ANALISIS STABILITAS MODEL PERSAMAAN DIFERENSIAL PADA INTERAKSI DUA POPULASI DENGAN FAKTOR LOGISTIK

Supandi[1]

Abstrak

Persaingan kehidupan di alam dapat dikategorikan dua jenis yaitu pertama persaingan antara dua spesies dengan jenis makanan yang sama, dan yang kedua persaingan antara dua spesies dengan satu spesies sebagai pemangsa (predator) dan yang lainnya sebagai mangsa (prey). Dalam paper ini akan dibahas model persaingan dua spesies dengan jenis makanan yang sama dengan menggunakan sistem persamaan diferensial. Dari model ini akan ditentukan kapan kedua spesies saling berdampingan, atau kapan salah satu diantaranya akan punah dengan melihat parameter parameter yang diberikan.

Kata kunci : titik kritis, nilai eigen, stabil

Pendahuluan

Pandang suatu sistem persamaan diferensial yang menggambarkan perkembangan populasi dari dua spesies dimana kedua spesies tersebut saling bersaing/berkompetisi untuk dapat mempertahankan hidupnya dengan jumlah persediaan makanan (logistik) yang tersedia cukup.

Interaksi dua komunitas spesies dinyatakan sebagai bentuk fungsi x(t) dan fungsi yang lain yaitu y(t). Dalam sistem kehidupan di alam kedua fugnsi tersebut bisa digambarkan sebagai dua komunitas binatang seperti hidupnya sekumpulan serigala dan sekumpulan rusa yang hidup di suatu daerah yang sama. Dalam paper ini diambil dua komunitas yang memiliki bahan makanan sama, misal komunitas sapi dan kambing dalam sautu hutan dengan bahan makanan yang sama. Kedua fungsi tersebut dapat digambarkan dalam sistem persamaan diferensial biasa nonlinier sebagai berikut :

$$\begin{aligned} g_1 &= x(a-by-cx) \\ g_2 &= y(d-ex-fy) \end{aligned} \qquad (1)$$

dengan nilai parameter a,b,c,d >0.
Sistem persamaan differensial (1) mempunyai empat titik kritis sebagai berikut:

$$\{y=0,x=0\},(y=\frac{d}{f},x=0\},\{y=0,x=\frac{a}{c}\}\ \text{dan}\ \{y=\frac{ea-cd}{eb-cf},\ x=\frac{db-fa}{eb-cf}\}$$

---

[1] Program Studi Pendidikan Matematika IKIP PGRI Semarang

Dengan bentuk matrik Jacobian dari persamaan 1 disajikan sebagai berikut:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{a-by-2cx} & \text{xb} \\ \text{-ye} & \text{d-ex-2fy} \end{bmatrix}$$

Dari persamaan matrik Jacobian yang telah diperoleh dari persamaan 2, dapat ditentukan syarat terhadap model yang digambarkan dalam persamaan 1 yang memungkinkan terjadinya koeksistensi hidup berdampingan dua spesies yaitu spesies x dan spesies y. Dengan menggunakan persamaan 1 maka dapat diperoleh kasus kasus (4 kasus) penyelesaian untuk nilai x dan y tidak nol

Analisis Model

Kasus pertama $\frac{d}{e} > \frac{a}{c}$ dan $\frac{d}{f} > \frac{a}{b}$

Dalam hal kasus pertama ini terjadi maka persamaan 1 akan memiliki titik kritis yaitu (0,0), (0,d/f),(a/c,0) dengan analisis analisis linier sebagai berikut:

1. Titik kritis (0,0)

   Bentuk persamaan 2 untuk titik kritis (0,0) mempunyai nilai eigen λ_1=a > 0 dan λ_2= d >0 dengan bentuk matrik Jacobian sebagai berikut:

   $$J=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

   Dari nilai eigen yang dihasilkan maka titik (0,0) bersifat node, tidak stabil dan negatif attracting

2. Titik kritis (0,d/f)

   Untuk titik kritis (0,d/f) bentuk persamaan 2 mempunyai matrik Jacobian sebagai berikut:

   $$J=\begin{bmatrix} a-\frac{bd}{f} & 0 \\ -\frac{ed}{f} & -d \end{bmatrix}$$

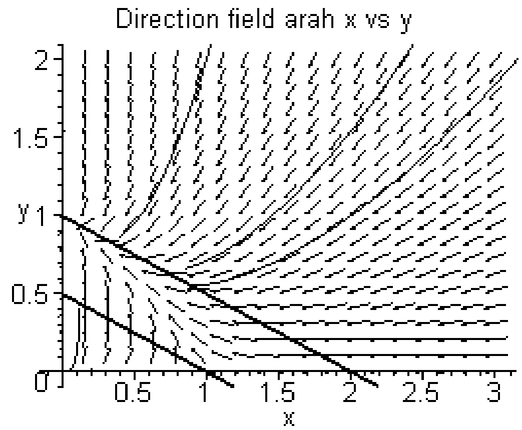
   dengan nilai eigen $\lambda_1 = -\frac{db-fa}{f} < 0$ dan $\lambda_2 = -d < 0$. Dengan demikian maka titik kritis (0,d/f) merupakan titik asimptotik stabil dan positif attracting

3. Titik kritis (a/c,0)

   Matrik Jacobian untuk titik kritis (a/c,0) adalah

$$J=\begin{bmatrix} -a & -\frac{ba}{c} \\ 0 & d-\frac{ea}{c} \end{bmatrix}$$

dengan nilai eigen λ_1=-a<0 dan $\lambda_2=-\frac{ea-cd}{c}>0$. Sehingga titik kritis (a/c,0) bersifat tidak stabil dan saddle.



Gambar 1. Kasus dimana x(t) akan punah

Kasus kedua $\frac{d}{e}<\frac{a}{b}$ **dan** $\frac{d}{f}<\frac{a}{b}$

Dengan menggunakan persamaan 1, maka untuk kasus kedua ini akan diperoleh titik-titik kritis yaitu:

$$0,0\ ,\left(\frac{a}{b},0\right),\left(0,\frac{d}{e}\right)$$

Analisis dari masing-masing titik kritis tersebut sebagai berikut :

1. Titik kritis (0,0)

   Matriks Jacobi1

   $$J=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

   dengan nilai-nilai eigen λ_1=a>0, λ_2=d>0 sehingga titik kritis (0,0) bersifat node, tidak stabil dan negatif attracting.

2. Titik kritis $\left(\frac{a}{b},0\right)$

   Matriks Jacobi2

$$J = \begin{pmatrix} -a & -\frac{ac}{b} \\ 0 & a-\frac{af}{b} \end{pmatrix}$$

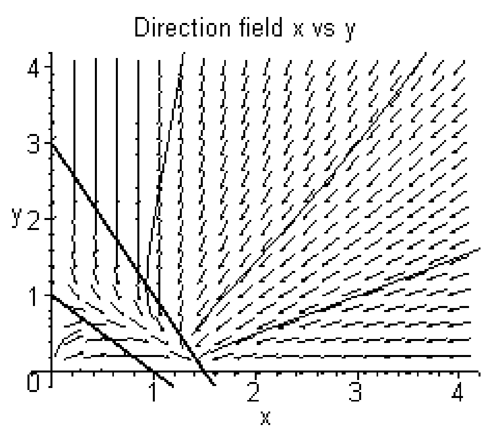
dengan nilai-nilai eigen λ_1=-a < 0 dan $\lambda_2=\frac{db-af}{b}<0$ sehingga titik kritis $\left(\frac{a}{b},0\right)$ bersifat asimtotik stabil dan positif attracting.

3. Titik kritis $\left(0,\frac{d}{e}\right)$

   Matriks Jacobi

$$J=\begin{pmatrix} a-\frac{dc}{e} & 0 \\ -\frac{df}{e} & -d \end{pmatrix}$$

   dengan nilai-nilai eigen $\lambda_1 = -d < 0$ dan $\lambda_2=\frac{ae-dc}{e}>0$ sehingga titik kritis $\left(0,\frac{d}{e}\right)$ bersifat tidak stabil dan saddle.



Gambar 2. Kasus dimana y(t) akan punah

Kasus ketiga $\frac{d}{e}>\frac{a}{c}$ dan $\frac{a}{b}>\frac{d}{f}$

Titik-titik kritisnya:

$$0,0\ ,\left(\frac{a}{b},0\right),\left(0,\frac{d}{e}\right),\ \left(\frac{ae-dc}{be-cf},\frac{db-af}{be-cf}\right)$$

dan dengan analisis liniernya didapat:

a. Titik kritis (0,0)

   Matriks Jacobi

$$J=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

dengan nilai-nilai eigen $\lambda_1=a>0$, $\lambda_2=d>0$ sehingga titik kritis (0,0) bersifat node, tidak stabil dan negatif attracting.

b. Titik kritis $\left(\frac{a}{b},0\right)$

Matriks Jacobi

$$J=\begin{pmatrix} -a & -\frac{ac}{b} \\ 0 & d-\frac{af}{b} \end{pmatrix}$$

dengan nilai-nilai eigen $\lambda_1=-a<0$ dan $\lambda_2=\frac{db-af}{b}<0$ sehingga titik kritis $\left(\frac{a}{b},0\right)$ bersifat node, stabil dan positif attracting

c. Titik kritis $\left(0,\frac{d}{e}\right)$

Matriks Jacobi

$$J=\begin{pmatrix} a-\frac{dc}{e} & 0 \\ -\frac{df}{e} & -d \end{pmatrix}$$

dengan nilai-nilai eigen $\lambda_1=-d<0$ dan $\lambda_2=\frac{ae-dc}{e}<0$ sehingga titik kritis $\left(0,\frac{d}{e}\right)$ bersifat node, stabil dan positif attracting

d. Titik kritis $(x,y)=\left(\frac{ae-dc}{be-cf},\frac{db-af}{be-cf}\right)$,

Matriks Jacobi

$$J=\begin{pmatrix} -bx & -cx \\ -fy & -ey \end{pmatrix}$$

dengan nilai-nilai eigennya memenuhi persamaan:

$$(\lambda+bx)(\lambda+ey)-cfxy=0$$

$$\lambda^2+(bx+ey)\lambda+(be-cf)xy=0 \qquad \text{... (3)}$$

Persamaan (3) mempunyai solusi:

$$\lambda_{1,2}=\frac{-(bx+ey)\pm\sqrt{(bx+ey)^2-4(be-cf)xy}}{2} \qquad \text{... (4)}$$

Kasus-kasus yang terjadi pada persamaan (4):

a. Jika $be-cf<0$ maka nilai akar yang berada dalam persamaan (4) bernilai positif dan lebih besar dari nilai $(bx+ey)^2$. Sehingga nilai eigen-eigennya adalah real dan berlainan tanda. Sehingga titik kritis (x, y) adalah titik saddle (tidak stabil) dan koeksistensi tidak mungkin terjadi.

b. Jika $be-cf>0$ maka nilai akar yang berada dalam persamaan (4) bernilai lebih dari nilai $(bx+ey)^2$. Sehingga nilai eigen-eigennya adalah real, negatif dan tidak sama atau kompleks dengan bagian real negatif. Namun kondisi kompleks tidak mungkin terjadi karena nilai akar yang berada dalam persamaan (4)

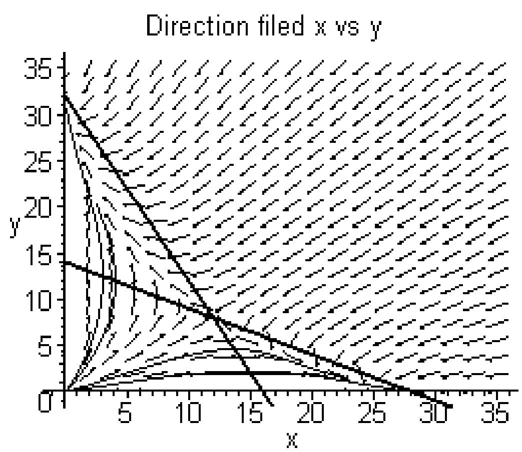
$$(bx+ey)^2-4(be-cf)xy=(bx-ey)^2+4cfxy>0$$

sehingga tidak mungkin nilai-nilai eigennya kompleks. Dengan demikian maka titik kritis (x,y) adalah titik node stabil asimtotik dan koeksistensi mungkin terjadi.

Namun pada kasus ini (lihat gambar) dimiliki pertidaksamaan

$$\frac{d}{e}>\frac{a}{c} \text{ atau } dc>ae \text{ dan } \frac{a}{b}>\frac{d}{f} \text{ atau } af>db \qquad \text{... (5)}$$

Dengan persamaan (5) di atas dan fakta bahwa nilai x, y positif, diperoleh pertidaksamaan $be<cf$ (memenuhi kasus (a) di atas untuk kondisi persamaan (4)). Sehingga dalam kasus ini titik kritis (x, y) adalah titik saddle dan koeksistensi tidak mungkin terjadi.



Gambar 3. Kasus dimana salah satu dari x(t) atau y(t) akan punah

Kasus keempat $\frac{a}{c}>\frac{d}{e}$ dan $\frac{d}{f}>\frac{a}{b}$

Titik-titik kritisnya:

$$0,0\ ,\left(\frac{a}{b},0\right),\left(0,\frac{d}{e}\right),\left(\frac{ae-dc}{be-cf},\frac{db-af}{be-cf}\right)$$

dan dengan analisis liniernya:

a.Titik kritis (0,0)

Matriks Jacobi

$$J=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

dengan nilai-nilai eigen $\lambda_1=a>0$, $\lambda_2=d>0$ sehingga titik kritis (0,0) bersifat node, tidak stabil dan negatif attracting.

b.Titik kritis $\left(\frac{a}{b},0\right)$

Matriks Jacobi

$$J=\begin{pmatrix} -a & -\frac{ac}{b} \\ 0 & d-\frac{af}{b} \end{pmatrix}$$

dengan nilai-nilai eigen $\lambda_1=-a<0$ dan $\lambda_2=\frac{db-af}{b}>0$ sehingga titik kritis $\left(\frac{a}{b},0\right)$ bersifat tidak stabil dan saddle.

c.Titik kritis $\left(0,\frac{d}{e}\right)$

Matriks Jacobi

$$J=\begin{pmatrix} a-\frac{dc}{e} & 0 \\ -\frac{df}{e} & -d \end{pmatrix}$$

dengan nilai-nilai eigen $\lambda_1=-d<0$ dan $\lambda_2=\frac{ae-dc}{e}>0$ sehingga titik kritis $\left(0,\frac{d}{e}\right)$ bersifat tidak stabil dan saddle.

d.Titik kritis $x,y=\left(\frac{ae-dc}{be-cf},\frac{db-af}{be-cf}\right)$

Matriks Jacobi

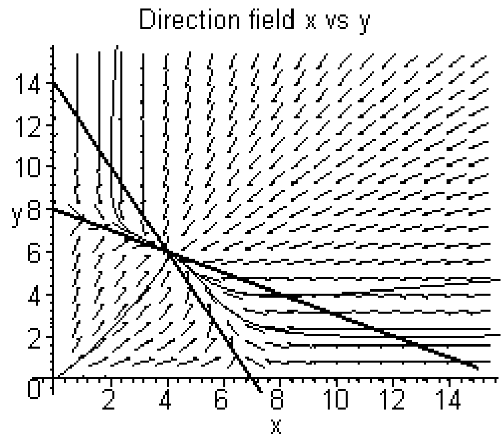
$$J=\begin{pmatrix} -bx & -cx \\ -fy & -ey \end{pmatrix}$$

dengan nilai-nilai eigennya memenuhi persamaan (3). Dengan kasus-kasus yang sama terjadi pada persamaan (4).

Namun pada kasus (lihat gambar) ini dimiliki pertidaksamaan

$$\frac{d}{e} < \frac{a}{c} \text{ atau } dc<ae \text{ dan } \frac{a}{b} < \frac{d}{f} \text{ atau } af<db \qquad \text{... (6)}$$

Dengan persamaan (6) di atas dan fakta bahwa nilai x, y positif, diperoleh pertidaksamaan $be > cf$ (memenuhi kasus (b) di atas untuk kondisi persamaan (4)). Sehingga dalam kasus ini titik kritis *(x, y)* adalah titik stabil asimtotik dan koeksistensi terjadi.



Gambar 4. Kasus dimana x(t) dan y(t) akan hidup berdampingan

Kesimpulan

Untuk beberapa kasus di atas dapat terlihat dan diambil kesimpulan bahwa titik-titik kritis $0,0$, $\left(\frac{a}{b},0\right),\left(0,\frac{d}{e}\right)$ tidak stabil. Kemudian untuk sebarang nilai awal positif dari populasi x dan y, dua populasi mendekati keadaan equilibrium yaitu keadaan koeksistensi yang diberikan oleh titik kritis $\left(\frac{ae\text{-}dc}{be\text{-}cf},\frac{db\text{-}af}{be\text{-}cf}\right)$.

Sistem (2) membuktikan interpretasi secara biologis bahwa terjadi atau tidak terjadinya koeksistensi bergantung dari $be-cf$ bernilai positif atau negatif. 'b' adalah ukuran dari pengaruh pelarangan pertumbuhan setiap populasi pada populasinya sendiri (keterbatasan logistik), sedangkan 'c' adalah ukuran dari pengaruh larangan pertumbuhan dari setiap populasi terhadap species lainnya.

Selanjutnya ketika $be > cf$, interaksi (kompetisi) antar species yang terjadi lemah dan species dapat koeksistensi (bertumbuh secara beriringan). Sedangkan ketika $be < cf$, interaksi (kompetisi) antar species yang terjadi kuat dan species tidak dapat koeksistensi sehingga berakibat salah atau species harus mati (punah).

Kasus a,b dan c merupakan titik-titik terjadinya kepunahan salah satu atau kedua species, dan hanya kasus d yang berkorespodensi terhadap panjang waktu survival kedua species.

Jadi dapat disimpulkan bahwa dari sistem (1):

- Jika $x \geq 0$ dari persamaan (1.a) menunjukkan x meningkat atau menurun menurut $a-bx-cy>0$ atau $a-bx-cy<0$

- Begitu juga untuk persamaan (1.b) bahwa y naik atau turun berdasarkan $d - ey - fx > 0$ atau $d - ey - fx < 0$
- Garis $a - bx - cy = 0$ disebut *nullciline* x bila titik kritisnya terjadi untuk no.4 untuk setiap kasus

Daftar Pustaka

[1] C.Henry Eduards & David E. Penney, 2000, Differential Equations and Boundary Value Problems, Computing and Modelling, Second Edition, Prentice Hall, New Jersey

[2] F. Verhulst, 1996, Nonlinier Differential Equations and Dynamical System, Second Edition, Springer-Verlag, New York Inc.

[3] http://www.duke.edu/education/ccp/materials/postcalc/predprey/contents.html, System of Differential Equations : Model of Species Interaction

[4] S.Wiggins., 1990, Introduction to applied Nonlinier Dynamical System and Chaos, Springer-Verlag, New York Inc