_i^3) = \left|f(c_3) - f(v_i^3)\right| = |(n + 2) - (n + 2 + 2i)| = 2i;$ $\quad i = 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}n$ (2.18)
$f'(c_3v_i^3) = \left|f(c_3) - f(v_i^3)\right| = |(n + 2) - (n + 3 + 2i)| = 2i + 1;$ $\quad i = \frac{1}{2}n + 1, \frac{1}{2}n + 2, \ldots, n$ (2.19)

Hal yang sama dilakukan untuk memperoleh $f'(c_4v_i^4)$ dengan kondisi yang dinyatakan pada persamaan (2.9). nilai busur $f'(c_4v_i^4)$ seperti pada persamaan (2.20 - 2.21) berikut:

$f'(c_4v_i^4) = |f(c_4) - f(v_i^4)| = |(3n + 5) - (n + 1 + 2i)| = 2i;$ $\quad i = 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}n + 1$ (2.20)

$$f'(c_4v_i^4) = |f(c_4) - f(v_i^4)| = |(3n+5) - (n+2+2i)| = 2i+1; \quad i = \tfrac{1}{2}n+2, \dots, n \tag{2.21}$$

Berdasarkan pelabelan f yang didefinisikan pada persamaan (2.1)-(2.9) setiap simpulnya memiliki label yang berbeda dan merupakan sub himpunan bilangan $\{0,1,2,\dots,|E|\}$ dan selalu tidak memuat pelabelan simpul $2n+4$ dan $3n+4$. Kemudian pelabelan f' yang diinduksi oleh pelabelan simpul f, memberikan nilai yang berbeda pula pada masing-masing busur seperti pada persamaan (2.10)–(2.21) yang merupakan himpunan bilangan $\{1,2,\dots,|E|\}$. Berdasarkan hasil diatas, maka f merupakan pelabelan *graceful* pada graf 8-Bintang dengan n genap. ■

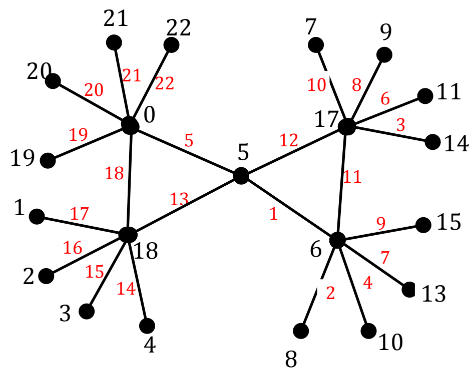
3. Hasil

3.1 Pelabelan $\hat{\rho}$ Graf 8-Bintang dengan C_3 untuk n genap

Pada bagian ini akan diberikan konstruksi pelabelan $\hat{\rho}$ pada graf 8-bintang. **Akibat 3.1.** Graf 8-Bintang dengan C_3 memiliki pelabelan $\hat{\rho}$ untuk n genap. **Bukti.** Misal notasi graf 8-bintang dengan C_3 ditunjukkan pada Gambar 2.1

Menggunakan cara yang sama pada pembuktian *graceful* pada Teorema 2.1 dengan mendefinisikan pelabelan simpul $g = f$ seperti persamaan (2.1)-(2.9) dan pelabelan busur $g'(uv) = |g(u) - g(v)|$ dimana $uv \in E$ dengan $u, v \in V$ diperoleh pelabelan simpul dari graf 8-bintang ke subhimpunan bilangan $\{0,1,2,\dots,|E|+1\}$, dan pelabelan busur dari graf 8-bintang ke himpunan bilangan $\{1,2,\dots,|E|\}$. Jadi graf 8-Bintang dengan C_3 memiliki pelabelan $\hat{\rho}$.■

Berikut ini diberikan contoh pelabelan graceful untuk graf 8-bintang



Gambar 2.3 Contoh Graf 8-Bintang dengan C_3

4. Simpulan

Pada makalah ini telah diberikan kontruksi pelabelan Graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$ pada graf 8-Bintang yang dibangun dari 2 graf lingkaran dimana salah satu simpul dari graf lingkaran menjadi pusat graf tersebut sedangkan simpul lainnya diberikan graf bintang S_n. Lebih umum dapat dibuktikan bahwa graf 8-Bintang memiliki pelabelan graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$.

ISSN: 2442-6024
e-ISSN: 2442-7063

5. Daftar Pustaka

[1] Amri Z, Ahmad M, Huda N, Supriadi, Sugeng K.A, (2011) *Pelabelan Graceful, Skolem Graceful dan Pelabelan Pada Graf* (S_n,*3*). Prosiding Seminar Nasional UNY, Yogyakarta, hal. M 131- M 136.

[2] Amri Z, Sugeng K.A, Supriadi, Huda N, (2011) *Pelabelan Graceful, Skolem Graceful dan Pelabelan Pada Graf A-Bintang dan H-Bintang*. Preprint.

[3] Amri Z, Sugeng K.A, (2011) *Pelabelan Graceful, Skolem Graceful dan Pelabelan Pada Graf Kelabang*. Jurnal Euria Pendendidikan Matematika FKIP UMSU, Medan, volume 4 no. 2 hal 109-115.

[4] Bača and Miller, (2008). *Super Edge-Antimagic Graphs*: *A Wealth of Problems and Some Solution*. USA: Brown Walker Press.

[5] Galian J.A, (2010). Dynamic survey of graph Lebeling. *Electronic Journal of kombinatorics,17#ds6*

[6] Nurul.H dan Amri. Z, (2012*) Pelabelan Graceful, Skolem Graceful dan Pelabelan Pada Graf A-Bintang dan H-Bintang*. Jurnal Matematika Murni dan Terapan EPSILON. Banjarbaru. Volume 6 no. 2 hal. 30-37

[7] Rosen, K. H. (2007). *Discrete Mathematics and Its Applications* (6th ed.). Toronto: McGraw-Hill.

[8] Sevenhot, Sugeng K.A, Denny R.S, (2010). *Pelabelan Skolem Graceful dan Pelabelan Pada Gabungan Dua Graf. Prosiding Seminar Nasional UNPAR, Bandung,* hal *MS 183- MS 191.*