

ANALISIS KESTABILAN DAN SIMULASI MODEL PENYAKIT DEMAM BERDARAH DENGUE (DBD)

Aurora Nur Aini dan Ali Shodiqin

Universitas PGRI Semarang

alishodiqin81@gmail.com

Abstrak

Indonesia adalah Negara yang terletak pada daerah tropis dan sangat rentan terjangkit wabah penyakit tropis. Salah satu penyakit tropis yang sering terjadi di Indonesia adalah Demam Berdarah Dengue. Menurut data dari Departemen Kesehatan pada tahun 2014, sampai pertengahan bulan Desember tercatat penderita Demam Berdarah Dengue di 34 Provinsi di Indonesia sebanyak 71.668 orang dan 641 orang diantaranya meninggal dunia. Penyakit DBD disebabkan oleh virus dengue yang ditularkan oleh nyamuk *Aedes Aegypti* betina. Pada penelitian ini dibahas tentang pembentukan model matematika penyebaran penyakit demam berdarah dengue. Dari model tersebut selanjutnya dibuat analisis kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Kemudian dilakukan simulasi menggunakan software Matlab untuk melihat perilaku solusi di sekitar titik ekuilibrium.

Kata Kunci : dengue, ekuilibrium, kestabilan

A. Pendahuluan

Indonesia adalah Negara yang terletak pada daerah tropis. Ada beberapa penyakit yang rentan menyerang manusia yang berada pada daerah tropis seperti demam berdarah. Menurut data dari Departemen Kesehatan pada tahun 2014, sampai pertengahan bulan Desember tercatat penderita Demam Berdarah Dengue di 34 Provinsi di Indonesia sebanyak 71.668 orang, dan 641 orang diantaranya meninggal dunia. Angka tersebut lebih rendah dibandingkan tahun sebelumnya, yaitu sebanyak 112.511 penderita pada tahun 2013, dengan jumlah kasus meninggal sebanyak 871 penderita.

Penyakit dengue adalah penyakit yang disebabkan oleh virus dengue dari genus *Flavivirus*, famili *Flaviviridae*. Ada 4 jenis serotipe dengue, yaitu DEN-1, DEN-2, DEN-3, dan DEN-4, yang memiliki antigen terkait satu dengan lainnya.

Virus dengue ditularkan ke manusia melalui gigitan nyamuk *Aedes Aegypti* betina, yang merupakan vektor utama penularan virus dengue.

A. Karena demam dengue merupakan permasalahan dunia, banyak peneliti telah mengkaji masalah tersebut ditinjau dari berbagai bidang keilmuan. Di bidang matematika, kajian masalah demam berdarah dilakukan dengan menggunakan model matematika. Dalam penelitian ini dibahas tentang model matematika penyebaran virus dengue di suatu wilayah dengan memperhatikan populasi nyamuk *Aedes Aegypti* sebagai vektor. Selanjutnya dilakukan simulasi penyebaran penyakit dengue .

B. Model Penyakit Dengue

Dalam model penyakit dengue ini populasi manusia dibagi menjadi 3 kelas, yaitu kelas rentan/*susceptible* (S_h) yang menyatakan kelas individu yang belum terjangkit penyakit dengue dan berpotensi terkena penyakit tersebut, kelas terinfeksi/*infectious* (I_h) yang menyatakan kelas individu yang terinfeksi oleh virus dengue dan memiliki kemampuan menularkan virus dengue tersebut kepada vektor penular (nyamuk), kelas sembuh/*recovery* (R_h) yang menyatakan kelas individu yang telah sembuh dari infeksi virus

Populasi nyamuk dibagi menjadi dua kelas, yaitu kelas rentan (S_v) dan kelas terinfeksi (I_v).

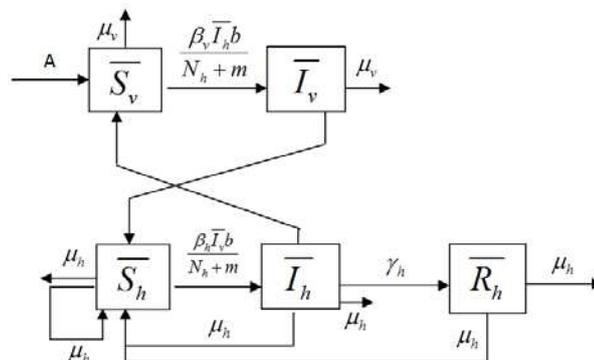
Misalkan $S_h(t)$; $I_h(t)$; dan $R_h(t)$ masing-masing menyatakan jumlah manusia yang rentan terhadap infeksi virus pada saat t , jumlah manusia yang terinfeksi virus pada saat t , jumlah manusia yang sembuh dari infeksi virus pada saat t . Lebih lanjut, dimisalkan $N_h(t)$ menyatakan jumlah populasi manusia pada saat t , berlaku hubungan berikut:

$$S_h(t) + I_h(t) + R_h(t) = N_h(t)$$

Selanjutnya misalkan S_v dan I_v masing-masing menyatakan jumlah nyamuk yang rentan terhadap infeksi virus pada saat t , dan jumlah nyamuk yang terinfeksi virus dengue pada saat t , Dimisalkan $N_v(t)$ menyatakan jumlah populasi nyamuk yang menjadi vektor penular virus dengue strain pertama pada saat t , berlaku hubungan berikut: $S_v(t) + I_v(t) = N_v(t)$

Ada beberapa asumsi yang digunakan dalam pembentukan model, yaitu total populasi manusia dan nyamuk dianggap konstan, laju kelahiran dan laju kematian manusia dianggap sama, kelahiran pada populasi nyamuk dan manusia pada setiap kelas masuk ke dalam kelas rentan, setiap individu yang terdapat dalam populasi memiliki kemungkinan yang sama untuk tergigit nyamuk, tingkat gigitan nyamuk terinfeksi lebih tinggi daripada nyamuk rentan. Parameter yang digunakan dalam pembuatan model penyebaran penyakit demam berdarah dengue ini adalah sebagai berikut: N_h menyatakan jumlah populasi manusia, N_v menyatakan jumlah populasi nyamuk, μ_h menyatakan angka kelahiran dan angka kematian manusia, μ_v menyatakan angka kelahiran dan angka kematian nyamuk, b adalah tingkat gigitan nyamuk, m adalah jumlah host selain manusia yang menjadi sumber makanan nyamuk, β_v adalah peluang penyebaran virus dari \bar{I}_h ke \bar{S}_v , $\frac{\beta_v \bar{I}_h b}{N_h + m}$ adalah laju perubahan \bar{S}_v menjadi \bar{I}_v , β_h adalah peluang penyebaran virus dari \bar{I}_v ke \bar{S}_h , $\frac{\beta_h \bar{I}_v b}{N_h + m}$ adalah laju perubahan \bar{S}_h menjadi \bar{I}_h , $\beta_v b$ adalah kemampuan interaksi \bar{I}_h dengan \bar{S}_v , $\beta_h b$ adalah kemampuan interaksi \bar{I}_v dengan \bar{S}_h , serta A menyatakan laju rekrutmen nyamuk

Dari masalah penyebaran penyakit demam berdarah dengue di atas, dapat dibuat diagram transfer sebagai berikut:



Gambar 1. Diagram Transfer Model Penyakit Dengue

Dari diagram transfer pada Gambar 1, diperoleh sistem persamaan diferensial:

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{S}_h}{dt} &= \mu_h N_h - \frac{\beta_h b}{N_h + m} \bar{S}_h \bar{I}_v - \mu_h \bar{S}_h \\
\frac{d\bar{I}_h}{dt} &= \frac{\beta_h b}{N_h + m} \bar{S}_h \bar{I}_v - (\mu_h + \gamma_h) \bar{I}_h \\
\frac{d\bar{R}_h}{dt} &= \gamma_h \bar{I}_h - \mu_h \bar{R}_h \\
\frac{d\bar{S}_v}{dt} &= A - \frac{\beta_v b}{N_h + m} \bar{S}_v \bar{I}_h - \mu_v \bar{S}_v \\
\frac{d\bar{I}_v}{dt} &= \frac{\beta_v b}{N_h + m} \bar{S}_v \bar{I}_h - \mu_v \bar{I}_v
\end{aligned} \tag{1}$$

Dengan memenuhi:

$$N_h = \bar{S}_h + \bar{I}_h + \bar{R}_h \text{ dan } N_v = \bar{S}_v + \bar{I}_v$$

Sebuah subset T didefinisikan sebagai

$$\bar{S}_h + \bar{I}_h + \bar{R}_h = N_h \text{ dan } \bar{S}_v + \bar{I}_v = \frac{A}{\mu_v}$$

Adalah daerah invariant untuk system (1), karena untuk setiap nilai awal yang diambil di T, solusinya akan memenuhi

$$\frac{d\bar{S}_h}{dt} + \frac{d\bar{I}_h}{dt} + \frac{d\bar{R}_h}{dt} = 0 \text{ dan } \frac{d\bar{S}_v}{dt} + \frac{d\bar{I}_v}{dt} = 0$$

Selanjutnya karena N_h konstan dan $N_v \rightarrow \frac{A}{\mu_v}$, seluruh path akan menuju ke T. Selanjutnya akan dilihat perilaku solusi di sekitar ekuilibrium pada himpunan invariant.

Tanpa mengurangi perumuman, dapat dibentuk proporsi sebagai berikut:

$$S_h = \frac{\bar{S}_h}{N_h}; I_h = \frac{\bar{I}_h}{N_h}; R_h = \frac{\bar{R}_h}{N_h}; S_v = \frac{\bar{S}_v}{A/\mu_v}; I_v = \frac{\bar{I}_v}{A/\mu_v} \text{ Karena } \bar{R}_h = 1 - \bar{S}_h - \bar{I}_h \text{ dan } \bar{I}_v = 1 - \bar{S}_v,$$

maka system (1) pada daerah invariant T dapat ditulis sebagai system pertidaksamaan non linier tiga dimensi yang ekuivalen sebagai berikut:

$$\frac{dS_h}{dt} = \mu_h (1 - S_h) - b\beta_h \frac{A/\mu_v}{N_h + m} S_h I_v \quad (2)$$

$$\frac{dI_h}{dt} = b\beta_h \frac{A/\mu_v}{N_h + m} S_h I_v - (\mu_h + \gamma_h) I_h \quad (3)$$

$$\frac{dI_v}{dt} = b\beta_v \frac{N_h}{N_h + m} (1 - I_v) I_h - \mu_v I_v \quad (4)$$

Selanjutnya akan ditentukan titik ekuilibrium dari model penyakit dengue.

C. Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium dari system (2)-(4) diperoleh dengan menjadikan $\frac{dS_h}{dt} = 0$; $\frac{dI_h}{dt} = 0$; dan $\frac{dI_v}{dt} = 0$.

Pada saat $I_h = 0$ diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit dan $S_h = 1$. Untuk $I_h > 0$ nilai $S_h < 1$.

Karena untuk $t \rightarrow \infty$ berlaku $S_h \rightarrow S_{heq} \leq 1$ maka domain system tersebut dapat dibatasi pada daerah

$$\Omega = \{(S_h, I_h, I_v) \in \mathbb{R}_+^3 : 0 \leq I_v \leq 1, 0 \leq S_h, 0 \leq I_h, S_h + I_h \leq 1\}$$

Selanjutnya diberikan teorema tentang titik ekuilibrium Sistem Persamaan Diferensial (2)-(4).

Teorema 1:

Sistem Persamaan Diferensial (2)-(4) mempunyai dua titik ekuilibrium, yaitu:

1. Titik ekuilibrium bebas penyakit $(\mathbf{U}_0) = (1, 0, 0)$

2. Titik ekuilibrium endemik

$$(\mathbf{U}_1) = \left(\frac{(\beta + M)}{(\beta + MR_0)}, \frac{R_0 - 1}{\beta + MR_0}, \frac{\beta(R_0 - 1)}{R_0(\beta + M)} \right)$$

$$\text{dengan } \beta = \frac{b\beta_v N_h}{\mu_v (N_h + m)}, M = \frac{\mu_h + \alpha_h}{\mu_h}, \text{ dan } R_0 = \frac{b^2 \beta_h \beta_v N_h A / \mu_v}{\mu_v (N_h + m)^2 (\mu_h + \alpha_h)}$$

Bukti:

Titik ekuilibrium dari system (2)-(4) diperoleh dengan menjadikan $\frac{dS_h}{dt} = 0$; $\frac{dI_h}{dt} = 0$; dan $\frac{dI_v}{dt} = 0$.

Diperhatikan persamaan (4)

$$b\beta_v \frac{N_h}{N_h + m} (1 - I_v) I_h - \mu_v I_v = 0$$

$$\text{misal } \beta = \frac{b\beta_v N_h}{\mu_v (N_h + m)}$$

Diperoleh

$$I_v = \frac{\frac{b\beta_v N_h I_h}{\mu_v (N_h + m)}}{\frac{b\beta_v N_h I_h}{\mu_v (N_h + m)} + \frac{\mu_v (N_h + m)}{\mu_v (N_h + m)}}, \quad (5)$$

Selanjutnya dari persamaan (2),

$$\mu_h (1 - S_h) - b\beta_h \frac{A / \mu_v}{N_h + m} S_h I_v = 0$$

$$\Leftrightarrow S_h = \frac{\beta I_h + 1}{(\beta + MR_0) I_h + 1} \quad (6)$$

dengan $R_0 = \frac{b^2 \beta_h \beta_v N_h A / \mu_v}{\mu_v (N_h + m)^2 (\mu_h + \alpha_h)}$ dan $M = \frac{\mu_h + \alpha_h}{\mu_h}$. Diperhatikan bahwa

$R_0 = \frac{b^2 \beta_h \beta_v N_h A / \mu_v}{\mu_v (N_h + m)^2 (\mu_h + \alpha_h)}$ ekuivalen dengan persamaan :

$$R_0 (\mu_h + \alpha_h) = \frac{\beta b \beta_h A / \mu_v}{(N_h + m)} \quad (7)$$

Substitusi persamaan (5), (6), dan (7) ke persamaan (3), diperoleh

$$b\beta_h \frac{A / \mu_v}{N_h + m} S_h I_v - (\mu_h + \gamma_h) I_h = 0$$

$$\Leftrightarrow (R_0 - 1) I_h - (\beta + MR_0) I_h^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow I_h = 0 \text{ atau } (R_0 - 1) - (\beta + MR_0) I_h = 0$$

Diperoleh $I_h = 0$ dan $I_h = \frac{R_0 - 1}{\beta + MR_0}$

Untuk $I_h = 0$, substitusi ke persamaan (4). Diperoleh $I_v = 0$

Selanjutnya, substitusi $I_v = 0$ ke persamaan (2), diperoleh $S_h = 1$

Diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit $e_0 = (S_h, I_h, I_v) = (1, 0, 0)$

Untuk mendapatkan titik ekuilibrium endemik, substitusi $I_h = \frac{R_0 - 1}{\beta + MR_0}$ ke persamaan (6) diperoleh

$$S_h = \frac{\beta I_h + 1}{(\beta + MR_0) I_h + 1} = \frac{(\beta + M)}{(\beta + MR_0)} \quad (8)$$

Kemudian substitusi $I_h = \frac{R_0 - 1}{\beta + MR_0}$ ke persamaan (5) diperoleh

$$I_v = \frac{\beta I_h}{\beta I_h + 1} = \frac{\beta(R_0 - 1)}{\beta R_0 + MR_0} = \frac{\beta(R_0 - 1)}{R_0(\beta + M)}$$

(9)

Sehingga diperoleh titik ekuilibrium endemik $e_1 = \left(\frac{(\beta + M)}{(\beta + MR_0)}, \frac{R_0 - 1}{\beta + MR_0}, \frac{\beta(R_0 - 1)}{R_0(\beta + M)} \right)$

Jadi, diperoleh dua titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit $(e_0) = (1, 0, 0)$ dan titik

ekuilibrium endemik $e_1 = \left(\frac{(\beta + M)}{(\beta + MR_0)}, \frac{R_0 - 1}{\beta + MR_0}, \frac{\beta(R_0 - 1)}{R_0(\beta + M)} \right)$

dengan $\beta = \frac{b\beta_v N_h}{\mu_v(N_h + m)}$, $M = \frac{\mu_h + \alpha_h}{\mu_h}$, dan $R_0 = \frac{b^2 \beta_h \beta_v N_h A / \mu_v}{\mu_v(N_h + m)^2 (\mu_h + \alpha_h)}$

■

Selanjutnya akan ditentukan kestabilan lokal titik ekuilibrium sistem (2)-(4)

Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Teorema 2.

$$\text{Diberikan } R_0 = \frac{b^2 \beta_h \beta_v N_h A / \mu_v}{\mu_v (N_h + m)^2 (\mu_h + \alpha_h)}$$

1. Jika $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit (\mathbf{u}_0) stabil asimtotik lokal
2. Jika $R_0 \geq 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit (\mathbf{u}_0) tidak stabil.

Bukti:

Matriks Jacobian dari system persamaan differensial (2)-(4) di sekitar titik ekuilibrium \mathbf{x} adalah sebagai berikut:

$$J(P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial S_h}{\partial S_h}(\mathbf{x}) & \frac{\partial S_h}{\partial I_h}(\mathbf{x}) & \frac{\partial S_h}{\partial I_v}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial I_h}{\partial S_h}(\mathbf{x}) & \frac{\partial I_h}{\partial I_h}(\mathbf{x}) & \frac{\partial I_h}{\partial I_v}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial I_v}{\partial S_h}(\mathbf{x}) & \frac{\partial I_v}{\partial I_h}(\mathbf{x}) & \frac{\partial I_v}{\partial I_v}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\left(\mu_h + b\beta_h \frac{A/\mu_v}{N_h + m} I_v \right) & 0 & -b\beta_h \frac{A/\mu_v}{N_h + m} S_h \\ b\beta_h \frac{A/\mu_v}{N_h + m} I_v & -(\mu_h + \gamma_h) & b\beta_h \frac{A/\mu_v}{N_h + m} S_h \\ 0 & b\beta_v \frac{N_h}{N_h + m} (1 - I_v) & -b\beta_v \frac{N_h}{N_h + m} I_h - \mu_v \end{bmatrix}$$

Dengan $P = (S_h, I_h, I_v) \in \Omega$.

Selanjutnya diberikan linearisasi Sistem Persamaan Diferensial (2)-(4) di sekitar titik ekuilibrium bebas penyakit \mathbf{u}_0 .

$$Jf\left(\begin{matrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{e}_0 \end{matrix}\right) = \begin{bmatrix} -\mu_h & 0 & -\frac{b\beta_h A/\mu_v}{N_h + m} \\ 0 & -(\mu_h + \gamma_h) & \frac{b\beta_h A/\mu_v}{N_h + m} \\ 0 & \frac{b\beta_v N_h}{N_h + m} & -\mu_v \end{bmatrix}$$

Dari matriks Jacobian di atas, persamaan karakteristiknya adalah sebagai berikut:

$$|J\left(\begin{matrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{e}_0 \end{matrix}\right) - \lambda I| = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\mu_h - \lambda & 0 & -\frac{b\beta_h A/\mu_v}{N_h + m} \\ 0 & -(\mu_h + \gamma_h) - \lambda & \frac{b\beta_h A/\mu_v}{N_h + m} \\ 0 & \frac{b\beta_v N_h}{N_h + m} & -\mu_v - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

Sehingga diperoleh

$$(-\mu_h - \lambda) \left[\lambda^2 + (\mu_h + \mu_v + \gamma_h) \lambda + (1 - R_0) \mu_v (\mu_h + \gamma_h) \right] = 0 \quad (11)$$

Dari persamaan di atas didapatkan nilai eigen sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -\mu_h$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-(\mu_h + \mu_v + \gamma_h) \pm \sqrt{(\mu_h + \mu_v + \gamma_h)^2 - 4(1 - R_0) \mu_v (\mu_h + \gamma_h)}}{2} \quad (12)$$

Selanjutnya akan dicari tanda dari $\lambda_{2,3}$.

Lemma 3.

Diberikan parameter-parameter μ_h, μ_v, γ_h , dan $R_0 > 0$. Jika $R_0 < 1$ maka

$$(\mu_h + \mu_v + \gamma_h)^2 - 4(1 - R_0) \mu_v (\mu_h + \gamma_h) > 0$$

Bukti :

Diketahui $R_0 < 1$. Misalkan $a = (\mu_h + \gamma_h)$ dan $b = \mu_v$, dengan $a, b > 0$ diperoleh

$$(a + b)^2 - 4ab(1 - R_0) > 0$$

sehingga diperoleh,

$$(\mu_h + \gamma_h + \mu_v)^2 - 4\mu_v(\mu_h + \gamma_h)(1 - R_0) > 0$$

■

Berdasarkan nilai-nilai eigen yang diperoleh, $\lambda_1 < 0$ karena $\mu_h > 0$. Kemudian akan ditentukan tanda untuk λ_2 dan λ_3 .

1. Jika $R_0 \geq 1$ maka $(1 - R_0) \leq 0$ sehingga diperoleh $4\mu_v(\mu_h + \gamma_h)(1 - R_0) \leq 0$ Akibatnya,

$$\sqrt{(\mu_h + \mu_v + \gamma_h)^2 - 4(1 - R_0)\mu_v(\mu_h + \gamma_h)} \geq \sqrt{(\mu_h + \mu_v + \gamma_h)^2} = (\mu_h + \mu_v + \gamma_h) \quad \text{Diperoleh } \lambda_2 \geq 0 \text{ dan } \lambda_3 = 0 \text{ . Jadi Titik}$$

ekuilibrium bebas penyakit $\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = (1, 0, 0)$ tidak stabil.

2. Jika $R_0 < 1$ maka $(1 - R_0) > 0$ sehingga diperoleh $4\mu_v(\mu_h + \gamma_h)(1 - R_0) > 0$ Akibatnya,

$$\sqrt{(\mu_h + \mu_v + \gamma_h)^2 - 4(1 - R_0)\mu_v(\mu_h + \gamma_h)} < \sqrt{(\mu_h + \mu_v + \gamma_h)^2} = (\mu_h + \mu_v + \gamma_h) \quad \text{Diperoleh } \lambda_2 < 0 \text{ dan } \lambda_3 < 0 \text{ . Jadi Titik}$$

ekuilibrium bebas penyakit $\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = (1, 0, 0)$ stabil asimtotik lokal.

Dengan menggunakan sifat-sifat fungsi Lyapunov dan himpunan invariant akan dibuktikan

$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = (1, 0, 0)$ stabil asimtotik global.

Didefinisikan $V_1 : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$V_1(S_h, I_h, I_v) = \left(\frac{b\beta_h A / \mu_v}{(N_h + m)\mu_v} \right) I_v + I_h \quad (13)$$

Turunan fungsi V_1 terhadap t adalah:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= \frac{\partial V_1}{\partial S_h} \frac{dS_h}{dt} + \frac{\partial V_1}{\partial I_h} \frac{dI_h}{dt} + \frac{\partial V_1}{\partial I_v} \frac{dI_v}{dt} \\
&= -b\beta_h \frac{A/\mu_v}{N_h + m} (1 - S_h) I_v \\
&\quad - (\mu_h + \gamma_h) [1 - R_0 (1 - I_v)] I_h
\end{aligned} \tag{14}$$

Selanjutnya dilakukan pengujian terhadap fungsi Lyapunov V_1 .

1. Fungsi $V_1(S_h, I_h, I_v) = \left(\frac{b\beta_h A/\mu_v}{(N_h + m)\mu_v} \right) I_v + I_h$ merupakan fungsi linier, maka V_1 kontinu.

Kemudian V_1 diturunkan secara parsial,

$$\frac{\partial V_1}{\partial S_h} = 0; \quad \frac{\partial V_1}{\partial I_h} = 1; \quad \frac{\partial V_1}{\partial I_v} = \frac{b\beta_h A/\mu_v}{(N_h + m)\mu_v}$$

Fungsi V_1 mempunyai turunan parsial pertama konstan. Karena bernilai konstan, jadi fungsi V_1 kontinu dan mempunyai derivatif parsial yang kontinu pada Ω

2. Untuk sebarang $E \in \Omega$ dengan $E \neq \mathbf{e}_0^1$, maka $V_1(E) > 0$. Sedangkan untuk $E = \mathbf{e}_0^1$, $V_1(E) = V_1(\mathbf{e}_0^1) = 0$. Jadi fungsi $V_1(E) > 0$ untuk setiap $E \in \Omega$, dengan $E \neq \mathbf{e}_0^1$ dan $V_1(E) = 0$ untuk $E = \mathbf{e}_0^1$.

3. Jika $R_0 < 1$ maka $(1 - R_0) > 0$ sehingga untuk sebarang $E \in \Omega$ diperoleh $\dot{V}_1 \leq 0$

Berdasarkan uraian di atas, maka $V_1(S_h, I_h, I_v)$ merupakan fungsi Lyapunov. Jika $\dot{V}_1 = 0$ diperoleh

$$-b\beta_h \frac{A/\mu_v}{N_h + m} (1 - S_h) I_v - (\mu_h + \gamma_h) [1 - R_0 (1 - I_v)] I_h = 0$$

Berdasarkan hasil di atas, jika $R_0 < 1$ maka diperoleh $(1 - S_h) I_v = 0$ dan $I_h = 0$. Berdasarkan hasil tersebut, diperoleh $I_h = 0$, $I_v = 0$, dan $S_h = 1$.

Kemudian jika $R_0 = 1$ diperoleh $(1 - S_h) I_v = 0$ dan $I_h I_v = 0$. Berdasarkan hasil tersebut diperoleh $I_h = 0$, $I_v = 0$, dan $S_h = 1$.

Dari hasil di atas dan berdasarkan definisi, E merupakan himpunan invariant terbesar dalam $H_1 = \{(S_h, I_h, I_v) \in \Omega \mid V_1(S_h, I_h, I_v) = 0\}$. Selanjutnya karena himpunan H_1 tidak memuat solusi kecuali titik ekuilibrium \mathcal{E}_0 maka setiap solusi dalam Ω menuju \mathcal{E}_0 untuk $t \rightarrow \infty$. Karena \mathcal{E}_0 stabil asimtotis lokal dan setiap solusi dalam Ω menuju \mathcal{E}_0 untuk $t \rightarrow \infty$ maka \mathcal{E}_0 stabil asimtotik global. ■

Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik

Pada bagian ini akan ditentukan kestabilan titik ekuilibrium model (2)-(4) yang memiliki titik ekuilibrium endemik

$$\mathcal{E}_1 = \left(\frac{(\beta + M)}{(\beta + MR_0)}, \frac{R_0 - 1}{\beta + MR_0}, \frac{\beta(R_0 - 1)}{R_0(\beta + M)} \right)$$

Analisis kestabilan titik ekuilibrium \mathcal{E}_1 diberikan oleh teorema berikut:

Teorema 4.

Titik ekuilibrium \mathcal{E}_1 merupakan titik ekuilibrium endemik yang stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$

Bukti:

Matriks Jacobian yang bersesuaian dengan system persamaan (2)-(4) di sekitar titik ekuilibrium \mathcal{E}_1 adalah $J(\mathcal{E}_1)$ Dimisalkan matriks Jacobian $J(\mathcal{E}_1)$ dituliskan menjadi

$$J(\mathcal{E}_1) = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ c & d & e \\ 0 & f & g \end{bmatrix}$$

Maka polinomial matriks $J(\mathcal{E}_1)$ adalah

$$P_2(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -b \\ -c & \lambda - d & -e \\ 0 & -f & \lambda - g \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C$$

Dengan

$$A = -(a + d + g)$$

$$= \mu_h \left(\frac{\beta + MR_0}{\beta + M} \right) + \mu_h M + \mu_v R_0 \left(\frac{\beta + M}{\beta + MR_0} \right)$$

$$B = ad + ag + dg - ef$$

$$= \frac{\mu_h^2 M (\beta + MR_0)}{\beta + M} + \mu_h \mu_v R_0 + \frac{\mu_h \mu_v M \beta (R_0 - 1)}{\beta + MR_0}$$

$$C = -(adg - aef + cbf) = \mu_h^2 \mu_v M (R_0 - 1)$$

Pada saat $R_0 > 1$ diperoleh nilai $A, B, C > 0$ dan

$$AB > \mu_h^2 \mu_v MR_0 > \mu_h^2 \mu_v M (R_0 - 1) = C$$

Jadi diperoleh $A, B, C > 0$ dan $AB > C$.

Selanjutnya dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz akan diuji kestabilannya. Berdasarkan koefisien polinomial $P_2(\lambda)$. Diperoleh,

$$a_0 = 1, a_1 = A, a_2 = B, a_3 = C, a_4 = 0, a_5 = 0$$

Berdasarkan nilai di atas dapat disusun matriks Hurwitz sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} A & 1 & 0 \\ C & B & A \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks Hurwitz di atas diperoleh,

$$V_1 = |A|$$

$$V_2 = \begin{vmatrix} A & 1 \\ C & B \end{vmatrix} = AB - C$$

$$V_3 = \begin{vmatrix} A & 1 & 0 \\ C & B & A \end{vmatrix} = C(AB - C)$$

Agar semua akar polynomial $P_2(\lambda)$ tersebut mempunyai bagian real negatif, maka harus memenuhi:

$$V_1 > 0 \Leftrightarrow A > 0$$

$$V_2 > 0 \Leftrightarrow AB - C$$

$$V_3 > 0 \Leftrightarrow C(AB - C) > 0 \Leftrightarrow C > 0$$

$$\frac{A}{a_0} > 0 \Leftrightarrow A > 0$$

$$\frac{B}{a_0} > 0 \Leftrightarrow B > 0$$

$$\frac{C}{a_0} > 0 \Leftrightarrow C > 0$$

Dari hasil di atas, semua akar polynomial $P_2(\lambda)$ mempunyai bagian real negative apabila $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$ dan $AB - a_0C > 0$. Karena $a_0 = 1$ maka cukup memenuhi $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$, dan $AB > C$. Jadi, titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik lokal.

■

D. SIMULASI MODEL PENYAKIT DEMAM BERDARAH

Simulasi model penyakit DBD dilakukan dengan bantuan sebuah toolbox dari program aplikasi MATLAB yaitu ODE-45 yang mengadaptasi Metode Runge-Kutta orde 4 dan 5.

Nilai-nilai parameter pada model disajikan pada tabel di bawah ini. Nilai-nilai parameter dihitung dalam satuan hari dengan asumsi 1 tahun=365 hari.

Parameter	Nilai
N_h	10.000
μ_h	0,0000457/ hari
μ_v	0,25 / hari
b	0,5

β_v	1
m	0
β_h	0,75
A	400
γ_h	0,1428/ hari

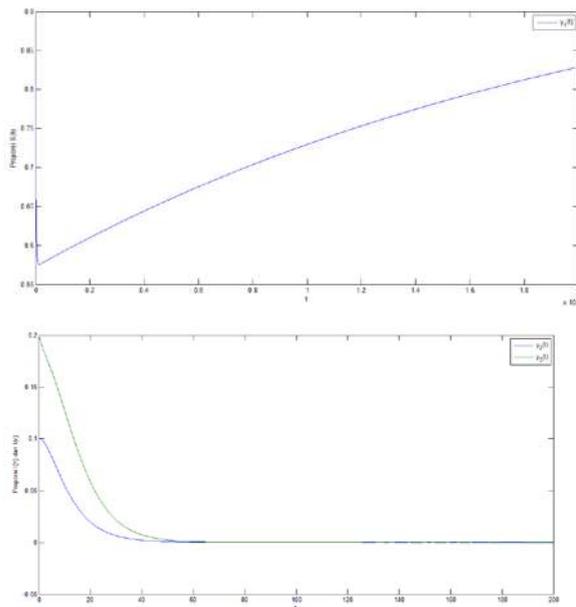
Tabel 1. Nilai parameter model

Simulasi Numerik Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Dari parameter-parameter pada tabel 5.1, diperoleh nilai R_0 sebagai berikut.

$$R_0 = \frac{b^2 \beta_h \beta_v N_h A / \mu_v}{\mu_v (N_h + m)^2 (\mu_h + \alpha_h)} = 0,84 < 1$$

Menurut pembahasan sebelumnya, jika $R_0 < 1$ maka solusi akan konvergen ke titik ekuilibrium bebas penyakit (1,0,0). Berikut adalah simulasi numerik untuk $R_0 < 1$.



Gambar 2. Diagram trayektori proporsi S_h, I_h , dan I_v terhadap waktu untuk nilai awal $S_h = 0,68$, $I_h = 0,1$ dan $I_v = 0,2$.

Dari gambar di atas, diambil nilai awal $S_h = 0,68$. Untuk $t \rightarrow \infty$ diperoleh proporsi nilai S_h menuju 1, I_h dan I_v menuju 0. Artinya untuk waktu yang cukup lama seluruh populasi manusia akan berada pada kelas populasi rentan.

Selanjutnya akan diberikan simulasi $R_0 \geq 1$

Simulasi Numerik Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik

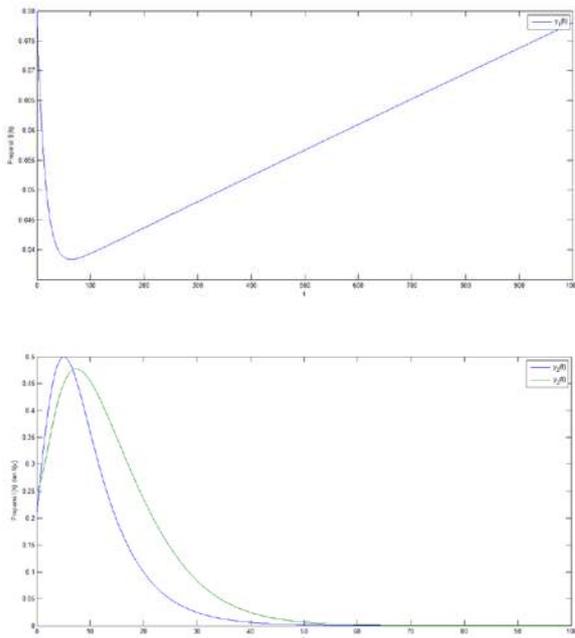
Dari parameter-parameter pada tabel 2, dengan mengubah nilai laju rekrutmen nyamuk menjadi 5000 diperoleh nilai R_0 sebagai berikut

$$R_0 = \frac{b^2 \beta_h \beta_v N_h A / \mu_v}{\mu_v (N_h + m)^2 (\mu_h + \alpha_h)} = 10,5 \geq 1$$

Menurut teorema, jika $R_0 \geq 1$ maka solusi akan konvergen ke titik ekuilibrium endemik

$$\begin{aligned} \left(\begin{matrix} S_1 \\ I_1 \\ V_1 \end{matrix} \right) &= \left(\begin{matrix} \frac{(\beta + M)}{(\beta + MR_0)}, \frac{R_0 - 1}{\beta + MR_0}, \frac{\beta(R_0 - 1)}{R_0(\beta + M)} \end{matrix} \right) \\ &= (0.0953, 0.000289, 0.000578) \end{aligned}$$

Berikut adalah simulasi numerik untuk $R_0 \geq 1$ dengan mengambil nilai awal $S_h = 0,08$, $I_h = 0,1$ dan $I_v=0,2$.



Gambar 3. Diagram trayektori proporsi variabel S_h , I_h , dan I_v terhadap waktu untuk nilai awal $S_h = 0,08$, $I_h = 0,1$ dan $I_v=0,2$.

Dari Gambar 3 terlihat bahwa kurva dimulai dari nilai awal akan menuju titik ekuilibrium endemic untuk waktu yang cukup lama.

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan pembahasan sebelumnya diperoleh kesimpulan, yaitu : sistem persamaan diferensial model penyakit dengue mempunyai dua buah titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemic. Eksistensi titik ekuilibrium bergantung pada parameter R_0 sebagai berikut.

- a. Jika $R_0 < 1$ maka system mempunyai satu titik ekuilibrium bebas penyakit
- b. Jika $R_0 \geq 1$ akan ada dua titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemic.

Kestabilan masing-masing titik ekuilibrium adalah sebagai berikut:

- a. Jika $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik
- b. Jika $R_0 \geq 1$ titik ekuilibrium bebas penyakit menjadi tidak stabil dan titik ekuilibrium endemic menjadi stabil

Dari pembahasan dan simulasi yang dilakukan dalam penelitian ini dapat diketahui bahwa salah satu cara untuk mencegah terjadinya ledakan dengue di suatu daerah adalah dengan mengontrol nilai-nilai parameternya. Perubahan yang dilakukan pada suatu nilai parameter dapat sangat berpengaruh terhadap terjadinya wabah dengue. Misalnya dengan mengontrol jumlah nyamuk *Aedes Aegypti* yang menjadi vektor utama penyebaran virus dengue, baik dengan menghilangkan tempat perkembangbiakan nyamuk maupun dengan memberantas nyamuk yang sudah dewasa.

DAFTAR PUSTAKA

- Adi-Kusumo, F., Aini, A.N., Ridwan, M., 2013, *Analysis of the Dengue Disease Model With Two Virus Strains*, Prosiding American Institute of Physics (AIP), Symposium of Biomathematics (SYMOMATH) 2013.
- Derouich, M., Boutayeb, A., Twizell, E.H., 2003, *A Model of Dengue Fever*, BioMedical Engineering OnLine 2003, 2-4.
- Esteva, L., Vargas, C, 1998, *Analysis of a Dengue Disease Transmission Model*, Mathematical Biosciences 150(1998) 131-151.

Gubler, D.J., 1997, *Epidemic Dengue/Dengue Haemorrhagic Fever : A Global Public Health Problem in the 21st Century*, ASM Press, Washington DC.