

PROFIL AKTIVITAS MAHASISWI CALON GURU MATEMATIKA DALAM MEMAHAMI DEFINISI FORMAL BARISAN KONVERGEN DENGAN VISUALISASI

Darmadi

FP MIPA IKIP PGRI Madiun

E-mail: darmadi7868482@yahoo.com

Abstrak: Beberapa mahasiswi kesulitan memahami definisi formal barisan konvergen. Mereka tidak mengetahui apa yang harus dilakukan untuk memahami. Pada makalah ini, dibahas kegiatan-kegiatan yang dilakukan mahasiswi calon guru matematika dalam memahami definisi formal barisan konvergen dengan menggunakan visualisasi. Kegiatan-kegiatan ini memberikan gambaran tahap-tahap memahami definisi dengan visualisasi. Kegiatan-kegiatan tersebut diperoleh berdasarkan hasil penelitian deskriptif-eksploratif dengan pendekatan kualitatif. Untuk mendapatkan data, dipilih satu mahasiswi sebagai subjek penelitian. Untuk mendapatkan data yang alami, digunakan metode wawancara berbasis tugas dengan format semi-terstruktur dalam mengumpulkan data. Untuk memvalidasi data, digunakan triangulasi waktu. Untuk menganalisis data, digunakan reduksi, kategorisasi, sintesisasi, dan penarikan kesimpulan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa untuk memahami definisi formal barisan konvergen, mahasiswi: mengenali, membayangkan, memperlihatkan gambaran barisan konvergen, memperlihatkan gambaran atribut definisi, dan menyimpulkan.

Kata kunci: mahasiswi calon guru matematika, memahami, definisi formal, barisan konvergen, visualisasi.

Salah satu kritik terhadap dunia pendidikan setelah dibandingkan dengan pendidikan di negara lain yang lebih maju adalah kurangnya pemahaman. Sehingga, salah satu dan yang pertama dari tujuan pelajaran matematika menurut Permendiknas No. 22 (Depdiknas, 2006) tentang standar isi adalah memahami konsep matematika, menjelaskan keterkaitan antar konsep dan mengaplikasikan konsep

atau algoritma, secara luwes, akurat, efisien, dan tepat, dalam pemecahan masalah.

Salah satu cara memahami definisi adalah dengan visualisasi. Menurut Darmadi (2012b), barisan-barisan bilangan real dapat divisualisasikan dalam bentuk gambar/grafik. Barisan konvergen dapat didefinisikan sebagai barisan yang 'menuju' ke suatu bilangan real. Definisi tersebut, belum atau tidak bisa disebut sebagai definisi formal.

Istilah ‘menuju’ perlu dijelaskan secara matematis. Definisi formal barisan bilangan real konvergen adalah sebagai berikut.

“Barisan $\{a_n\}_{n \geq 1}$ dikatakan konvergen jika dan hanya jika terdapat $a \in \mathbf{R}$ sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ sehingga untuk $n \geq n_0(\varepsilon)$ berlaku $|a_n - a| < \varepsilon$ ”

Beberapa buku panduan untuk analisis real mempunyai cara penyajian, notasi, simbol, dan istilah berbeda. Memahami konsep atau definisi formal barisan konvergen penting untuk memahami konsep atau definisi barisan Cauchy dan barisan menyusut. Selain itu, dapat dikembangkan menjadi limit barisan, dapat memperdalam pemahaman tentang fungsi, barisan bilangan real, barisan terbatas di atas, terbatas di bawah, terbatas, divergen ke $-\infty$, dan divergen ke ∞ .

Hasil tes kemampuan memahami definisi formal dan mengsketsa grafik yang dilakukan Darmadi (2011b) menunjukkan bahwa kekayaan imajeri mahasiswa masih kurang. Menurut Tall (2005), hasil penelitian menunjukkan bahwa pelajar yang pandai cenderung lebih fokus pada penggunaan simbol-simbol daripada visualisasi, seperti matematikawan yang lebih mengutamakan penggunaan simbol dalam pekerjaannya dan kurang memberi perhatian pada penggunaan visual. Schunk (2012) menjelaskan bahwa anak-anak menggunakan pencitraan atau pembayangan ketika dibebaskan untuk melakukan cara lain, tetapi orang dewasa lebih lambat dalam merespon untuk melakukan pencitraan dan tidak secara eksplisit berusaha untuk mempertajam pencitraan mereka. Darmadi (2012a) menjelaskan perlunya membangun pembelajaran matematika yang menyenangkan dengan visualisasi. Suatu alternatif untuk memahami definisi yaitu

dengan memvisualisasikannya (Darmadi, 2012b).

Visualisasi penting dalam belajar matematika. Nemirovsky R dan Noblemany (1997) mengatakan bahwa beberapa penelitian menunjukkan pentingnya visualisasi untuk belajar matematika. Tall (1991) menjelaskan bahwa penggunaan visualisasi dapat membantu dalam pembuktian matematika. Tall (1994a) menjelaskan bahwa matematikawan menggunakan pembayangan konsep atau pencitraan untuk menuntun mereka. Tall (2002) menjelaskan kembali bahwa dalam menganalisis pada umumnya bayangan konsep dapat mendukung pembuktian formal. Hasil beberapa penelitian lokal, seperti: Fitri Rositasari (2006), Suhartini (2007), dan Darmadi (2008) menunjukkan bahwa penggunaan gambar visual dapat meningkatkan hasil belajar matematika.

Ide memahami dengan menggunakan visualisasi bukan hal baru. Hartono (2010) menceritakan bahwa Plato menganalogikan ingatan sebagai sebuah blok lilin, dimana persepsi dan pikiran membentuk cetakan di atasnya. Aristoteles menjelaskan bahwa cetakan tersebut berupa ‘gambar’ yang memperkenalkan konsep pembayangan mental. Sampai, Hume & Decartes mengidentifikasi ‘ide’ sebagai ‘gambaran mental’.

Salah suatu mata kuliah wajib bagi mahasiswa program studi pendidikan matematika di IKIP PGRI Madiun adalah analisis real. Analisis real perlu dipelajari oleh mahasiswa untuk meningkatkan kemampuan menganalisis. Salah satu materi analisis real adalah barisan bilangan real. Beberapa permasalahan muncul dalam pembelajaran analisis real; seperti: 1) Hasil belajar analisis real kurang memuaskan (Darmadi, 2008a), 2) Mahasiswa kesulitan belajar analisis real sulit

sejak awal (Darmadi, 2008b), 3) Pemahaman mahasiswa terhadap definisi formal pada kalkulus kurang (Darmadi, 2009a); 4) Mahasiswa kesulitan belajar analisis real (Darmadi, 2009b). Beberapa metode dan model pembelajaran dengan aneka media pembelajaran yang dianggap sesuai telah dicoba; seperti: pengembangan model pembelajaran analisis real berbasis teori David Tall (Darmadi, 2009b) dan penggunaan Lesson Study dalam pembelajaran analisis real (Darmadi, 2010). Meskipun demikian, kemampuan berpikir analitis, kreatif, kritis, dan inovatif masih perlu untuk selalu ditingkatkan (Darmadi, 2011a).

Beberapa penelitian menunjukkan bahwa perempuan tidak lebih baik dalam bidang visual spasial, perempuan tidak lebih baik dalam bidang akademik matematika. Berdasarkan uraian di atas, diperoleh kesimpulan perlunya mendapatkan gambaran atau deskripsi kegiatan-kegiatan mahasiswi calon guru matematika dalam memahami definisi formal barisan konvergen dengan visualisasi.

A. Memahami definisi formal barisan konvergen dengan visualisasi

Suatu definisi mengandung konsep dan suatu konsep sering dinyatakan dalam bentuk definisi. Definisi sering diidentikkan dengan konsep. Menurut Solso, Maclin, & Maclin (2007), konsep adalah ide abstrak yang merepresentasikan kategori-kategori informasi atau unit-unit pengetahuan. Menurut Sternberg (2008), konsep adalah sebuah ide atau pemikiran atau gagasan tentang sesuatu. Suatu konsep dapat berkaitan dengan konsep lain sehingga membentuk konsep baru yang disebut kategori. Kategori adalah sebuah konsep yang berfungsi untuk mengorganisasikan atau menunjukkan ekuivalensinya dengan aspek-aspek konsep

lain berdasarkan ciri-ciri umum atau kemiripan. Konsep lebih mengacu pada ide, sedangkan definisi lebih mengacu pada pernyataan. Dalam kamus besar bahasa Indonesia, definisi diartikan sebagai batasan. Definisi merupakan pernyataan yang membatasi dengan jelas suatu konsep atau kategori.

Poincaré (dalam Tall, 1988) mengatakan bahwa bagi ahli filsafat atau ilmuwan, definisi yang baik adalah definisi yang mencakup semua objek yang didefinisikan dan hanya mencakup objek-objek itu sendiri sesuai aturan logis. Namun dalam dunia pendidikan, definisi yang baik adalah definisi yang dapat dipahami oleh siswa. Menurut Polya (1973), kata-kata yang digunakan pada definisi-definisi di kamus tidak jauh berbeda dengan definisi-definisi pada matematika namun definisi-definisi tersebut ditulis dengan *spirit* yang berbeda. Definisi pada matematika menggunakan simbol-simbol atau pernyataan-pernyataan matematis.

Suharnan (2005) menjelaskan bahwa definisi formal diperoleh ketika individu mencapai taraf formal; yaitu: dapat memberi nama suatu konsep baik nama intrinsiknya maupun atribut-atribut yang dapat diterima, secara tepat dapat memberi contoh-contoh mana objek yang memiliki atribut-atribut tersebut, dan dapat menyatakan alasan yang menjadi dasar pendefinisian. Istilah definisi formal sering digunakan Tall untuk membedakan dengan definisi yang tidak matematis. Definisi formal adalah definisi yang unsur intrinsik maupun unsur atribut-atribut dinyatakan dalam bentuk simbol-simbol matematis.

Konsep atau definisi barisan konvergen terdapat pada mata kuliah analisis real. Menganalisis bilangan real berarti menguraikan bagian-bagian himpunan

bilangan real atau suatu bilangan real untuk mengetahui hubungan antarbagian atau bilangan real sehingga diperoleh pengertian dan sifat-sifat secara tepat, menyeluruh, dan mendalam. Barisan bilangan real didefinisikan sebagai suatu fungsi dari bilangan asli ke bilangan real. Misalkan a_n adalah fungsi yang membentuk barisan bilangan real, maka barisan bilangan real tersebut disajikan dalam bentuk $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ oleh Goldberg (1976), (a_n) oleh Bartle & Sherbet (1982), dan $\langle a_n \rangle$ oleh Wasan & Prakash. Pada pembahasan ini, barisan bilangan real dinotasikan dengan $\{a_n\}_{n \geq 1}$. Untuk mempersingkat istilah, barisan bilangan real selanjutnya disebut barisan.

Tiap definisi mempunyai jenis atau tingkat kesulitan untuk dipahami. Menurut Darmadi (2013a), tingkat kesulitan memahami definisi formal dengan visualisasi dapat dikategorikan dalam tiga tingkatan. Tingkatan pertama adalah memvisualisasikan barisan bilangan real berdasarkan kedudukannya, yaitu: barisan monoton naik, barisan monoton turun, barisan naik tegas, barisan turun tegas, dan barisan konstan, atau kombinasinya. Tingkatan kedua adalah memvisualisasikan barisan bilangan real berdasarkan eksistensi batasannya, yaitu: barisan terbatas di atas, barisan terbatas di bawah, dan barisan terbatas, atau kombinasinya. Tingkatan ketiga adalah memvisualisasikan barisan bilangan real berdasarkan arah kecenderungannya, yaitu: barisan divergen ke ∞ , barisan divergen ke $-\infty$, dan barisan konvergen, atau yang sejenis seperti barisan Cauchy dan barisan menyusut.

Proses memahami sering disebut pemahaman. Suparman (2012) menyebut pemahaman meliputi perilaku menerjemahkan, menafsirkan, dan menyimpulkan konsep dengan menggunakan kata-kata atau simbol-simbol yang dipilihnya

sendiri. Menurut Solso dan Maclin (2007), memahami adalah memaknai sesuatu secara terkoordinasi melalui serangkaian tahapan, yang meliputi proses pengidentifikasian fitur-fitur, penyandian, penggunaan kosakata, pembagian peran kasus, dan seterusnya. Menurut Peaget (dalam Solso dan Maclin, 2007), memahami adalah proses adaptasi intelektual di mana pengalaman dan ide-ide baru diinteraksikan dengan apa yang sudah diketahui oleh seseorang yang sedang belajar untuk membentuk struktur pengertian yang baru. Skemp (dalam Solso dan Maclin, 2007) mengatakan “*to understand something means to assimilate it into an appropriate schema*”. Menurut Anderson & Krathwohl (2007), memahami berarti mengkonstruksi makna dari pesan-pesan pembelajaran, baik secara lisan, tulisan atau grafis. Siswa memahami ketika menghubungkan pengetahuan “baru” dan pengetahuan lama mereka. Lebih tepatnya, pengetahuan yang baru masuk dipadukan dengan skema-skema dan kerangka-kerangka kognitif yang telah ada.

Memahami melibatkan beberapa proses-proses kognitif. Menurut Anderson & Krathwohl (2007), proses-proses kognitif dalam kategori memahami meliputi menafsirkan, mencontohkan, mengklasifikasikan, merangkum, menyimpulkan, membandingkan dan menjelaskan.

Hasil penelitian Pinto dan Tall (1999) menunjukkan bahwa terdapat dua cara dalam memahami definisi, yaitu: pemberian makna (*giving meaning*) ke definisi-definisi dan akibat teori dengan membangun dari awal bayangan konsep awal, dan mengambil makna (*extracting meaning*) dari definisi formal melalui deduksi formal. Menurut Solso dan Maclin (2007), untuk memahami sesuatu dapat dilakukan secara *bottom-up* atau *top-down*. Untuk memahami, diperlukan aktivitas

membaca. Menurut Schunk (2012), pembaca yang bagus maupun yang buruk mencari materi-materi yang penting dan memerhatikannya. Informasi-informasi yang diperoleh dari aktivitas membaca selanjutnya digunakan untuk mempersepsi. Menurut Suharnan (2005), persepsi adalah proses mendeteksi dan menginterpretasi stimulus yang diterima oleh alat-alat indera manusia, dengan melibatkan penggunaan pengetahuan yang telah disimpan dalam ingatan. Untuk beberapa kasus, kadang diperlukan perhatian lebih untuk dapat memahami. Menurut Suharnan (2005), perhatian adalah pemusatan pikiran terhadap suatu objek atau tugas tertentu dan pada saat yang sama mengabaikan objek atau tugas yang lain. Menurut Schunk (2012), perhatian diperlukan pada banyak fase dalam membaca: memproses fitur-fitur ortografis, menarik makna-makna, menilai penting tidaknya informasi, dan memfokuskan perhatian pada informasi yang penting.

Setelah mendapatkan input-input visual, tahap berikutnya adalah membayangkan. Menurut Suharnan (2005), pembayangan adalah proses membayangkan kembali di dalam pikiran mengenai objek-objek yang pernah dipersepsi. Untuk membayangkan, perlu mengingat untuk mengenali pola. Menurut Suharnan (2005), ingatan adalah penyimpanan pengetahuan di dalam sistem pikiran. Menurut Suharnan (2005), pengenalan pola adalah proses awal mengenali stimulus yang tersusun secara kompleks melalui sistem alat-alat indera manusia seperti penglihatan dan pendengaran. Membayangkan berarti mencari atau membentuk prototipe. Solso, Maclin & Maclin (2007) menjelaskan teori-teori pembentukan prototipe, yaitu: teori tendensi sentral dan teori frekuensi atribut. Menurut teori tendensi sentral, sebuah prototipe

dikonseptualisasikan mewakili nilai rata-rata suatu set eksemplar. Menurut teori frekuensi atribut, sebuah prototipe mewakili model atau kombinasi atribut-atribut yang paling sering dialami seseorang. Salah satu bentuk prototipe adalah gambaran mental.

Setelah mendapatkan pembayangan mental, tahap selanjutnya adalah merepresentasikan atau memperlihatkan. Suharnan (2005) menjelaskan bahwa representasi mental mengenai suatu masalah merupakan sesuatu yang sangat penting dan menentukan untuk memahami masalah. Selain menggunakan gambar/grafik, untuk merepresentasikan gambaran mental yang diperoleh, dapat dilakukan dengan bahasa lisan atau tulisan. Menurut Suharnan (2005), bahasa adalah kata-kata yang ditulis atau diucapkan melalui lisan.

Tahap akhir dalam memahami adalah menarik kesimpulan. Untuk menarik kesimpulan diperlukan penalaran. Menurut Suharnan (2005), penalaran adalah penarikan kesimpulan menurut aturan logika. Untuk menentukan kesimpulan, diperlukan pembuatan keputusan. Menurut Suharnan (2005), pembuatan keputusan adalah suatu proses memilih, menaksir atau memprediksi berdasarkan informasi. Menyimpulkan seperti membentuk konsep. Menurut Sternberg (2008), pembentukan konsep adalah pengelompokan atau pengklasifikasian sejumlah objek atau ide menurut sifat-sifat atau atribut-atribut tertentu. Menurut Hulse dkk., (1981), terdapat beberapa teori pembentukan konsep/definisi, yaitu: teori asosiasi, teori mediasi, pengujian hipotesis, dan teori pemrosesan informasi. Teori asosiasi menerangkan bahwa pembentukan konsep merupakan suatu proses asosiasi respons yang muncul selama belajar dengan contoh-contoh. Teori mediasi berpandangan bahwa konsep dibentuk karena respons mediasi terhadap

stimulus dan respons terhadap contoh. Teori pengujian hipotesis menyatakan bahwa pembentukan konsep didasarkan pada pengujian berbagai hipotesis. Teori pemrosesan informasi menyatakan bahwa pembentukan konsep berdasarkan dari hasil pemrosesan informasi dengan penalaran logis. Berdasarkan teori pemrosesan informasi, suatu definisi dapat dibentuk berdasarkan dari hasil pemrosesan informasi.

Memahami menjadi banyak perhatian. Suparman (2012) dan Anderson & Krathwohl (2007) menuliskan bahwa pemahaman paling banyak digunakan pada jenjang perguruan tinggi maupun jenjang dibawahnya karena jenjang pemahaman merupakan dasar yang sangat menentukan untuk mempelajari dan menguasai jenjang-jenjang taksonomi diatasnya seperti penerapan, analisis, sistesis, dan evaluasi atau bentuk yang lebih terintegrasi seperti pemecahan masalah. Oleh karena itu, dibutuhkan cara-cara yang efisien untuk memahami. Kebutuhan dapat menjadi salah satu faktor yang dapat mempengaruhi cara individu dalam memahami.

Memahami merupakan suatu aktivitas atau kegiatan yang tidak sederhana. Suharnan (2005) menjelaskan tiga ganjalan mental yang dapat menghalangi dalam memahami definisi; yaitu keterpakuan fungsional, keajegan mental, dan penambahan bingkai perseptual. Keterpakuan fungsional merupakan kecenderungan untuk beranggapan bahwa fungsi dan kegunaan definisi adalah tetap sesuai rancangan dan keinginan pembuat. Keajegan mental menunjukkan pada kecenderungan untuk mempertahankan aktivitas mental secara berulang-ulang. Penambahan bingkai perseptual terjadi ketika individu seolah-olah melihat bingkai tersamar sehingga membatasi gerak-langkah dalam memahami definisi formal. Menurut

Suharnan (2005), definisi, individu, dan interaksi dapat mempengaruhi individu dalam memahami. Perkembangan kognitif juga dapat mempengaruhi pengaktifan informasi. Tall (1995) menjelaskan bahwa perkembangan kognitif untuk memahami matematika tingkat formal dari tahap enaktif, dapat dibangun melalui visual-platonik maupun numerik-simbolik seperti yang kemudian lebih dikembangkan dan dijelaskan oleh Tall (2005) bahwa berpikir matematis melibatkan tiga dunia pemikiran matematika yang terhubung, yaitu: 1) berdasarkan objek konsep yang mengikuti yang didasarkan pada makna hasil pengamatan, pendeskripsian, pendefinisian, dan penurunan sifat-sifat secara deduktif yang dibangun dari pengalaman berpikir ke pembuktian Euclide (berkaitan dengan gambar/visual); 2) berdasarkan aksi penggunaan simbol-simbol yang diperoleh dari skema-aksi menjadi terpikirkan operasi konsep gabungan proses dan konsep; dan 3) berdasarkan sifat formal dan aksiomatik yang lebih fokus pada pengembangan sistem aksiomatik berdasarkan pada definisi formal dan pembuktian himpunan-teoritis.

B. Mahasiswa calon guru matematika

Menurut Uno (2007), matematika merupakan alat pikir, alat komunikasi, alat untuk memecahkan berbagai persoalan praktis, dengan unsur-unsurnya meliputi logika dan intuisi, analisis dan konstruksi, generalitas dan individualitas. Menurut Diene (1971), belajar matematika berarti memahami hubungan antara simbol dan hubungan diantaranya untuk memperoleh konsep. Menurut Soedjadi dan Moesono (dalam Sutiarto, 2000), belajar matematika bertujuan menata nalar, membentuk sikap, dan menumbuhkan kemampuan matematika.

Mahasiswa calon guru matematika dituntut mempunyai kemampuan mengkomunikasikan matematika. Alfeld (2000) menjelaskan tentang kemampuan komunikasi matematika; yaitu: kemampuan komunikasi matematika meliputi kemampuan menjelaskan konsep-konsep dan fakta-fakta matematika dalam bentuk sederhana, mempermudah hubungan logika antara fakta-fakta dan konsep-konsep yang berbeda, memperjelas hubungan antara segala sesuatu yang baru yang dekat dengan pemahaman matematika, dan mengidentifikasi prinsip-prinsip yang diberikan matematika yang membuat semua bekerja.

Mahasiswa adalah individu yang belajar di jenjang pendidikan tinggi. Kemp (1994) memberi ciri-ciri mahasiswa yaitu memasuki program dengan kesiapan belajar yang tinggi, membawa banyak pengalaman ke kelas, kurang luwes dalam berinteraksi, ingin diperlakukan sesuai dengan kedewasaannya, dan mempunyai inisiatif serta mandiri. Malcom (dalam Lieb, 1991) mencirikan enam perilaku belajar mahasiswa, yaitu: menentukan sendiri arah dan tujuan belajarnya, memiliki seperangkat pengalaman hidup, berorientasi kepada tujuan dan relevansi, cenderung bersifat praktis, serta membutuhkan penghargaan. Kolh (1984) membagi tahap belajar mahasiswa dalam empat fase yaitu berangkat dari pengalaman, menggunakan pengalaman itu untuk observasi dan refleksi, asimilasi observasi itu ke dalam kerangka konseptual atau dihubungkan dengan konsep dari pengetahuan terdahulu, diuji dan diterapkan dalam situasi yang berbeda. Umumnya, seseorang yang belajar di tingkat perguruan tinggi dibedakan dalam mahasiswa laki-laki yang biasa disebut mahasiswa dan mahasiswa perempuan yang biasa disebut mahasiswi.

Studi Darmadi (2013b) tentang “Profil Berpikir Visual Mahasiswa Laki-Laki Calon Guru Matematika Dalam Memahami Definisi Formal Pada Barisan Bilangan Real” menunjukkan bahwa subjek memahami definisi formal melalui tiga kegiatan yaitu mengenali, memvisualisasi, dan menyimpulkan. Studi Darmadi (2013b) tentang “Profil Berpikir Visual Mahasiswa Perempuan Calon Guru Matematika Dalam Memahami Definisi Formal Pada Barisan Bilangan Real” menunjukkan bahwa: subjek memahami definisi formal melalui tiga kegiatan yaitu mengenali, memvisualisasi, dan menyimpulkan.

Pada penelitian-penelitian di atas didesain tiga tahapan pengumpulan data. Tahap pertama untuk mengetahui profil berpikir visual dalam memahami satu definisi dengan sembilan topik dan empat tipe (total 36 tugas). Tahap kedua untuk mengetahui profil berpikir visual dalam memahami sekelompok definisi setipe beda topik (total 12 tugas). Tahap ketiga untuk mengetahui profil berpikir visual dalam memahami sekelompok definisi dengan sembilan tipe satu topik (total 9 tugas). Cakupan penelitian ini dinilai terlalu luas, kurang tajam, dan kurang valid. Sehingga perlu lebih fokus untuk mendapatkan profil pemahaman mahasiswa calon guru matematika dalam memahami definisi formal barisan konvergen.

Metode Penelitian

Pada penelitian ini digunakan penelitian deskriptif-eksploratif dengan pendekatan kualitatif. Untuk mendapatkan kedalaman informasi, dipilih satu mahasiswa perempuan sebagai subjek penelitian. Mahasiswa diambil dari program studi pendidikan matematika FP MIPA IKIP PGRI Madiun semester genap tahun akademik

2012/2013 dengan kriteria: 1) baru mengambil matakuliah analisis real, 2) mempunyai IPK di atas 2,75, 3) nilai kalkulus dan pengantar dasar matematika minimal B, 4) komunikatif, jujur, dan bersedia menjadi subjek penelitian.

Instrumen utama pada penelitian ini adalah peneliti sendiri. Peneliti dituntut untuk: 1) memiliki sifat responsif, adaptif, dan holistik; 2) sadar pada konteks tak terkatakan; dan 3) mampu segera memproses, mengklarifikasi, meringkas, menjelajahi dan memahami jawaban. Instrumen pendukung penelitian ini adalah pedoman wawancara berbasis tugas. Wawancara ditujukan untuk mengetahui profil berpikir visual subjek dalam memahami definisi formal barisan konvergen dalam tugas. Tugas diberikan dengan menggunakan lembar tugas. Lembar tugas berisi sejumlah definisi formal barisan konvergen yang telah divalidasi oleh pakar.

Pengumpulan data dilakukan secara alami dengan wawancara berbasis tugas. Wawancara dilakukan secara mendalam dengan format semi-terstruktur. Format ini dipilih untuk mengetahui kejujuran dan keterbukaan subjek dalam menyampaikan informasi. Subjek yang sedang diwawancarai diberi kebebasan untuk mengikuti kecenderungan pikiran mereka sendiri termasuk dalam menentukan arah topik pembicaraan sehingga membentuk fokus pembicaraan. Semua aktivitas wawancara direkam dengan handycam untuk penyusunan transkrip data.

Data-data hasil wawancara selanjutnya ditriangulasi dan divalidasi sehingga diperoleh data yang sah dan valid. Keabsahan data pada penelitian ini lebih ditekankan pada uji validitas internal atau uji kredibilitas yang diperoleh dari memperpanjang pengamatan, meningkatkan ketekunan, triangulasi, analisis kasus negatif,

dan membercheck. Sementara uji validitas eksternal atau uji transferabiliti, uji reliabilitas atau uji kebergantungan, dan uji objektivitas atau uji konfirmabilitas dinilai oleh validator. Jika data belum valid, maka perlu dilakukan wawancara kembali dan data-data yang ada selanjutnya ditriangulasi dan divalidasi kembali. Demikian, sampai diperoleh data yang benar-benar sah dan valid. Langkah-langkah analisis data meliputi: reduksi, kategorisasi, sintesisasi, dan penarikan kesimpulan.

Hasil dan Pembahasan

Terlepas dari benar atau salah jawaban subjek, adanya perbedaan pemahaman sebelum dan sesudah mengerjakan tugas dan wawancara, menunjukkan bahwa aktivitas-aktivitas yang telah dilakukan subjek dapat menunjukkan tahap-tahap dalam memahami.

A. Hasil

1. Aktivitas subjek

Setelah membaca definisi, subjek membuat rangkuman dengan cara: memperhatikan definisi, menyajikan dalam bentuk yang lebih sederhana atau bentuk matematis, dan menyajikan dalam bentuk rangkuman definisi sebagai berikut.

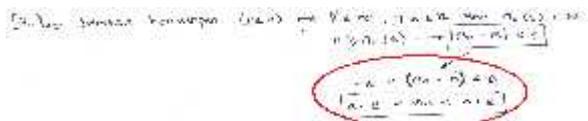
$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ barisan konvergen (ke } a) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n, m \geq N, |a_n - a_m| < \epsilon$$

Setelah membuat rangkuman, subjek menentukan kata kunci dengan cara: memperhatikan rangkuman atau bagiannya, pertimbangkan 'ke-kompleks-an', memilih kata kunci sebagai berikut.

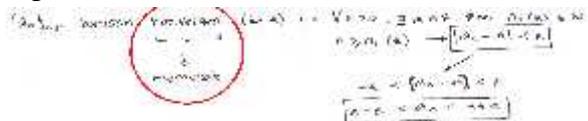
$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ barisan konvergen (ke } a) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \geq N, |a_n - a| < \epsilon$$

Setelah menentukan kata kunci, subjek menjabarkan kata kunci dengan cara: memperhatikan kata kunci, mengingat sifat harga mutlak, dan menjumlahkan ketiga ruas

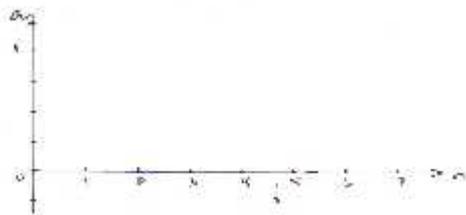
dengan α sehingga diperoleh hasil sebagai berikut.



Setelah menjabarkan kata kunci, subjek mengingat tentang konvergen dengan cara: memperhatikan istilah konvergen pada rangkuman definisi, membayangkan grafik yang memusat, dan merepresentasikan dalam bentuk catatan bahwa konvergen itu memusat seperti berikut.



Setelah mengingat tentang konvergen, subjek membuat sumbu koordinat dengan cara: memperhatikan bayangan tentang konvergen, mencoba memunculkan gambaran untuk contoh dengan menggambarkan sumbu-sumbu koordinat seperti berikut.



Setelah membuat sumbu koordinat, subjek membuat contoh barisan dengan cara: membayangkan beberapa grafik beserta fungsinya, memilih pembayangan mental yang sesuai dengan bayangan barisan konvergen, dan merepresentasikan rumus barisan sebagai berikut.

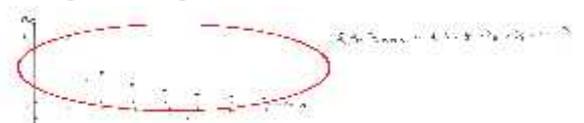


Setelah membuat contoh barisan, subjek mendaftar anggota barisannya dengan cara: memperhatikan rumus contoh barisan $\{1/n\}_{n \geq 1}$, mensubstitusikan tiap anggota domain $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ secara berurutan pada rumus

contoh barisan $\{1/n\}_{n \geq 1}$, sehingga diperoleh daftar anggota barisannya sebagai berikut.



Setelah mendaftar anggota barisan, kemudian subjek mengplot anggota barisan dengan cara: memperhatikan daftar anggota barisan, menyajikan dalam bentuk plot, melanjutkan plot titik-titik secara berurutan sesuai pasangan sebagai berikut.



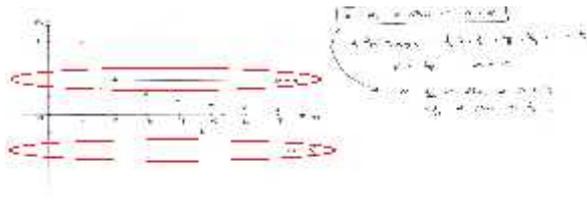
Setelah mengplot anggota barisan, subjek menentukan nilai ϵ dan α . Untuk menentukan nilai ϵ , subjek memperhatikan atribut ϵ pada rangkuman/definisi dan gambar/grafik, mempertimbangkan nilai ϵ yang berada di 'tengah-tengah' $1 = a_1$ dan $0 = a$, menentukan nilai $\epsilon = 1/2$. Untuk menentukan nilai α , subjek memperhatikan plot barisan pada gambar/grafik, membayangkan plot lanjutan pada gambar/grafik, sehingga dapat menemukan nilai $\alpha = 1$ sebagai berikut.



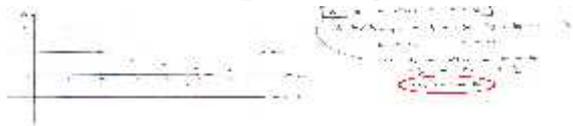
Setelah menentukan nilai ϵ dan α , subjek menjabarkannya dengan cara: memperhatikan nilai ϵ dan α , mensubstitusikan nilai ϵ dan α pada hasil penjabaran kata kunci, sehingga diperoleh hasil penjabaran sebagai berikut.



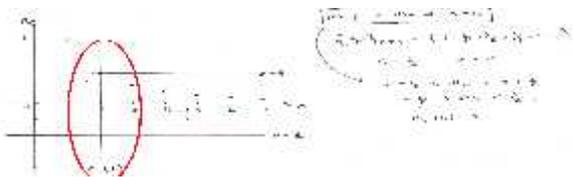
Setelah menjabarkan nilai ϵ dan α , subjek memberi garis $\alpha \pm \epsilon$ pada gambar dengan cara: memperhatikan nilai $\alpha - \epsilon$, $\alpha + \epsilon$, serta gambar/grafik, merepresentasikan dalam bentuk garis horisontal sebagai berikut.



Setelah memberi garis $a \pm \epsilon$, subjek menentukan nilai $n_{\epsilon}(a)$ dengan cara: memperhatikan garis $a \pm \epsilon$ pada gambar/grafik dan juga memperhatikan atribut $n_{\epsilon}(a)$ pada rangkuman/definisi, mempertimbangkan yang paling 'dekat'. menentukan nilai $n_{\epsilon}(a)$. sebagai berikut.



Setelah menentukan nilai $n_{\epsilon}(a)$, subjek memberi garis $n_{\epsilon}(a)$ dengan cara: memperhatikan nilai $n_{\epsilon}(a)$, membayangkan nilai-nilai $n_{\epsilon}(a)$ yang bisa diambil untuk menentukan nilai $n_{\epsilon}(a)$, dan merepresentasikan garis $n_{\epsilon}(a)$ sebagai berikut.



Setelah memberi garis $n_{\epsilon}(a)$, subjek menyimpulkan. Untuk membuat simpulan pertama, subjek memperhatikan catatan pada rangkuman bahwa konvergen itu memusat, mencocokkan dengan pemahaman visualnya, dan merepresentasikan dalam bentuk tulisan sebagai berikut.

• Simpulan : • Barisan konvergen memusat

Untuk membuat simpulan kedua, subjek memperhatikan rumus barisan umumdand hasil penjabaran kata kunci, mencocokkan dengan pemahaman, dan menyajikan dalam bentuk tulisan sebagai berikut.

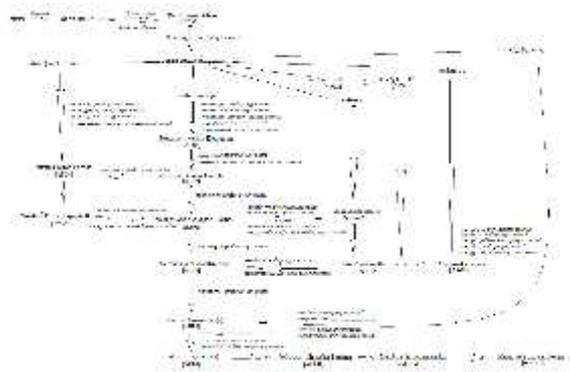
• barisan $\{a_n\}_{n \geq 1}$ disebut konvergen jika $a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$

Untuk membuat simpulan ketiga, subjek memperhatikan contoh barisan yang telah

dibuat $\{1/n\}_{n \geq 1}$, mencocokkan dengan pemahamannya, dan merepresentasikan dalam bentuk tulisan sebagai berikut.

• $\{1/n\}_{n \geq 1}$ merupakan barisan konvergen karena mendekati 0.

Berdasarkan uraian di atas, maka aktivitas-aktivitas subjek dalam memahami definisi formal barisan konvergen adalah sebagai berikut: merangkum, menentukan kata kunci, menjabarkan kata kunci, mengingat tentang konvergen, membuat sumbu koordinat, menentukan contoh barisan, mendaftar anggota barisan, mengplot anggota barisan, menentukan nilai ϵ , menentukan nilai a , menjabarkan nilai ϵ dan a , menggambar garis $a \pm \epsilon$, menentukan nilai $n_{\epsilon}(a)$, menggambar garis $n_{\epsilon}(a)$, membuat simpulan pertama, kedua, dan ketiga. Skema berpikir visual subjek dalam memahami definisi formal barisan konvergen sebagai berikut.



2. Kegiatan-kegiatan subjek

Suatu aktivitas akan dipertahankan jika aktivitas tersebut berguna atau dianggap penting dengan tujuan tertentu. Oleh karena itu, perlu dilakukan analisis pentingnya aktivitas berdasarkan pada respon dan kegunaannya sehingga dapat digunakan untuk mengkategorikan berdasarkan tujuannya. Data yang digunakan untuk analisis adalah data yang berkaitan dengan tujuan dan pentingnya aktivitas.

Aktivitas merangkum dinilai penting sekali oleh subjek untuk mempermudah dan menghemat waktu supaya tidak membaca berulang-ulang. Rangkuman merupakan bentuk ringkas dari definisi. Aktivitas ini cenderung dipertahankan untuk mengenali definisi.

Aktivitas menentukan kata kunci dinilai penting sekali oleh subjek untuk lebih memfokuskan perhatian ketika harus memperhatikan definisi atau rangkuman. Rangkuman memuat beberapa bagian informasi seperti $\{a_n\}_{n \geq 1}$ konvergen (ke a), $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in \mathbb{R}, n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, n \geq n_0(\varepsilon)$, dan $|a_n - a| < \varepsilon$. Dengan memperhatikan kata kunci, akan mempermudah. Aktivitas ini cenderung dipertahankan untuk lebih mengenali definisi.

Aktivitas menjabarkan kata kunci dinilai penting sekali oleh subjek untuk memudahkan memberi makna kata kunci. Dengan demikian, jika diperlukan, subjek tidak perlu berpikir ulang untuk memahami bentuk $|a_n - a| < \varepsilon$. Aktivitas ini cenderung dipertahankan untuk lebih mengenali definisi.

Aktivitas mengingat tentang konvergen dinilai sangat penting oleh subjek supaya dapat melanjutkan ke tahap berikutnya. Jika aktivitas ini tidak dilakukan, subjek mengalami kesulitan menggambarkan atau bahkan akan berhenti sampai penjabaran kata kunci. Aktivitas ini cenderung dipertahankan untuk membayangkan gambaran definisi.

Aktivitas membuat sumbu koordinat dinilai berguna oleh subjek untuk merangsang pemikiran. Aktivitas ini merupakan cara subjek untuk memberi motivasi pada diri sendiri sehingga dapat memunculkan pembayangan mental yang sudah ada. Aktivitas ini cenderung dipertahankan untuk membayangkan gambaran definisi.

Aktivitas memberikan contoh barisan dinilai penting sekali oleh subjek untuk mengambil $\varepsilon, a, n_0(\varepsilon)$. Jika subjek tidak memberikan contoh barisan, maka subjek tidak akan dapat memvisualisasikan simbol-simbol yang lain seperti $\varepsilon, a, n_0(\varepsilon)$. Aktivitas ini cenderung dipertahankan untuk memperlihatkan gambaran definisi.

Aktivitas mendaftar anggota barisan dinilai tidak penting karena bisa hanya dipikirkan saja oleh subjek, namun dapat aktivitas ini mempermudah mengplotkan. Jika subjek tidak melakukan aktivitas ini, maka subjek akan kesulitan untuk mengplotkan anggota barisan pada gambar/grafik. Aktivitas ini cenderung dipertahankan untuk memperlihatkan gambaran definisi.

Aktivitas mengplotkan dinilai sangat penting oleh subjek untuk mengetahui gambar/grafik dari barisan yang telah dibuat sehingga dapat menerapkan nilai-nilai ε, a , dan $n_0(\varepsilon)$ yang ada di rangkuman atau definisi. Aktivitas ini cenderung dipertahankan untuk memperlihatkan gambaran definisi.

Aktivitas menentukan nilai ε dan a dinilai penting sekali oleh subjek untuk memahami definisi. Notasi ε dan a terdapat pada definisi. Setelah mengetahui adanya notasi ε dan a pada definisi, subjek mengaplikasikan dengan memberi nilai ε dan a . Aktivitas ini cenderung dipertahankan untuk memperlihatkan gambaran definisi.

Aktivitas menjabarkan nilai ε dan a dinilai berguna oleh subjek untuk menemukan nilai $a - \varepsilon = -1/2$ dan $a + \varepsilon = 1/2$. Jika subjek tidak menjabarkan nilai ε dan a , maka untuk aktivitas berikutnya subjek harus menjabarkan nilai ε dan a kembali. Aktivitas ini cenderung dipertahankan untuk memperlihatkan gambaran definisi.

Aktivitas menggambarkan garis $a \pm \varepsilon$ dinilai penting sekali oleh subjek untuk mengetahui visualisasi $a - \varepsilon$ dan $a + \varepsilon$ pada gambar/grafik. Jika aktivitas ini tidak dilakukan, maka tidak akan diperoleh visualisasi dari garis $a - \varepsilon$ dan $a + \varepsilon$. Aktivitas ini cenderung dipertahankan untuk memperlihatkan gambaran $a - \varepsilon$ dan $a + \varepsilon$.

Aktivitas menentukan nilai $n_{\varepsilon}(\varepsilon)$ dinilai berguna oleh subjek untuk memahami salah satu atribut definisi yaitu $n_{\varepsilon}(\varepsilon)$. Memahami yang dimaksud adalah memperlihatkan gambaran pada gambar/grafik. Atribut $n_{\varepsilon}(\varepsilon)$ berhubungan dengan atribut-atribut yang lain seperti $n_{\varepsilon}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ dan $n \geq n_{\varepsilon}(\varepsilon)$. Dalam definisi, atribut tersebut saling berhubungan dengan atribut-atribut yang lain sehingga membentuk konsep kekonvergenan. Aktivitas ini cenderung dipertahankan untuk memperlihatkan gambaran $n_{\varepsilon}(\varepsilon)$.

Aktivitas menggambarkan garis $n_{\varepsilon}(\varepsilon)$ dinilai penting sekali oleh subjek agar tahu hubungan antara $n_{\varepsilon}(\varepsilon)$ dengan $a - \varepsilon$ dan $a + \varepsilon$. Gambaran $a - \varepsilon$ dan $a + \varepsilon$ adalah garis horisontal sejajar sumbu X. Gambaran $n_{\varepsilon}(\varepsilon)$ adalah garis vertikal sejajar sumbu Y. Hubungan yang diperoleh adalah $n_{\varepsilon}(\varepsilon)$ harus diambil sehingga plot-plot barisan yang berada di antara garis $a - \varepsilon$ dan $a + \varepsilon$. Aktivitas ini cenderung dipertahankan untuk memperlihatkan gambaran definisi.

Aktivitas menyimpulkan dinilai berguna oleh subjek untuk memperjelas kembali terhadap apa yang sudah dilakukan. Aktivitas ini dilakukan untuk mengambil pelajaran dari yang sudah dikerjakan. Sehingga, aktivitas ini cenderung dipertahankan untuk menyatakan pemahaman.

Aktivitas merangkum, menentukan kata kunci, dan menjabarkan kata kunci, merupakan aktivitas-aktivitas yang bertujuan

untuk mengenali definisi. Aktivitas merangkum merupakan usaha untuk mengumpulkan informasi dari definisi yang diberikan. Aktivitas menentukan kata kunci dan menjabarkan merupakan usaha mengeksplorasi informasi. Pada aktivitas-aktivitas ini, subjek belum menggunakan pembayangan mental. Oleh karena itu, tiga aktivitas pertama ini dapat dikategorikan dalam satu kegiatan yaitu mengenali.

Aktivitas mengingat tentang konvergen dan menggambarkan sumbu koordinat, merupakan aktivitas-aktivitas yang bertujuan memanggil dan mengembangkan pembayangan mental. Subjek mengingat tentang konvergen pada aktivitas mengingat kata kunci. Subjek memotivasi diri untuk memperjelas ingatan tersebut dengan menggambarkan sumbu koordinat. Subjek mengingat gambaran tentang konvergen dan memperjelas hanya dalam pikiran (tidak direpresentasikan). Subjek hanya merepresentasikan sumbu-sumbu koordinat saja. Dua aktivitas ini dapat dikategorikan dalam satu kegiatan yaitu membayangkan.

Aktivitas-aktivitas berikutnya, yaitu: menentukan contoh barisan, mendaftar anggota barisan, mengplot anggota barisan, menentukan nilai ε dan a , menjabarkan nilai ε dan a , menggambar garis $a \pm \varepsilon$, menentukan nilai $n_{\varepsilon}(\varepsilon)$, dan menggambar garis $n_{\varepsilon}(\varepsilon)$, merupakan aktivitas-aktivitas yang bertujuan untuk memperlihatkan gambaran barisan konvergen dengan atribut-atribut yang ada pada definisi. Atribut-atribut yang terdapat definisi antara lain: a_n , ε , a , dan $n_{\varepsilon}(\varepsilon)$. Untuk mengetahui hubungan dari semua atribut secara visual, maka atribut-atribut tersebut perlu untuk digambarkan. Atribut $\{a_n\}_{n \geq 1}$ digambarkan melalui aktivitas menentukan contoh barisan, mendaftar anggota barisan, mengplot anggota barisannya. Atribut ε dan a digambarkan melalui aktivitas menentukan

nilai ε dan a , menjabarkan nilai ε dan a , menggambar garis $a \pm \varepsilon$. Atribut $n_{\varepsilon}(\varepsilon)$ digambarkan melalui aktivitas menentukan nilai $n_{\varepsilon}(\varepsilon)$ dan menggambar garis $n_{\varepsilon}(\varepsilon)$. Sembilan aktivitas ini dapat dikategorikan dalam satu kegiatan yaitu memperlihatkan.

Aktivitas membuat simpulan yang terdiri dari tiga sub aktivitas yaitu membuat simpulan pertama, membuat simpulan kedua, dan membuat simpulan ketiga, merupakan aktivitas-aktivitas yang bertujuan untuk mengambil pelajaran dari yang sudah dikerjakan. Ketika subjek memperhatikan atau tertarik pada istilah konvergen dan pemahaman subjek bahwa konvergen itu memusat, maka subjek membuat simpulan bahwa barisan konvergen memusat. Ketika subjek memperhatikan atau tertarik pada istilah konvergen dan hasil pejabaran kata kunci, maka subjek memberi simpulan bahwa barisan konvergen itu memenuhi hasil penjabaran kata kunci. Ketika subjek memperhatikan atau tertarik pada contoh barisan yang diberikan dan pemahaman tentang barisan konvergen, maka subjek memberi simpulan bahwa contoh barisan yang diberikan merupakan barisan konvergen. Subjek menyimpulkan berdasarkan informasi yang menarik untuk diperhatikan dan dicocokkan dengan pemahamannya. Tiga aktivitas terakhir ini dapat dikategorikan dalam satu kegiatan yaitu menyimpulkan.

Berdasarkan uraian di atas, maka aktivitas-aktivitas memahami dapat dikategorikan dalam empat kegiatan, sebagai berikut: mengenali, membayangkan, memperlihatkan gambaran barisan, memperlihatkan gambaran atribut-atribut pada definisi, dan menyimpulkan.

B. Pembahasan

1. Kegiatan/tahap mengenali

Tahap pertama untuk memahami definisi formal barisan konvergen adalah mengenali dengan merangkum definisi. Subjek merangkum dengan memperhatikan bagian-bagian definisi. Informasi sebagai input pada aktivitas merangkum diperoleh dari membaca definisi. Definisi, petunjuk, atau tugas yang diberikan pada subjek merupakan bentuk stimulus eksternal. Membaca merupakan suatu usaha untuk menjangkau atau menerima informasi dari definisi (stimulus eksternal) melalui mata (sensor memori). Fakta ini sesuai penjelasan Atkinson & Shiffrin (1968) bahwa stimulus eksternal diterima oleh sensor memori sebagai suatu informasi.

Subjek merangkum definisi dengan merepresentasikan informasi yang diperoleh dalam bentuk yang lebih sederhana atau secara matematika. Jika informasi dari hasil memperhatikan bagian-bagian definisi adalah informasi awal, maka penyajian, penulisan, atau merepresentasikan dalam bentuk yang lebih sederhana atau matematis adalah representasi hasil pengolahan informasi. Subjek adalah mahasiswa matematika, dalam memori subjek dominan adalah simbol-simbol atau pernyataan matematis. Fakta ini sesuai penjelasan Atkinson & Shiffrin (1968) bahwa informasi yang diterima selanjutnya disesuaikan dengan informasi yang ada pada memori untuk diproses melalui elaborasi dan pengkodean.

Setelah merangkum, subjek menentukan kata kunci. Terdapat proses pencarian kata kunci atau bagian yang bisa dijabarkan dari rangkuman. Fakta ini menunjukkan bahwa terjadi proses pemindaian informasi dari memori sesuai dengan penjelasan Sternberg (2008) bahwa orang menarik informasi dari memori yang aktif dengan melakukan pemindaian terhadap item-item secara berurutan.

Subjek menentukan kata kunci dengan mempertimbangkan 'ke-kompleks-an'. Jika rangkuman merupakan informasi awal, maka bagian yang perlu dijabarkan atau kata kunci merupakan hasil pengolahan informasi. Tujuan kedua langkah ini adalah mendapatkan informasi yang perlu untuk dijabarkan. Hal ini sesuai dengan penjelasan Sternberg (2008) bahwa pengolahan, keluar, dan masuknya informasi dalam WM/STM diarahkan oleh kontrol pemrosesan informasi atau tujuan tertentu.

Setelah menentukan dan memperhatikan kata kunci, subjek mengingat sifat harga mutlak dan mengoperasikan sehingga diperoleh hasil penjabaran kata kunci. Subjek menjabarkan untuk mendapatkan informasi yang lebih bermakna. Jika bagian ringkasan yang belum jelas atau kata kunci adalah informasi awal, maka hasil penjabaran atau pengoperasian adalah hasil pengolahan informasi. Hal ini menunjukkan terjadinya proses elaborasi untuk mendapatkan informasi, sesuai penjelasan Suharnan (2005) bahwa elaborasi melibatkan proses pemerikayaan (penambahan) makna informasi.

Untuk menjabarkan kata kunci yaitu $|a_n - a| < \varepsilon$ menjadi $a + \varepsilon < a_n < a - \varepsilon$, subjek mengingat sifat harga mutlak. Subjek perlu mengingat sifat harga mutlak untuk menjabarkan. Hal ini menunjukkan bahwa terjadi pemanggilan informasi dari memori, sesuai penjelasan Atkinson & Shiffrin (1968) bahwa pada pemrosesan informasi kadang diperlukan memanggil informasi dari lembar tugas.

Setelah memperoleh hasil penjabaran kata kunci, subjek juga tidak langsung menggunakan hasil penjabaran untuk proses selanjutnya. Subjek langsung membayangkan gambaran definisi dengan memperhatikan istilah konvergen yang ada pada rangkuman.

Hal ini menunjukkan bahwa informasi hasil membayangkan disimpan terlebih dahulu pada memori, sesuai penjelasan Atkinson & Shiffrin (1968) bahwa beberapa informasi kadang perlu disimpan dalam lembar tugas.

Tahap mengenali sangat penting untuk mendapatkan input-input visual. Jika dalam memahami tidak ada tahap mengenali, maka tidak akan diperoleh input-input visual untuk pembayangan mental. Hal ini sesuai pendapat Roam (2011) bahwa mengenali adalah tahap memilih informasi untuk diperiksa secara rinci berdasarkan pola-pola yang diketahui.

Untuk dapat mengenali definisi dengan baik, kadang perlu usaha yang keras. Beberapa mahasiswa dapat menyerah atau putus karena tidak mampu mengenali dengan baik. Kasus seperti ini peneliti temukan dalam pemilihan subjek. Beberapa calon subjek menyerah atau putus asa memahami definisi formal pada barisan bilangan real dengan menggunakan gambar/grafik. Hal ini sesuai pendapat Rose & Nicholl (2006) bahwa kita harus menggali informasi sebanyak-banyaknya untuk memahami pesan yang benar.

Input tahap ini adalah informasi dari definisi, tugas, atau petunjuk yang diberikan. Output tahap ini adalah input-input visual. Pada tahap ini terjadi pemindaian, transformasi, dan manipulasi informasi. Pemindaian informasi dilakukan untuk menjaring informasi-informasi yang penting dari definisi, tugas, atau petunjuk yang diberikan. Pemindaian informasi dapat dilakukan secara berulang-ulang sesuai kemampuan. Manipulasi informasi dilakukan untuk mendapatkan informasi yang lebih bermakna. Untuk memanipulasi informasi diperlukan usaha mengingat informasi lain. Transformasi informasi dilakukan untuk menyimpan informasi-informasi yang diperoleh sehingga perlu direpresentasikan

dalam bentuk tulisan. Pemrosesan informasi pada tahap ini bersifat serial sesuai urutan-urutan tertentu.

2. Kegiatan/tahap membayangkan

Setelah mengenali, subjek membayangkan. Untuk membayangkan, subjek memperhatikan dan mengingat konvergen. Istilah konvergen pada rangkuman merupakan suatu input visual sebagai stimulus eksternal. Jika rumus umum dan istilah konvergen adalah informasi awal, maka pembayangan mental yang diperoleh adalah hasilnya. Hal sesuai penjelasan Atkinson dan Shiffrin (1968) bahwa stimulus eksternal diterima oleh memori sensor sebagai suatu informasi.

Untuk membayangkan diperlukan input-input visual. Untuk mengingat tentang konvergen, subjek membayangkan banyak grafik fungsi yang berupa garis sambung melengkung dalam pikiran. Gambar/grafik yang berada dipikiran merupakan pembayangan mental dari barisan konvergen. Hal ini menunjukkan bahwa terdapat penyandian visual dalam pikiran. Pembayangan mental merupakan bentuk informasi visual. Fakta ini sesuai teori penyandian-ganda (dalam Sternberg (2008)) yang menyatakan bahwa suatu informasi dapat direpresentasikan dalam dua bentuk sandi yaitu visual dan verbal.

Setelah mengingat atau membayangkan banyak grafik fungsi yang berupa garis sambung melengkung, subjek mengelompokkan gambaran fungsi-fungsi yang menuju ke suatu bilangan tertentu. Proses pengorganisasian informasi yang terjadi pada tahap membayangkan sesuai penjelasan Suharnan (2005) bahwa menurut teori Gestalt secara alamiah manusia mengorganisasikan objek-objek perseptual.

Setelah mengelompokkan gambaran fungsi-fungsi yang menuju ke suatu bilangan tertentu, subjek memilih salah satu grafik fungsi. Hal ini menunjukkan terjadinya proses mempertahankan informasi dalam kondisi aktif karena sifat WM/STM. Hal ini sesuai penjelasan Atkinson dan Shiffrin (1968) bahwa sebagian informasi akan dilupakan atau hilang selama pemrosesan informasi. Hal ini juga sesuai penjelasan Schunk (2012) bahwa WM/STM terbatas kapasitas dan durasinya, yaitu: terbatas dan jika tidak segera diproses, maka informasi akan menghilang. Pemilihan informasi lebih pada prinsip kemiripan/keserupaan pada teori Gestalt (dalam Suharnan, 2005) mengatakan bahwa objek-objek visual yang memiliki struktur sama atau mirip cenderung dipersepsi atau dilihat sebagai satu kesatuan kelompok.

Subjek tidak merepresentasikan pembayangan mental tentang konvergen secara eksplisit kecuali hanya sumbu koordinatnya. Sumbu koordinat yang digambarkan subjek ternyata juga akan digunakan untuk memperlihatkan. Perbedaan representasi proses pada tahap membayangkan adalah wajar dan menunjukkan kealamian data. Hal ini sesuai pendapat Moleong (2012) bahwa data pada penelitian kualitatif adalah alami apa adanya.

Subjek membayangkan setelah mengenali. Pemrosesan informasi untuk membayangkan dapat tidak linear. Hal ini sesuai penjelasan Roam (2011) bahwa proses berpikir visual dapat tidak linear karena proses berpikir visual dipengaruhi oleh banyak faktor dari materi, dari individu, maupun interaksi.

Tahap membayangkan sangat penting untuk mendapatkan gambaran atau pembayangan umum atau kasar tentang definisi yang dapat menjadi dasar dalam pembuatan contoh barisan konvergen. Jika

tidak ada tahap membayangkan, maka subjek tidak akan mendapatkan pembayangan mental sehingga gambaran definisi juga tidak akan dapat diperoleh. Akibatnya, proses atau tahap memahami dapat terhenti sampai tahap ini. Hal ini sesuai pendapat Roam (2011) bahwa membayangkan adalah tahapan mengolah input-input visual yang telah dikumpulkan dan dipilih sehingga mendapatkan keputusan.

Input tahap ini adalah input visual yang diperoleh dari tahap mengenali. Output tahap ini adalah pembayangan mental yang dapat direpresentasikan dalam bentuk gambar/grafik atau bagiannya. Pada tahap ini, terjadi penjarangan dan transformasi informasi. Penjarangan informasi dilakukan untuk mendapatkan input visual, yaitu lebih memperhatikan istilah konvergen daripada informasi-informasi lain yang ada pada rangkuman definisi. Transformasi informasi dari input visual menjadi pembayangan mental dilakukan untuk mendapatkan pembayangan mental barisan konvergen. Transformasi informasi dari pembayangan mental menjadi gambar/grafik atau bagiannya dilakukan untuk memperjelas atau memperlihatkan pembayangan mental. Pemrosesan informasi pada tahap ini bersifat serial sesuai urutan tertentu.

3. Kegiatan/tahap memperlihatkan gambaran definisi

Setelah membayangkan, subjek memperlihatkan contoh gambaran barisan konvergen. Untuk memperlihatkan gambaran definisi, subjek menentukan contoh barisan, mendaftar anggotanya, dan mengplotkan. Subjek memberikan satu contoh. Jika pembayangan mental hasil membayangkan adalah informasi awal, maka plot barisan yang diberikan adalah hasil pemrosesan informasi. Terjadi proses memunculkan dan menentukan pembayangan mental. Alasan pemilihan

contoh rumus barisan konvergen adalah yang sesuai dengan pembayangan sebelumnya dan lebih mudah untuk diperlihatkan. Hal ini sesuai tulisan Anderson & Krathwohl (2007) bahwa mencontohkan adalah mengidentifikasi ciri-ciri pokok dari konsep dan menggunakan ciri-ciri ini untuk memilih.

Untuk menentukan contoh barisan, subjek memperhatikan sumbu koordinat, memunculkan bayangan barisan, kemudian ada yang melengkung dengan fungsinya, memilih pembayangan mental yang sesuai ingatan tentang konvergen, dan menentukan rumus contohnya. Hal ini sesuai pendapat Sternberg (2008) bahwa orang menarik informasi dari memori yang aktif dengan melakukan pemindaian terhadap item-item secara berurutan.

Selain ditugaskan menjelaskan pemahaman dengan gambar/grafik, untuk menentukan contoh barisan, subjek menggunakan pembayangan mental. Hal ini sesuai dengan teori penyandian-ganda (dalam Suharnan, 2005) yang menyatakan bahwa suatu informasi dapat direpresentasikan dalam dua bentuk sandi yaitu visual dan verbal. Sandi visual adalah sandi atau informasi yang dapat disajikan dalam bentuk gambar.

Setelah membuat atau menentukan rumus contoh barisan konvergen, subjek mendaftar anggota barisan. Subjek mengatakan tidak perlu membuat tabel bantu untuk menggambar. Hal ini menunjukkan bahwa kebiasaan dapat mempengaruhi proses memahami. Hal ini sesuai pendapat Suharnan (2005) bahwa individu dan interaksi dapat mempengaruhi individu dalam memahami.

Untuk mendaftar anggota barisan, subjek memperhatikan rumus contoh barisan, mensubstitusikan tiap anggota domain secara berurutan pada rumus contoh barisan, dan membentuk daftar anggota barisan. Hal ini menunjukkan adanya kontrol dalam

pemrosesan informasi. Sesuai pendapat Sternberg (2008) bahwa pengolahan, keluar, dan masuknya informasi dalam WM/STM diarahkan oleh pemrosesan informasi kontrol yang diarahkan oleh tujuan.

Subjek menyajikan daftar anggota barisan sesuai urutan. Daftar anggota sesuai urutannya yang diberikan subjek sesuai dengan urutan nilai fungsi pada tabel bantu. Perbedaan proses yang ada lebih pada perbedaan penyajian. Hal ini sesuai analogi Rose & Nicholl (2006) bahwa otak dapat dipandang sebagai hutan raya tempat puluhan ribu pohon dengan ratusan ribu cabang besar, jutaan dahan, dan miliaran ranting.

Subjek mengplotkan anggota barisan dengan cara melihat daftar anggota barisan, menyajikan dalam bentuk plot titik-titik secara berurutan sesuai pasangan pada gambar. Subjek mengplotkan barisan konvergen berdasarkan tabel bantu atau daftar anggota contoh barisan. Hal ini menunjukkan adanya proses transformasi informasi dari angka (informasi verbal) menjadi gambar (informasi visual). Sesuai pendapat Anderson & Krathwohl (2007) bahwa salah satu proses kognitif dalam kategori memahami adalah menafsirkan, yaitu mengubah informasi dari satu bentuk ke bentuk lain seperti angka jadi kata-kata dan kata-kata jadi gambar.

Pembayangan mental barisan konvergen yang diperoleh dari tahap membayangkan, pada umumnya, masih merupakan bentuk prototipe. Subjek merepresentasi gambaran barisan konvergen dengan plot barisan di atas sumbu koordinat. Gambar/grafik barisan tersebut diharapkan dapat mewakili gambaran-gambaran barisan lain yang ada dalam pikiran. Terjadinya pembentukan prototipe tendensi sentral untuk pembayangan mental. Solso, Maclin & Maclin (2007) menjelaskan teori-teori pembentukan prototipe sesuai teori tendensi

sentral yaitu sebuah prototipe dikonseptualisasikan mewakili prototipe-prototipe yang lain.

Tahap memperlihatkan gambaran barisan konvergen sangat penting dalam memahami definisi formal barisan konvergen. Tahap ini selain untuk memperlihatkan pembayangan mental yang diperoleh, memperjelas pembayangan mental dalam bentuk gambar/grafik, memperingan kinerja pikiran untuk mengingat gambaran kasar yang diperoleh. Jika dalam memahami tidak ada tahap memperlihatkan gambaran barisan, maka pembayangan mental dari definisi akan cepat hilang atau tidak diperoleh. Akibatnya, kebermaknaan definisi dari memahami tidak diperoleh. Hal ini sesuai pendapat Roam (2011) bahwa memperlihatkan yaitu menggambarkan dan merepresentasikan ide secara visual.

Pada tahap ini terjadi pemindaian dan transformasi informasi. Pemindaian informasi dilakukan untuk mendapatkan input visual. Transformasi informasi dari input visual menjadi pembayangan mental dilakukan untuk mendapatkan pembayangan mental. Transformasi informasi dari pembayangan mental menjadi informasi non visual dilakukan untuk mendapatkan informasi yang dibutuhkan. Input pemrosesan informasi pada tahap ini adalah pembayangan mental hasil tahap membayangkan. Hasil tahap ini adalah gambaran kasar. Pemrosesan informasi pada tahap ini bersifat serial sesuai urutan tertentu.

4. Kegiatan/tahap memperlihatkan atribut definisi

Setelah memperlihatkan gambaran barisan konvergen, subjek memperlihatkan gambaran atribut-atribut definisi. Untuk memperlihatkan atribut-atribut definisi, subjek menentukan nilai ϵ , menentukan nilai α , menggambarkan garis $\alpha \pm \epsilon$, menentukan

nilai $n_0(\varepsilon)$, dan menggambarkan garis $n_0(\varepsilon)$. Perbedaan urutan proses tersebut menunjukkan kealamian data. Hal ini sesuai analogi Rose & Nicholl (2006) bahwa pemrosesan informasi dalam otak sangat kompleks.

Setelah menentukan nilai ε dan a , subjek mengatakan bahwa menjabarkan nilai ε dan a . Subjek mengatakan sebagai proses tersendiri. Perbedaan ungkapan tersebut menuntut peneliti untuk lebih hati-hati. Hal ini sesuai pendapat Guba dan Lincoln (dalam Noeng Muhadjir, 2002) bahwa peneliti dituntut memiliki sifat responsif, adaptif, sadar pada konteks tak terkatakan, mengklarifikasi, dan memahami jawaban secara lebih dalam.

Untuk menentukan nilai $n_0(\varepsilon)$, subjek menggunakan pembayangan mental karena juga memperhatikan gambar/grafik yang ada. Urutan proses juga menunjukkan bahwa subjek menggunakan pembayangan mental. Subjek menentukan nilai $n_0(\varepsilon)$ setelah menggambarkan garis $a \pm \varepsilon$. Hal ini menunjukkan kealamian data. Menurut Suharnan (2005), definisi, individu, dan interaksi dapat mempengaruhi individu dalam memahami.

Sebelum menentukan nilai a , ε , dan $n_0(\varepsilon)$, subjek memperhatikan atribut a , ε , dan $n_0(\varepsilon)$ pada rangkuman definisi. Atribut a , ε , dan $n_0(\varepsilon)$ merupakan input-input visual yang diperoleh dari scanning atau pemindaian informasi pada rangkuman definisi. Hal ini sesuai dengan penjelasan Sternberg (2008) bahwa orang menarik informasi dari memori yang aktif dengan melakukan pemindaian terhadap item-item secara berurutan.

Untuk mendapatkan hubungan antara a dan ε , subjek perlu mengoperasikan nilai a dan ε sehingga diperoleh $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$. Hal ini sesuai pendapat Solso, Maclin & Maclin (2007) bahwa pemrosesan informasi

melibatkan manipulasi informasi yang diindera dan transformasi informasi-informasi tersebut menjadi unit-unit yang bermakna.

Garis $a \pm \varepsilon$ dan $n_0(\varepsilon)$ diberikan subjek untuk memperlihatkan hubungan a , ε , dan $n_0(\varepsilon)$. Hal ini sesuai pendapat Solso, Maclin & Maclin (2007) bahwa pemrosesan informasi melibatkan manipulasi informasi yang diindera dan transformasi informasi-informasi tersebut menjadi unit-unit yang bermakna.

Untuk mendapatkan hubungan antara a , ε , dan $n_0(\varepsilon)$, subjek merepresentasikan atau menggambarkan garis $a \pm \varepsilon$ dan $n_0(\varepsilon)$. Pada tahap ini terjadi pemrosesan informasi untuk mendapatkan kebermaknaan hubungan antar atribut-atribut pada definisi. Hal ini sesuai pendapat Solso, Maclin & Maclin (2007), pemrosesan informasi adalah proses yang melibatkan penginderaan, manipulasi, dan transformasi informasi menjadi unit-unit yang bermakna.

Tahap ini sangat penting untuk memperlihatkan dan mendapatkan hubungan antar atribut-atribut yang ada pada definisi formal barisan konvergen. Memperlihatkan atribut definisi berarti menggambarkan dan merepresentasikan ide secara visual. Hal ini sesuai pendapat Roam (2011) bahwa memperlihatkan yaitu menggambarkan dan merepresentasikan ide secara visual.

Input pemrosesan informasi pada tahap ini adalah input-input visual, yaitu: a , ε , dan $n_0(\varepsilon)$ yang diperoleh dari rangkuman definisi (hasil tahap mengenali) dan gambaran contoh barisan konvergen (hasil tahap sebelumnya). Output pemrosesan informasi pada tahap ini adalah visualisasi atau gambaran atribut-atribut dan hubungan antar atribut-atribut definisi formal barisan konvergen. Pada tahap ini terjadi pemindaian, manipulasi, dan transformasi informasi. Pemindaian dilakukan untuk mendapatkan

input-input visual, yaitu: a , ϵ , dan $n_0(\epsilon)$. Manipulasi informasi dilakukan untuk mendapatkan informasi yang lebih bermakna, seperti: menentukan nilai a , ϵ , dan mengoperasikannya untuk mendapatkan nilai $a \pm \epsilon$ dan $n_0(\epsilon)$. Transformasi informasi non visual menjadi visual dilakukan untuk mendapatkan pembayangan mental, seperti: nilai a , ϵ , dan $n_0(\epsilon)$ ditransformasi menjadi garis $a \pm \epsilon$ dan $n_0(\epsilon)$. Transformasi informasi visual menjadi non visual dilakukan untuk mendapatkan informasi yang dibutuhkan, seperti: untuk menentukan nilai a dari gambar/grafik atau pembayangan mental plot barisan. Pemrosesan informasi yang terjadi bersifat serial sesuai urutan-urutan tertentu.

5. Kegiatan/tahap menyimpulkan

Tahap terakhir untuk memahami adalah menyimpulkan. Subjek memberikan tiga kesimpulan. Subjek merepresentasikan kesimpulannya dalam bentuk tulisan. Subjek membuat simpulan pertama, simpulan kedua, dan simpulan ketiga.

Untuk membuat simpulan pertama, kedua, dan ketiga, subjek memperhatikan istilah konvergen yang telah diberi keterangan memusat pada ringkasan, memperhatikan hasil penjabaran kata kunci, dan memperhatikan rumus contoh barisan dan hasil pekerjaan memahami. Jika hasil pekerjaan sebelumnya adalah informasi awal, maka informasi-informasi yang menarik perhatian subjek adalah hasil scanning atau pemindaian informasi awal. Hal ini sesuai dengan penjelasan Sternberg (2008) bahwa orang menarik informasi dari memori yang aktif dengan melakukan pemindaian terhadap item-item secara berurutan.

Setelah memperhatikan bagian tertentu dari coretannya, subjek mencocokkan dengan hasil memahami. Jika informasi yang

diperhatikan adalah informasi awal, maka hasil mencocokkan adalah hasil pemrosesan informasi pada proses mencocokkan. Hal ini menunjukkan adanya proses akomodasi dan asimilasi. Jika hasil mencocokkan sesuai dengan pengertiannya, maka informasi yang diperhatikan akan disampaikan sebagai kesimpulan. Hal ini sesuai dengan pendapat Skemp (dalam Solso & Maclin, 2007) bahwa untuk memahami sesuatu diperlukan terjadinya asimilasi informasi baru dengan skema yang telah dimiliki. Jika hasil mencocokkan tidak sesuai dengan pengertiannya, maka akan dilakukan pencarian kesalahan dan memperbaikinya. Hal ini juga sesuai dengan pendapat Peaget (dalam Solso & Maclin, 2007) bahwa memahami adalah proses adaptasi intelektual di mana pengalaman dan ide-ide baru diinteraksikan dengan apa yang sudah diketahui oleh seseorang yang sedang belajar untuk membentuk struktur pengertian yang baru.

Setelah mencocokkan bagian yang menarik perhatian dengan pengetahuannya, subjek menyimpulkan. Jika cocok struktur atau fungsinya, maka dinyatakan sebagai kesimpulan. Jika tidak cocok struktur atau fungsinya, maka cenderung tidak akan dinyatakan sebagai kesimpulan. Hal ini menunjukkan adanya pengkategorian objek yang memiliki kemiripan dalam struktur atau fungsinya. Kesimpulan merupakan representasi dari konsep yang baru terbentuk. Hal ini sesuai pendapat Suharnan (2005) bahwa pembentukan konsep adalah penggunaan aturan-aturan tertentu untuk mengkategorikan objek-objek yang memiliki kemiripan di dalam struktur atau fungsinya. Jika informasi dari bagian yang menarik perhatian subjek adalah informasi awal, maka kesimpulan adalah representasi hasil

pengolahan informasi pada proses menyimpulkan.

Tahap menyimpulkan merupakan tahap akhir dari serangkaian tahap untuk memahami definisi formal barisan konvergen. Menyimpulkan berarti mengabstraksikan sebuah konsep atau prinsip yang menerangkan dengan mencermati ciri-cirinya dengan menarik hubungan di antara ciri-ciri tersebut. Tahap ini yang sangat penting sebagai bentuk representasi hasil segala proses atau tahap memahami. Jika tidak menyimpulkan, maka tidak akan diketahui hasil dari pemrosesan informasi atau tahap-tahap memahami. Hal ini sesuai pendapat Anderson & Krathwohl (2007) bahwa menyimpulkan berarti mengabstraksikan sebuah konsep atau prinsip yang menerangkan contoh-contoh tersebut dengan mencermati ciri-cirinya dengan menarik hubungan di antara ciri-ciri tersebut.

Subjek merepresentasikan tiga kesimpulan sebagai hasil kegiatan menyimpulkan dalam bentuk tulisan. Hal ini sesuai analogi Rose & Nicholl (2006) bahwa otak dapat dipandang sebagai hutan raya tempat puluhan ribu pohon dengan ratusan ribu cabang besar, jutaan dahan, dan miliaran ranting.

Input tahap ini adalah pengetahuan atau pengalaman yang diperoleh untuk memahami. Hasil tahap ini adalah kesimpulan yang dapat direpresentasikan dalam bentuk lisan atau tulisan. Pada tahap ini terjadi pemindaian, asimilasi, akomodasi, dan transformasi informasi. Pemindaian informasi dilakukan untuk mendapatkan informasi yang menarik perhatian. Asimilasi dan akomodasi dilakukan untuk mencocokkan informasi yang menarik perhatian dengan pengetahuan yang sudah dimiliki, yaitu: informasi yang menarik perhatian akan ditarik sebagai kesimpulan jika cocok atau sesuai dengan pengetahuan

sebelumnya, informasi yang menarik perhatian tidak akan ditarik sebagai kesimpulan atau bahkan perlu dicek kembali jika tidak cocok atau tidak sesuai dengan pengetahuan sebelumnya. Transformasi informasi dari pengetahuan yang diperoleh dalam bentuk respon dilakukan untuk memperjelas kesimpulan, seperti: menyatakan kesimpulannya secara lisan atau tulisan. Pemrosesan informasi pada tahap ini bersifat serial sesuai urutan-urutan tertentu.

Kesimpulan

Hasil penelitian menunjukkan bahwa untuk memahami definisi formal barisan konvergen, mahasiswa calon guru matematika: mengenali, membayangkan, memperlihatkan gambaran barisan konvergen dan memperlihatkan gambaran atribut definisi, dan menyimpulkan.

Daftar Pustaka

- Alfeld, P. 2000. *Understanding Mathematics a Study Guide*. Department of Mathematics. College of Science. University of Utah. Download 5 Januari 2007.
- Anderson & Krathwohl. 2007. *Kerangka Landasan Untuk Pembelajaran, Pengajaran, dan Asesmen*.
- Atkinson & Shiffrin. 1968. <http://chiron.valdosta.edu/whuitt/ed/psyint.html>. diakses tanggal 5 Juni 2012.
- Bartle, R.G. & Sherbert D.R. 1982. *Introduction to Real Analisis*. University of Illinois: Urbana-Champaign. Illinois. John Wiley & Sons. Inc.

- Darmadi. 2008a. *Analisis Real Menurut Mahasiswa*. Laporan Penelitian Tahun 2008. IKIP PGRI Madiun. Penelitian tidak dipublikasikan.
- Darmadi. 2008b. "Spektrum Hasil Belajar Analisis Real Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika IKIP PGRI Madiun Tahun Akademik 2008/2009". Makalah disajikan pada Seminar Nasional UNY, Jogjakarta, 5 Desember 2009.
- Darmadi. 2008c. "Pengaruh Pemanfaatan Powerpoint dalam Pembelajaran Terhadap Prestasi Belajar Matematika Tingkat Sekolah Dasar Ditinjau dari Gaya Belajar Siswa". Tesis Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Sebelas Maret.
- Darmadi. 2009a. "Pengembangan Model Pembelajaran Analisis Real Berbasis Teori David Tall". Makalah disajikan pada Seminar Nasional UNESA, Surabaya, 8 Agustus 2009.
- Darmadi. 2009b. *Persiapan Mahasiswa Sebelum Kuliah*. Laporan Penelitian Tahun 2009. IKIP PGRI Madiun.
- Darmadi. 2009c. "Spektrum Hasil Belajar Kalkulus Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika IKIP PGRI Madiun Tahun Akademik 2008/2009". Makalah disajikan pada Seminar Nasional UNNES, Semarang, 24 Oktober 2009.
- Darmadi. 2010. "Perbaikan Kualitas Perkuliahan Analisis Real Melalui Lesson Study". Makalah disajikan pada Seminar Hasil Lesson Study FP MIPA IKIP PGRI Madiun.
- Darmadi. 2011a. "Berpikir Analitis, Kreatif, Kritis, dan Inovatif dalam Pembelajaran Analisis Real Ditinjau dari Taksonomi Bloom". Makalah disajikan pada Seminar Nasional UNESA, Surabaya, 22 Oktober 2011.
- Darmadi. 2011b. "Imajeri Mahasiswa Dalam Pembelajaran Analisis Real (Studi Kasus Di IKIP PGRI MADIUN)". Makalah disajikan pada Seminar Nasional UNY, Jogjakarta, 3 Desember 2011.
- Darmadi. 2012a. "Membangun Pembelajaran Matematika yang Menyenangkan dengan Visualisasi". Makalah disajikan pada Seminar Nasional UNY, Jogjakarta, 24 Maret 2012.
- Darmadi. 2012b. "Visualisasi Definisi-Definisi Formal pada Barisan Bilangan Real". Makalah disajikan pada Seminar Nasional UNNES, Semarang, 26 Mei 2012.
- Darmadi. 2013a. "Analisis Kesulitan Berpikir Visual Dalam Memahami Definisi Formal Pada Barisan Bilangan Real". Makalah disajikan pada Seminar Nasional UNY, Jogjakarta, 9 Nopember 2013.
- Darmadi. 2013b. "Profil Berpikir Visual Mahasiswa Laki-Laki Calon Guru Matematika Dalam Memahami Definisi Formal Pada Barisan Bilangan Real". Makalah disajikan pada Seminar Nasional UNS, Surakarta, 20 Nopember 2013.
- Darmadi. 2013c. "Profil Berpikir Visual Mahasiswa Perempuan Calon Guru Matematika Dalam Memahami Definisi Formal Pada Barisan Bilangan Real". Makalah disajikan pada Seminar Nasional UNS, Surakarta, 20 Nopember 2013.
- Depdiknas, 2006. *Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan (KTSP)*. Jakarta: Departemen Pendidikan Nasional.

- Diene, Z. P. 1971. *Building up Mathematics: Diene on the Learning of Mathematics*. 4th edition. London: Hutchinson Education Ltd. Ch. 2 pp: 18-40.
- Fitri Rositasari. 2006. "Efektifitas Pemanfaatan PowerPoint Untuk Meningkatkan Prestasi Belajar Penyajian dan Pengumpulan Data di SDN Banjarejo Tahun Akademik 2005/2006". Skripsi, IKIP PGRI Madiun.
- Goldberg, R.R. 1976. *Methods of Real Analysis*. The University of Iowa. United State of America. John Wiley & Sons, Inc.
- Hamzah B.U. 2007. *Model Pembelajaran*. Jakarta: Bumi Aksara.
- Hartono, S. 2010. *Mental Imagery: Tinjauan dari Segi Filsafat, Ilmu-Ilmu Kognitif dan Neurologis*. Surabaya: UNESA University Press.
- Hulse, dkk. 1981. *The Psychology of Learning* (International student edition). New York: McGraw-Hill International Book Company.
- Jensen, E. 2008. *Brain-Based Learning: The New Science of Teaching & Training (Pembelajaran Berbasis Kemampuan Otak: Cara Baru dalam Pengajaran dan Pelatihan)*. Edisi Revisi. Terjemahan Narulita Yusron. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.
- Kemp. J.E. 1994. *Proses Perancangan Pengajaran*. (Terjemahan oleh Marjohan Asril). Bandung: ITB Press.
- Kolh, D.A. 1984. *Experiential Learning*. New York: Prentice-Hall.
- Lieb, S. 1991. *Principles of Adult Learning*. Senior Technical Writer and Planner, Arizona Department of Health Services and part-time Instructor, South Mountain Community College.
- Masruri, Y. 2013. *Pembayangan Mental (Mental Image)*. Posting: 02 Dec 2013. Alamat web: <http://m.kompasiana.com/post/read/615840/2/pembayangan-mental-mental-imagey.html>. Diakses: 6 Juli 2014.
- Nemirovsky, R. & Noblemany, T. 1997. *On Mathematical Visualization and The Place Where We Live*. Educational Studies in Mathematics 33: 99–131, 1997. © 1997 Kluwer Academic Publishers. Printed in The Netherlands.
- Pinto, M.M.F. & Tall, D. 1999. *Student Constructions of Formal Theory: Giving and Extracting Meaning*. Published in Proceedings of the 23rd Conference of PME, Haifa, Israel, (1999), 3, 281–288.
- Polya G. 1973. *A New Aspect of Matemactical Method*. Second edition. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- Roam D. 2011. *The Magic of Picture*. Diterjemahkan dari The Back of Napkin. Jakarta selatan: Ufuk Press, PT. Ufuk Publishing House.
- Rose, C. & Nicholl, M.J. 2006. *Accelerated Learning for the 21th Century*. Penerjemah: Dedy Ahimsa. Bandung. Penerbit Nuansa.
- Santrock, J.W. 2009. *Psikologi Pendidikan*. Educational Psychology. Edisi 3. Buku 1. Jakarta: Salemba.
- Schunk. 2012. *Learning Theories an Edycational Perspective*. Teori-Teori Pembelajaran: Perspektif

- Pendidikan. Edisi keenam. Penerjemah: Eva Hamdiah, Rahmat Fajar. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.
- Solso, R.L., Maclin O.H., Maclin M.K. 2007. *Psikologi Kognitif*. 8ed. Alih Bahasa Mikael Rahardanto dan Kristianto Batuadji. Editor: Wibi Hardani. Jakarta: Penerbit Erlangga.
- Sternberg, R.J. 2008. *Psikologi Kognitif*. Judul Asli: *Cognitif Psychology*. Penerjemah: Yudi Santoso. Penyuting: Saiful Zuhri Qudsy. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.
- Suharnan. 2005. *Psikologi Kognitif*. Surabaya: Srikandi.
- Suhartini. 2007. "Peningkatan Keaktifan dan Prestasi Belajar Matematika dengan VCD Pembelajaran pada Pokok Bahasan Fungsi Siswa Kelas VIIA SMP Negeri 2 Mejayan Kabupaten Madiun Tahun Pelajaran 2007/2008". Skripsi, IKIP PGRI Madiun
- Suparman. 2012. *Panduan Para Pengajar & Inovator: Pendidikan Desain Instruksional Mpdern*. Jakarta: Erlangga.
- Sutiarso, S. 2000. *Problem Posing: Strategi Efektif Meningkatkan Aktivitas Siswa dalam Pembelajaran Matematika*. Prosiding Konperensi Nasional Matematika X. ITB, 17-20 Juli 2000.
- Tall. 1988. "Concept Image and Concept Definition". *Senior Secondary Mathematics Education*, (ed. Jan de Lange, Michiel Doorman), OW&OC Utrecht, 37-41.
- Tall. 1991. "Intuition And Rigour : The Role of Visualization in The Calculus". *Visualization in Mathematics* (ed. Zimmermann & Cunningham), M.A.A., Notes No. 19, 105-119
- Tall. 1994a. "A Versatile Theory of Visualisation and Symbolisation in Mathematics". Plenary Presentation at the *Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*, Toulouse, France, July 1994
- Tall. 1994b. "The Psychology of Advanced Mathematical Thinking: Biological Brain and Mathematical Mind". Prepared for the *Working Group on Advanced Mathematical Thinking, at the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Lisbon, July 1994.
- Tall. 1995. "Cognitive Development, Representations and Proof". This paper was prepared for the *Conference on Justifying and Proving in School. Mathematics, Institute of Education, London, December 1995*, pp. 27-38.
- Tall. 2005a. "A Theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof". Written for the *International Colloquium on Mathematical Learning from Early Childhood to Adulthood*, organised by the Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, Belgium, 5-7 July 2005.
- Tall. 2005b. "The Transition from Embodied Thought Experiment and Symbolic Manipulation to Formal Proof". This article is written for the *Delta Conference*, on Frazer Island, Australia, November 2005.
- Siswono, T.Y.E. 2011. "Pembelajaran Matematika Berbasis Pengajaran dan Pemecahan Masalah (JUCAMA) untuk Meningkatkan Kemampuan Berpikir Kreatif Siswa". Makalah disajikan pada Seminar Nasional UNESA, Surabaya, 22 Oktober 2011

Wasan, S.K. & Prakash, R. Ramjas College:
Real Analysis. University of Delhi;
Rajdhani College. University of
Delhi. New Delhi: Tata McGraw-
Hill Publishing Company Limited.