PROSES KELAHIRAN DAN KEMATIAN SEBAGAI RANTAI MARKOV WAKTU KONTINU

Supandi[a]

[a] Program Studi Pendidikan Matematika FPMIPA IKIP PGRI Semarang

Jl. Dr. Cipto-Lontar No1 Semarang Telp. (024)8316377 Faks (024) 8448217

Abstrak

Rantai Markov waktu kontinu yang merupakan bagian dari proses stokastik. Pembahasan diawali dengan pengertian dasar yang dipakai secara umum termasuk teorema dan lemma tentang persamaan differensial Kolmogorof yang berkaitan dengan rantai Markov waktu kontinu. Aplikasi rantai markov waktu kontinu dibahas dalam paper ini untuk proses kelahiran dan kematian yaitu pada sistem M/M/s (M/M/1) sebagai gambaran dari secara nyata.

Kata kunci : Rantai Markov waktu kontinu, Persamaan Differensial Kolmogorov, .

1. Pendahuluan

Proses stokastik {X(t), t∈T} adalah suatu barisan kejadian yang memenuhi kaidah-kaidah peluang yang didefinisikan sebagai barisan peubah acak X(t). Himpunan T sebagai ruang parameter atau ruang indeks dari proses stokastik X dan himpunan semua nilai X(t) yang mungkin sebagai peluang keadaan dari X.

Alam semesta ini bersifat stokastik yang memunculkan tak hingga proses stokastik, dengan klasifikasi proses stokastik tersaji dalam Tabel 1.

Dasar dari rantai markov adalah proses menghitung yang didefinisikan sebagai berikut; proses {N(t), t ≥ 0} sebagai proses menghitung apabila N(t) menyatakan banyaknya peristiwa yang terjadi pada selang waktu [0,t]. Sedangkan {N(t), t ≥ 0} adalah proses Poisson bila suatu proses menghitung dengan waktu antar kejadian yang bebas dan berdistribusi eksponensial, serta memiliki kenaikan-kenaikan yang stasioner. Distribusi eksponensial menggambarkan distribusi waktu antara kejadian yang saling bebas dan terjadi dengan laju nyang konstan.

Tabel 1. Klasifikasi proses Markov

		Ruang Keadaan	
		Diskrit	Kontinu
Parameter	Diskrit	Rantai Markov dengan indeks parameter diskrit	Proses markov dengan indeks parameter Diskrit
	Kontinu	Rantai Markov dengan indeks parameter Kontinu	Proses markov dengan indeks parameter Kontinu

Proses markov adalah suatu proses stokastik dengan sifat jika keadaan untuk saat sekarang diketahui atau diberikan maka peluang keadaan dari proses pada waktu yang akan datang tidak dipengerahui oleh keadaaan pada waktu sebelumnya. Rantai markov adalah proses Markov dengan peluang keadaan diskrit tetapi indeks parameternya dapat diskrit atau kontinu.

2. Rantai Markov waktu Kontinu

Pandang suatu proses stokastik waktu kontinu $\{X(t), t \in [0, \infty), t \in R\}$ dengan ruang keadaan S berupa himpunan bulat non negatif. Proses $\{X(t), t \in [0, \infty), t \in R\}$ dikatakan suatu rantai Markov dengan indeks parameter waktu kontinu jika setiap $s,t \geq 0$ dan untuk setiap bilangan bulat non negatif i,j, x(u) dan $0 \leq u \leq s$ didefinisikan sebagai berikut

$$P(X(t+s) = j \mid X(s) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u \leq s) = P(X(t+s) = j \mid X(s) = P_{ij}(t) \quad (1)$$

Suatu proses stokastik $\{X(t), t \in [0, \infty), t \in R\}$ waktu kontinu disebut rantai markov waktu kontinu bila proses stokastk tersebut mempunyai sifat Markovian. Sifat Markovian merupakan distribusi bersyarat dari keadaan di waktu mendatang t+s, diberikan keadaan pada waktu saat ini s dan semua keadaan pada waktu lampau, dimana peluang dari keadaan diwaktu mendatang t+s hanya bergantung pada keadaan saat ini s dan tidak bergantung pada keadaan pada waktu lampau.

Jika peluang $P(X(t+s) = j \mid X(s) = i)$ tidak bergantung dari nilai s maka rantai Markov waktu kontinu dikatakan mempunyai peluang transisi yang homogen atau stasioner.

Rantai Markov waktu kontinu dikatakan waktu homogen jika untuk sebarang $s \leq t$ dan sebarang keadaan $i.j \in S$ berlaku

$P_{ij}(s,t) = P(X(t) = j \mid X(s) = i, P(X(t-s) = j \mid X(0) = i)$ (2)

Pada rantai Markov diketahui bahwa transisi dari proses terjadi setiap satu satuan waktu. Tidak demikian halnya untuk proses Markov. Misalkan proses Markov yang diteliti berpindah ke keadaan –i pada waktu t_0. Misalkan setelah s waktu kemudian proses masih berada di keadaan yang sama (peluang transisi tidak terjadi). Kemudian timbul pertanyaan berapa peluang proses tersebut masih berada di keadaan yang sama selama t waktu dari pengamatan terakhir. Karena proses Markov maka dengan sifat Markoviannya bahwa peluang proses tersebut tetap berada di keadaan i pada selang waktu [s, s+t] adalah peluang bersyarat proses tersebut berada di keadaan i pada selang waktu [s, s+t] diberikan proses berada di keadaan i pada waktu s.

Asumsikan bahwa P_{ij} (s,t) kontinu di t=0 yaitu peluang transisi stasioner yang didefinisikan ssebagai berikut

$$\delta_{ij} = \lim_{t\to 0} P_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Rantai Markov waktu kontinu disebut suatu proses stokastik $\{X(t), t \in [0, \infty), t \in R\}$ merupakan suatu proses Markov bila unutk setiap transisi di keadaan i mempunyai sifat:

(i). Lamanya proses waktu berada di keadaan ke i sebelum melakukan transisi ke keadaan lain adalah berdistribusi eksponensial dengan parameter (misal sebut rate) $v_i = 1/\lambda_i$ untuk $0 \leq v_i \leq \infty$ dan,

(ii). Bila proses tersebut berpindah ke keadaan j dengan peluang P_{ij} dimana $\sum P_{ij} = 1$ dan $P_{ii} = 0$ untuk setiap i.

Pada keadaan i untuk rate $v_i = \infty$ disebut keadaaan seketika (instantaneous state), dengan asumsi $0 \leq v_i \leq \infty$ untuk setiap i. Dalam kondisi seperti ini maka keadaan i disebut *absorbing* yaitu bila sekali masuk suatu keadaan maka tidak pernah meninggalkan keadaan tersebut.

Rantai Markov waktu kontinu disebut proses kelahiran dann kematian bila

(i). Keadaan S = {1,2.,3,.....}

(ii). $q_{ij} = 0$ untuk $|i-j| > 1$

Dengan demikian proses kelahiran dan kematian adalah rantai markov waktu kontinu denan ruang keadaan {0,1,2,3,.....} untuk transisi dari keadaan i hanya dapat berpindah ke keadaan i-1 atau i+1. Rantai markov ini dinamakan demikian karena pada proses ini direpresentasikan dengan suatu ukuran populasi yang bertambah satu dikarenakan satu proses kelahiran dan sebaliknya berkurang satu disebabkan satu proses kematian.

(iii). Misal diberikan $\lambda_i = q_{i, i+1}$ proses kelahiran dan $\mu_i = q_{i, i-1}$ proses kematian

(iv). Nilai $\{\lambda_i, i \geq 0\}$ disebut rate kelahiran dan $\{\mu_i, i \geq 1\}$ disebut rate kematian

(v). Karena $\sum_{j \in S} q_{ij} = v_i$ diperoleh $v_i = \lambda_i + \mu_i$ dan

$$P_{i,i+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} = 1 - P_{i,i-1}$$

3. Persamaan Diferensial Kolmogorov

Didefinisikan peluang dari keadaan ke-i menuju keadaan ke-j pada saat i sebagai berikut

$P_{ij}(t) = P(X(t+s) = j \mid X(s) = i)$

Dan misalkan proses Poisson untuk $i \leq j$, maka peluang dari keadaan i ke menuju keadaan j pada saat t adalah

$P_{ij}(t) = P(\text{kejadian } j\text{-}i \text{ dari panjang selang } t)$

$$= \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}$$

Lemma 1. Peluang dari dua atau lebih transisi pada saatt adalah O(t)

(i). $\lim_{t \to 0} \frac{1 - P_{ij}(t)}{t} = q_i$

(ii). $\lim_{t \to 0} \frac{P_{ij}(t)}{t} = q_{ij}, \ i \neq j$

Lemma 2.

Misalkan $X(t), t \in [0, \infty), t \in R \}$ rantai Markov waktu kontinu dengan ruang keadaan S, rate $(q_{ij})_{i,j \in S}$ dengan peluang transisi $(P_{ij}(t))_{i,j \in S}$. Maka untuk setiap s,t berlaku

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(s)$$

Dari Lemma 2, jika ada s dan t, sehingga $P_{ij}(s) > 0$ dan $P_{ij}(t) > 0$, maka $i \leftrightarrow j$ saling berkomunikasi. Apabila rantai Markov irreducible maka $P_{ij}(t) > 0$, $t > 0$, $\forall$ i dan j. Rantai

Markov dengan peluang transisi P_{ij} (t) homogen adalah $\pi_j = \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t), j \in S$. Untuk rantai Markov waktu kontinu yang irreducible maka

$\pi_j = 0, \forall j \in S,$ null recurent atau transient

$\pi_j = 0, \forall j \in S, \sum_{j\in S} \pi_j = 1,$ positif recurent

Pada rantai Markov diskrit untuk menentukan apakah rantai markov irreducible mempunyai distribusi stasioner (pada waktu yang lama) dengan memeriksa

$\pi_j = \sum \pi_i P_{ij}, \quad j \in S$

Dengan P_{ij} peluang transisi stau langkah dengan π_j merupakan sistem persamaan linier homogen dan memberikan penyelesaian yang tidak tunggal. Dan jika penyelesaian tersebut ada, maka penyelesaian untuk waktu yang lama (panjang) akan berdistribusi stasioner..

Pada rantai markov kontinu, peluang transisi digantikan oleh intensitas transisi yang didefinisikan seperti pada Lemma 1. Dengan menggunakan persamaan Chapman Kolmogorov dapat ditentukan distribusi peluang pada saat t+h.

Untuk menentukan distribusi peluang di waktu t+h dapat juga dengan mengkondisikan terhadap keadaan di waktu yang telah lalu dan di waktu mendatang, yang secara berturut-turut dengan menggunakan persamaan Backward Kolomogorof dan persamaan Forward Kolmogorof.

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k\neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t), \quad \forall i,j,t \geq 0$$

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k\neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t), \quad \forall i,j,t \geq 0$$

Dan

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{ij}(s,t) = \sum_{k\neq j} q_{ik}(s) P_{ij}(s,t) - q_i(s) P_{ij}(t), \quad \forall i,j,t \geq 0 \quad \text{persamaan Backword Kolmogorof}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{ij}(s,t) = \sum_{k\neq i} q_{kj}(t) P_{ik}(s,t) - q_j(t) P_{ij}(t), \quad \forall i,j,t \geq 0 \quad \text{persamaan Forward Kolmogorof}$$

4. Distribusi Limit dan Persamaan Kesetimbangan

Misalkan {X(t), t $\in$ [0,∞), t $\in$ R} adalah suatu proses Markov dan misalkan pula {En, n = 0,1,2,....} embedded rantai Markov dari proses markvo tersebut, yaitu rantai Markov yang diturunkan dari proses {X(t), t $\in$ [0,∞), t $\in$ R}. Transisi dari {En, n = 0,1,2,....} merupakan transisi dari {X(t), t $\in$ [0,∞), t $\in$ R} dengan tidak memperhatikan waktu antar transisinya.

Asumsikan bahwa rantai {En, n = 0,1,2,....} bersifat *Ireeducible* dan *positif recurent*. Dengan asumsi tersebut maka

$$P_j = \lim_{t \to \infty} P_{ij}(t)$$

ada dan tidak tergantung pada i.

Untuk mendapatkan limit P_j , pandang sistem persamaan differensial Kolomogorov Forward

$$Pi_j(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t)$$

Untuk $t \to \infty$ maka dengan mengubah urutan limt dan penjumlahan diperoleh

$$\lim_{t \to \infty} Pi_j(t) = \lim_{t \to \infty} \left[\sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t) \right]$$

$$= \sum_{k \neq j} q_{kj} P_k - v_j P_j$$

Karena Pij(t) fungsi yang terbatas maka akan konvergen ke titik 0, sehingga diperoleh

$$0 = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_k - v_j P_j \quad \text{atau} \quad v_j P_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_k \,, \forall\, j \qquad (3)$$

$$\text{dan} \quad \sum_j P_j = 1 \qquad (4)$$

Dengan demikian distribusi peluang limit dari {X(t), t $\in$ [0,∞), t $\in$ R} ada yaitu P_j. Nilai P_j mempunyai interpretasi yaitu sebagai proporsi waktu proses Markov {X(t), t $\in$ [0,∞), t $\in$ R} berada pada keadaan j. Peluang P_j dinamakan juga sebagai peluang stasioner karena jika distribusi peluang dari keadaan awala sama dengan P_j. Sehingga untuk semua t proses akan berada di keadaan j dengan peluang P_j, dan didefinisikan dengan

$v_j P_j = m$ (laju proses meninggalkan keadaan j)

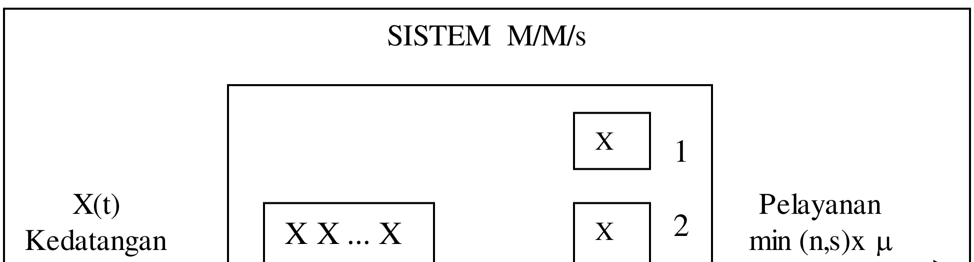
$\sum_{k \neq j} q_{kj} P_k = s$ (laju proses memasuki keadaan j)

Dengan demikian maka persamaan (3) dan (4) dikenal dengan persamaan kesetimbangan (balance equation)

5. Penerapan Dua Proses Kelahiran dan Kematian

1.1 Antrian M/M/s

Pandang antrian di loket sebuah bank, dengan diagram M/M/s sebagai berikut:



Dengan asumsi :

1. Antrian dengan s server secara paralel (bila secara seri disebut sistem sekuensial atau tandem)
2. Pelanggan datang ke-sejumlah s server mengikuti proses Poisson dengan rate λ
3. Waktu antar kedatangan pelanggan berdistribusi eksponensial dan iid (independence identics distibution) dengan mean $1/\lambda$
4. Jika sebarang server bebas, maka pelanggan dapat langsung dilayani
5. Bila Server sedang sibuk, maka pelanggan antri (menunggu dalam garis antrian)
6. Bila server seleseai melayani pelanggan, pelanggan meninggalkan sistem dan selanjutnya pelanggan berikutnya dalam garis antrian yang dilayani
7. Waktu pelayanan setiap server berdistribusi eksponensial dan iid dengan mean $1/\mu$ (mean rate pelayanan μ)

MisalkanX(t) banyaknya pelanggan dalam sistem pada saat t. Untuk sistem M/M/s, proses $\{X(t),\ t \geq 0\}$ merupakan proses kelahiran dan kematian yang didefiniskan dengan :

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & , 1 \leq n \leq s \\ s\mu & , n > s\,(n=s+1, s+2, \ldots\ ) \end{cases}$$

$$\lambda_n = \lambda, \quad n \geq 0$$

Dimana bila $n \leq s$, maka semua n-pelanggan terlayani dan bila $n \geq s$, maka paling sedikit satu pelanggan menunggu dalam antrian. Akan ditentukan kriteria agar statistical equilibrium tercapai, misalkan $P(X(t)=n)= p_n(t)$. Equilibrium ini tercapai pada saat t menuju tak hingga, sehingga $p_n = \lim p_n(t)$. Nilai p_n dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan kesetimbangan , yaitu *rate in= rate out*.

Untuk state 0 : $\mu p_1 = \lambda p_o \Rightarrow p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_o$

Untuk state 1 : $(\lambda + i\mu)p_1 = \lambda p_{i-1} + (i+1)\mu p_{i+1}$

Untuk state 1 maka untuk

$$
\begin{aligned}
i &= 1 \quad \rightarrow (\lambda+\mu)p_1 \quad = \lambda p_0 + 2\mu p_2 \\
i &= 2 \quad \rightarrow (\lambda+2\mu)p_2 = \lambda p_1 + 3\mu p_3 \\
&\ldots \\
i &= s-1 \rightarrow (\lambda+(s\text{-}1)\mu)p_{s-1} = \lambda p_{s-2} + s\mu p_s
\end{aligned}
$$

Penyelesaian steady-state dari persamaan kelahiran dan kematian dengan

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_n = \lambda, \ \forall n \\
&\mu_1 = \mu, \ \mu_2 = 2\mu, \ \mu_3 = 3\mu, \ \ldots.., \ \mu_s = s\mu \\
&\mu_n = s\mu, n > s
\end{aligned}
$$

Maka ada yaitu $\lambda/s\mu$ atau $\lambda < s\mu$.

Penyelesaian umum dari proses kelahiran dan kematian :

$$
p_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\ldots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\ldots\mu_1} = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n} & , n=0, \ldots, s \\[2ex] \dfrac{\lambda}{s^{n-s}s!\mu^n} & , n=s,s+1, \ldots \end{cases}
$$

Trafiiic intensitas untuk sistem adalah

$$
\rho = \frac{\text{rate kedatangan}}{\text{maximum rate selesai pelayanan}} = \frac{\lambda}{s\mu}
$$

Sehingga peluangnya menjadi

$$
p_n = \begin{cases} \dfrac{(s\rho)^n}{n!} & , n=0,1\ldots,s\text{-}1,s \\[2ex] \rho^{n-s}\dfrac{(s\rho)^n}{s!} & , n=s,s+1, \ldots \end{cases}
$$

Dengan kata lain peluang steady-state (stasioner) yaitu

$$
p_n = \begin{cases} p_0 \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n & , n=0,1\ldots,s\text{-}1,s \\[2ex] p_0 \dfrac{1}{s!s^{n-s}}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n & , n \geq s \end{cases}
$$

Dan dengan menggunakan hubungan $\Sigma p_n=1$ untuk n dari 0 menuju tak hingga diperoleh

$$p_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{s-1}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]+\frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{s\mu}{s\mu-\lambda}},$$ tanpa traffic intensitas

$$\pi_0=\left[1+\sum_{n=0}^{\infty}p_n\right]^{-1}=\frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\frac{(s\rho)^n}{n!}+\frac{(s\rho)^n}{s!}\sum_{n=s}^{\infty}\rho^{n-s}}$$

$$=\frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\frac{(s\rho)^n}{n!}+\frac{s\rho}{s!(1-\rho)}}$$,dengan traffic intensitas

Jika $\rho\geq 1$ maka sistem tidak konvergen untuk steady state

$$\pi_n = p_n\pi_0=\begin{cases}\frac{(s\rho)^n}{n!}\pi_0 & , \; n=0,1,2,...s\\ \rho^{n-1}\frac{(s\rho)^s}{s!}\pi_0 & , \; n=s,s+1,...\end{cases}$$

Peluang semua s- server sibuk pada sebagian waktu (termasuk peluang kedatangan pelanggan antri yaitu

$$P(X\geq x)=\sum_{n=s}^{\infty}p_n=\frac{p_0}{(s-1)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s-1}\left[\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+....\right]$$

$$=\frac{\lambda\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s-1}}{(s-1)!(s\mu-\lambda)}$$

Rata-rata banyaknya pelanggan dalam antrian adalah

$$L_Q=\sum_{n=s}^{\infty}(n-s)p_n=\frac{p_0}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\left[\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)+2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3+...\right]$$

$$=\frac{p_0}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\frac{\frac{\lambda}{s\mu}}{\left(1-\frac{\lambda}{s\mu}\right)^2}$$

$$=\frac{\lambda\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2}$$

Rata-rata banyaknya pelangggan dalam sistem adalah

$$L=\sum_{n=0}^{\infty} np_n=\sum_{n=s}^{s-1} np_n+\sum_{n=s}^{\infty} np_n=\sum_{n=s}^{s-1} np_n+s\sum_{n=s}^{\infty} p_n+\sum_{n=s}^{\infty}(n\text{-}s)p_n$$

$$=\sum_{n=s}^{s-1} np_n+s\sum_{n=s}^{\infty} p_n+L_Q$$

$$=\quad p_0(\frac{\lambda}{\mu})\left[1+\frac{2}{2!}(\frac{\lambda}{\mu})+\frac{3}{3!}(\frac{\lambda}{\mu})^2+\ldots+\frac{(s\text{-}1)}{(s\text{-}1)!}(\frac{\lambda}{\mu})^{s\text{-}1}\right]+\frac{s\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{(s\text{-}1)!(s\mu\text{-}\lambda)}+L_Q$$

$$=\quad(\frac{\lambda}{\mu})p_0\sum_{n=0}^{s\text{-}2}\frac{1}{n!}(\frac{\lambda}{\mu})^n+\frac{s\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s p_0}{(s\text{-}1)!(s\mu\text{-}\lambda)}-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)p_0\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s\text{-}1}}{(s\text{-}1)!}+L_Q$$

$$=\quad L_Q+(\frac{\lambda}{\mu})p_0\left[\sum_{n=0}^{s\text{-}1}\frac{1}{n!}(\frac{\lambda}{\mu})^n+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s\text{-}1}\frac{(s\mu\text{-}s\mu+\lambda)}{(s\text{-}1)!(s\mu\text{-}\lambda)}\right]$$

$$=\quad L_Q+(\frac{\lambda}{\mu})p_0\left[\sum_{n=0}^{s\text{-}1}\frac{1}{n!}(\frac{\lambda}{\mu})^n+\frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\frac{s\mu}{(s\mu\text{-}\lambda)}\right]$$

$$=\quad L_Q+(\frac{\lambda}{\mu})$$

Untuk waktu antri sebarang pelanggan adalah

$P(X=0) = p_0+p_1+\ldots+ p_{s\text{-}1} = 1 - P(X\geq s)$

Bila $X>0$ maka fungsi kepadatan peluangnya adalah

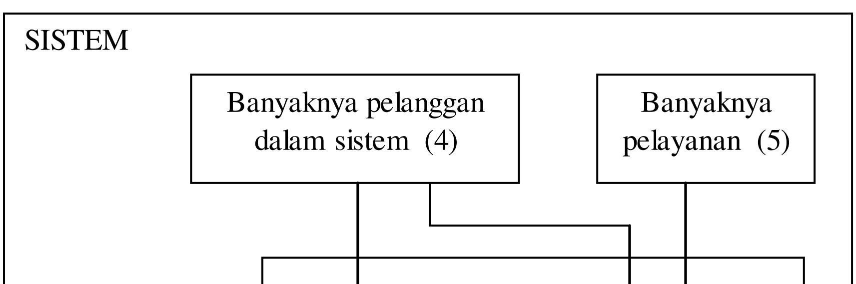
$$f_s(x)=\frac{\mu p_0}{(s\text{-}1)!}\left(\frac{\lambda}{s}\right)se^{-(s\mu\text{-}\lambda)x},\ \ x>0$$

Mean waktu antri yaitu

$${}_Q=\frac{\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{(s\text{-}1)(s\mu\text{-}\lambda)^2}p_0$$

Dan mean waktu tunggu dalam sistem diperoleh $W = W_Q + 1/\mu$

1.2 Antrian M/M/1



Dengan skema sistem M/M/1 sebagai berikut:

Input : (1) dan (3)

Ukuran efektivitas : (2) dan (4)

Variabel Keputusan : parameter (5) dan (6)

Asumsi :

(i). Pandang sistem antrian dengan satu server dimana pelanggan datang berdasarkan suatu proses Poisson dengan laju λ. Misalkan T= waktu antar kedatangan pelanggan berdistribusi ekspoensial dan iid,maka

$P(T \leq t) = 1- e^{-\lambda t}, \ t \geq 0$

(ii). Mean waktu antar kedatangan adalah $1/\lambda$

(iii). Waktu pelayanan untuk seorang pelanggan berdistribusi eksponensial. Misalkan S= waktu pelayanan, dan μ = mean rate pelayanan (banyaknya pelayanan per satuan waktu) , maka

$E(S) = 1/\mu$ = mean waktu pelayanan , dan

$P(S \leq t) = 1-e^{-\mu t}, \ t \geq 0$

(iv). Misalkan A(t)= banyaknya kedatangan pada selang waktu [0,t], maka

(v). Misalkan L(t) = banyaknya pelanggan dalam sistem (dalam antrian dan dalam pelayanan) pada waktu t, $t \geq 0$.

1.2.1 Pendekatan Statistical Equilibrium

Untuk sistem M/M/1, proses $\mu_i = q_{i,i-1}$ merupakan suatu proses Markov. Jika statistical equlibrium tercapai maka $p_n = \lim p_n(t)$, sehingga akan diperoleh:

Untuk state 0 : $\mu p_1 = \lambda p_0 \Rightarrow p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$

Untuk state 1 : $\mu p_1 + \lambda p_1 = \lambda p_0 + \mu p_2 \Rightarrow p_2 = \frac{(\lambda+\mu)p_1 - \lambda p_0}{\mu} = \frac{(\lambda+\mu)\frac{\lambda}{\mu}p_0 - \lambda p_0}{\mu} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0$

Untuk state 2 : $\mu p_2 + \lambda p_2 = \lambda p_1 + \mu p_3 \Rightarrow p_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0$

Untuk state n : $\lambda + \mu \;\; p_n = \mu p_{n+1} + \lambda p_{n-1}, n \geq 0 \Rightarrow p_{n+1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1} p_0$

Untuk menyelesaikan sistem ini diperlukan hubungan yaitu $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$. Misalkan $\rho = \lambda/\mu$, maka diperoleh hubungan

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i . p_0 = 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i . p_0 = 1$$

Dan dengan normalisasi didapatkan $p_0 = 1- \rho \Rightarrow \rho = 1- p_0$ dan $p_n = \rho^n(1- \rho)$, $n \geq 1$, dengan p_0 adalah peluang waktu idle, sedangkan ρ adalah peluang waktu sibuk. Dengan demikian maka statistical equilibrium tercapai bila $\rho = \lambda/\mu < 1$. Jika $\rho < 1$, maka ekspetasi banyaknya pelanggan pada sistem antrian adalah

$$L = E[L(t)] = \sum_{i=0}^{\infty} i.pi = \sum_{i=0}^{\infty} i.p_0.\rho^i = p_0\rho \sum_{i=0}^{\infty} i.p_0.\rho^{i-1}$$

$$= p_0\rho\left[\frac{1}{1-\rho} + \frac{1}{(1-\rho)^2}\right] = p_0 \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

$$= \frac{1}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

Dan

$$\sigma_N^2 = \mathrm{Var}[L(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} (n-L)^2 \pi_n = \frac{\rho}{(1-\rho)2}$$

Misalkan E(R) menyatakan ekspetasi waktu respon sebarang pelanggan. Dengan menggunakan Little Formula ($L=\lambda W$) yaitu state dari rata-rata banyaknya pekerjaan dalam sistem antrian dalam steady-state adalah sama dengna perkalian rate kedatangan dan rata-rata waktu respon, maka

$$E(N)=\lambda.E(R) \Rightarrow E(R)=\frac{E(N)}{\lambda}=\frac{\frac{\rho}{1-\rho}}{\lambda}=\frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}=\frac{\lambda/\mu}{\lambda/(1-\lambda/\mu)}=\frac{1/\mu}{1-\rho}=\frac{1}{\mu-\lambda}$$

Karena E(R) = W + E(S) , maka diperoleh

$$W= E(R)-E(S) = \frac{1/\mu}{1-\rho}-\frac{1}{\mu}=\frac{1-(1-\rho)}{(1-\rho)\mu}=\frac{\rho}{(1-\rho)\mu}=\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Dan

$$L_Q=\lambda W=\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Dimana W menyatakan ekspetasi dari waktu tunggu sebarang pelanggan

S menyatakan ekspetasi waktu pelayanan seorang pelanggan

L_Q menyatakan ekspetasi banyaknya pelanggan yang mengantri

6. Studi Kasus Dua Proses Kelahiran dan Kematian

Suatu komputer di Laboratorium rata-rata menerima 30 perintah tiap menit, dan diasumsikan perintah-perintah tersebut mengikuti proses Poisson. Komputer tersebut mengerjakan perintah dengan disiplin antrian FCFS (fisrt come first service) dan waktu pengerjaan satu perintah berdistribusi eksponensial dengan mean 1/40 menit. Bila pihak laboratorium ingin meningkatkan pelayanan komputer tersebut maka dapat dilakukan dengan dua alternatif yaitu :

(i). Membeli satu komputer yang sama dengan komputer yang lama

(ii). Mengganti komputer lama dengan satu komputer baru dengan kemampuan menyelesaikan 50 pekerjaan salam satu menit.

Dari kasus diatas dapat diperoleh informasi yaitu :

Alternatif (i) merupakan sistem M/M/2, yaitu dengan persamaan kesetimbangan :

$$p_k=\frac{1}{2^{k-1}}\rho^k P_0 \text{ dan } \sum_{i=0}^{\infty} P_i=1$$

Maka diperoleh

$$1=P_0+\rho P_0+\frac{1}{2}\rho^2 P_0+\frac{1}{2^2}\rho^3 P_0 + \ldots + \frac{1}{2^k}\rho^{k+1}P_0 + \ldots$$

Karena trafic intensitas dari

$$\rho_t = \frac{\text{rate kedatangan}}{\text{maximum rate selesai pelayanan}} = \frac{\lambda}{s\mu}$$

Maka diperoleh

$$P_0[1+2\rho_t+2\rho_t^2+2\rho_t^3 + \ldots + 2\rho_t^{k+1} + \ldots] = P_0\left[1+\frac{2\rho_t}{1-\rho_t}\right] = 1$$

Sehingga diperoleh Po yaitu peluang waktu idle (tidak sibuk) yaitu

$$P_0 = \frac{1}{1+\frac{2\rho_t}{1-\rho_t}} = \frac{1-\rho_t}{1+\rho_t}$$

Dengan trafic intensitas $\rho_t = = \frac{30}{2(50)} = \frac{30}{100} = 0.3 < 1$ dan $P_0 = \frac{1-0.3}{1+0.3} = 0.538$

Rata-rata banyaknya perintah dalam antrian adalah

$$L_Q = \frac{\lambda\mu(\frac{\lambda}{\mu})^s}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2} = \frac{(30)(50)(0.6)^2}{(2-1)!(2\times 50-30)^2} = 0.1102$$

Rata-rata banyaknya perintah dalam sistem adalah

$$E[L] = \frac{2\rho_t}{1-\rho_t^2} = \frac{2(0.3)}{1-(0.3)^2} = 0.659$$

Rata-rata waktu respon dari satu perintah adalah

$$E[R] = \frac{2}{\mu(1-\rho_t^2)} = 0.0439$$

Dengan rata-rata waktu tunggu satu perintah adalah

$$W_Q = \frac{\mu(\frac{\lambda}{\mu})^s}{(s-1)(s\mu-\lambda)^2} P_0 = 0.00197$$

Dan rata-rata waktu tunggu sistem yaitu $W = W_Q + 1/\mu = 0.00197 + 0.02 = 0.02197$. Dengan demikian diperoleh $L = \lambda W = 30(0.00197) = 0.659$

Alternatif (ii) merupakan sistem M/M/1, dengan trafic intensitas dan rata-rata panjang antrian perintah yang harus diselesaikan komputer tersebut berturut turut adalah

$$\rho_t = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{30}{40} = 0.75 < 1 \quad \text{dan } L = E[L] = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{30}{40-30} = 3 \text{ perintah}$$

Sedangkan rata-rata waktu respon dari satu perintah adalah

$$E[R]=\frac{1}{\mu-\lambda}=\frac{1}{40-30}=0.1 \text{ menit}$$

Dan rata-rata waktu tunggu dari satu perintah yaitu

$$W=\frac{\mu}{\mu(\mu\text{-}\lambda)}=\frac{30}{40(40-30)}=0.075 \text{ menit}$$

Sehingga diperoleh rata-rata banyaknya perintah yang mengantri yaitu $L_Q = 30(0.075) = 2.25$

Dengan demikian jika diterapkan dari kedua alternatif tersebut diatas maka lebih baik memilih parameter ukuran kualitas pelayanan untuk sistem M/M/2, yaitu dengan menambah satu komputer yang sama dengan komputer yang lama.

7. Kesimpulan

Dari rantai Markov waktu kontinu dapat diketahui dan dipelajari sifat (kelakuan) suatu proses stokastik setelah proses tersebut berjala dalam selang waktu yang panjang maupun singkat. Sehingga dapat diklasifikasikan dan di berikan perlakuan (treatment) yang tepat terhadap permasalahan dari suatu proses stokastik yang ada. Persamaan differensial Kolmogorof merupakan sistem untuk mendapatkan distribusi peluang di waktu t+h dengna mengkondisikan terhadap keadaan di waktu-waktu mendatang dan sebelumnya.

Daftar Pustaka

Geza Scay, 2007, Introduction to Probability with Statistical Aplication, Birkhauser, Boston

Ross, M. Sheldom , 2000 , Introduction to Models Probability, John Wiley & Sons, Inc

Ross, M. Sheldom , 1986 , Stochastics Process, John Wiley & Sons, Inc

Taylor, M. Howard and Karlin, Samuel, 1975, A Fisrt Course in Stochastics Processes, Academic Press, Inc

Zastawniak, T. and Brzezniak, Z, 2003, Basic Stochastic Processes, Springer