PERSAMAAN DIFFERENSIAL PARSIAL DALAM KOORDINAT SILINDIRS PADA MASALAH KONDUKSI PANAS

Agung Handayanto[1]

Abstrak

Proses perpindahan panas/energi melalui suatu media zat padat atau cair yang terjadi karena kontak langsung diantara partikel-pertikel yang mempunyai perbedaan temperatur disebut dengan konduksi panas.

Persamaan dasar perpindahan panas konduksi menyatakan bahwa : laju perpindahan panas konduksi satu dimensi dalam keadaan setimbang adalah : q = - kA (dT/dx) dimana k : konduktivitas termal bahan, A : luas penampang bahan yang diukur tegak lurus terhadap arah lintasan panas dan (dT/dx) : gradien temperatur ke arah perpindahan panas.

Untuk memperoleh persamaan distribusi temperatur, persamaan keseimbangan energi bagi masing-masing elemen selama waktu singkat Δt *adalah: aliran panas yang masuk selama* Δt *ditambah dengan perubahan dari energi-dalam selama* Δt *adalah sama dengan aliran panas yang keluar selama* Δt *ditambah dengan panas yang dicetuskan oleh sumber panas-dalam selama* Δt. *Dalam penjabarannya diruang dimensi tiga (silinder), akan diperoleh laju perpindahan panas pada arah z, r dan* θ *yaitu* q_z, q_r *dan* q_θ.

Kata kunci: laju perpindahan panas, deret taylor, persamaan konduktivitas panas

Pendahuluan

Istilah konduksi panas dapat kita temukan pada ilmu fisika, khususnya pada bahasan perpindahan panas. Perpindahan panas adalah proses berpindahnya panas dari benda/materi yang mempunyai temperatur tinggi ke benda/materi temperatur lebih rendah. Para ahli ilmu fisika sepakat bahwa perpindahan panas dapat terjadi melalui 3 (tiga) cara yang berlainan, yaitu cara konduksi, konveksi dan radiasi. Proses perpindahan panas secara konduksi (selanjutnya disebut perpindahan panas konduksi saja) pada

[1] Program Pendidikan Matematika IKIP PGRI Semarang

prinsipnya adalah suatu proses yang jika dua benda/materi atau dua bagian benda/materi temperaturnya disentuhkan dengan yang lainnya maka akan terjadilah perpindahan panas (Kreith, 2005).

Dalam bahasan ini akan didapatkan suatu persamaan differensial parsial dari penjabaran persamaan dasar perpindahan panas konduksi. Persamaan differensial parsial tersebut berada pada koordinat kartesian dimensi 1 (satu). Tetapi persamaan differensial parsial tersebut akan juga melukiskan untuk suatu penyelesaian pada sistem 2 (dua) dimensi dan 3 (tiga) dimensi.

Persamaan dasar perpindahan panas konduksi q_k akan diuraikan kedalam deret Taylor untuk suatu titik tertentu. Hal ini dilakukan karena temperatur merupakan fungsi dari jarak, yaitu fungsi dari koordinat-koordinat yang berubah-ubah dari satu titik ke titik yang lainnya. Dari titik tertentu kemudian diberlakukan untuk sembarang titik, sehingga persamaan tersebut bisa berlaku secara umum. Melalui asumsi-asumsi yang masih dapat dibenarkan, persamaan differensial parsial akan berlaku secara umum dalam koordinat kartesian.

Konduksi Panas

Proses perpindahan panas/energi melalui suatu media zat padat atau cair yang terjadi karena kontak langsung diantara partikel-pertikel yang mempunyai perbedaan temperatur disebut dengan konduksi panas. Menurut teori kinetik, temperatur suatu elemen zat adalah sebanding dengan energi kinetik rata-rata dari molekul-molekul yang membentuk elemen tersebut (Kreith, 2005). Perbedaan temperatur diantara dua daerah lokal dalam zat sebenarnya adalah manifestasi dari keadaan dimana energi kinetik rata-rata dari molekul-molekul daerah lokal yang satu lebih tinggi dari energi kinetik rata-rata molekul-molekul daerah lokal yang kedua.(Kreith, 2005).

Persamaan dasar perpindahan panas konduksi menyatakan bahwa : laju perpindahan panas konduksi satu dimensi dalam keadaan setimbang adalah :

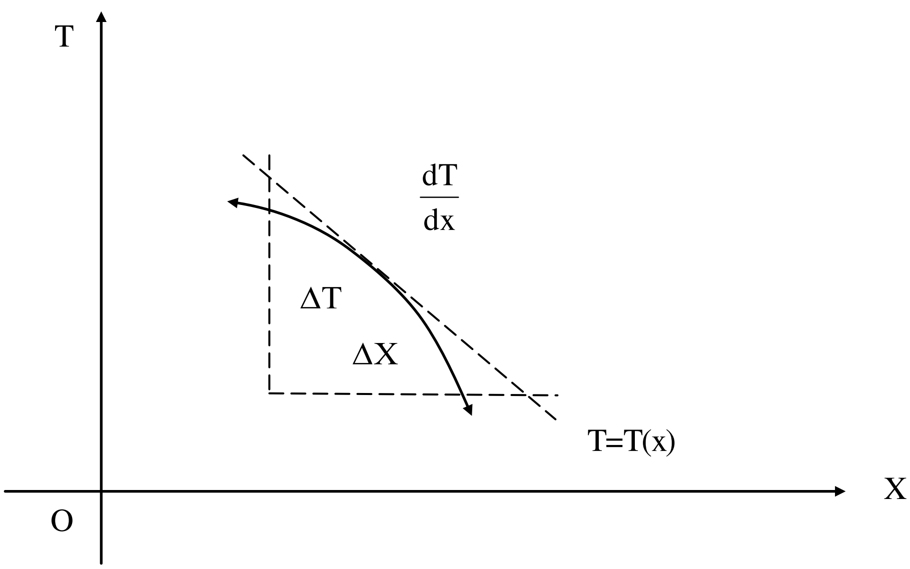
$$q_k = -kA\frac{dT}{dx} \qquad ....(1)$$

dimana, k : konduktivitas termal bahan

A : luas penampang bahan yang diukur tegak lurus terhadap arah lintasa panas.

$\frac{dT}{dx}$: gradien temperatur ke arah perpindahan panas

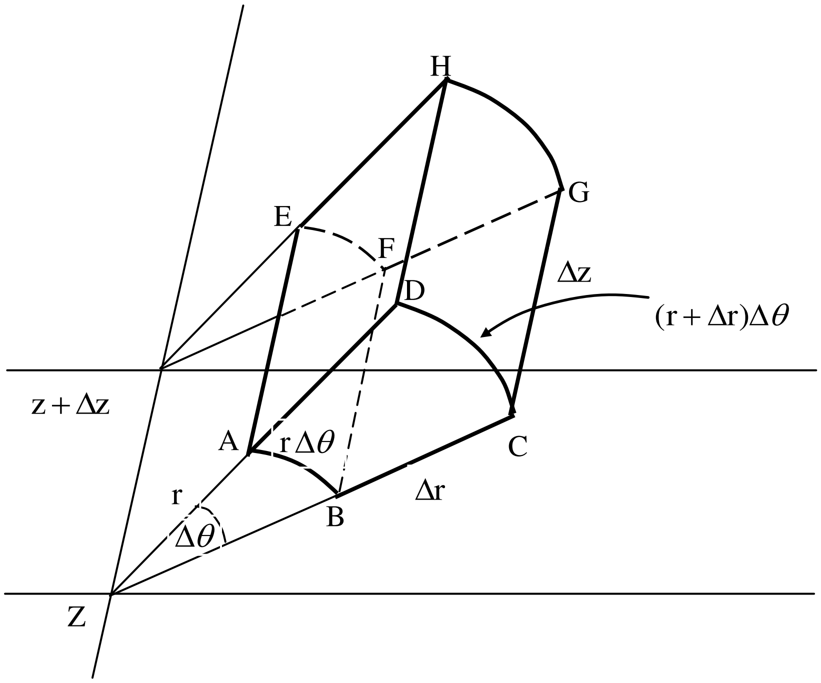
Tanda " – " (negatif) adalah untuk memenuhi hukum termodinamika pertama yang menyatakan bahwa panas merupakan energi dalam transit yang mengalir dari tempetarur tinggi ke tempat temperatur rendah (Holman, 2006). Jadi aliran panas adalah positif jika gradien temperatur negatif.



Gambar 1. Sketsa gradien temperatur dari laju perubahan temperatur T terhadap jarak dalam arah aliran panas pada sumbu x.

Penjabaran Persamaan Konduksi Panas

Tinjau suatu elemen kecil dalam suatu benda padat. Elemen ini berbentuk seperti kubus pada koordinat kartesian. Panjang sisi-sisi benda tersebut adalah : Δz, Δr dan $\Delta\theta$ (Gerald, 2005). Gambar benda tersebut seperti terlihat berikut ini.



Gambar 2. Sketsa yang melukiskan suatu elemen untuk penurunan persamaan konduksi panas secara umum pada koordinat kutub (silindris).

Elemen luas ABCD = $\frac{1}{2}(r + \Delta r)^2\, \Delta\theta - \frac{1}{2} r^2\, \Delta\theta$, sehingga harga limitnya $dL = r\, dr\, d\theta$

Elemen volume ABCD.EFGH, harga limitnya, $dV = r\, dr\, d\theta\, dz$.

Menurut Kreith (2005), untuk memperoleh persamaan distribusi temperatur, dituliskan persamaan keseimbangan energi bagi masing-masing elemen selama waktu singkat Δt sebagai berikut :

Aliran panas yang masuk selama Δt	+	Perubahan dari energi-dalam selama Δt	=
Aliran panas yang Keluar selama Δt	+	Panas yang dicetuskan oleh sumber panas-dalam selama Δt	

Jika persamaan keseimbangan diatas dituliskan secara aljabar akan menjadi :

$$(q_z + q_r + q_\theta)\ \Delta \mathbf{t} \ + \ (r\ \ \Delta z\ \ \Delta r\ \ \Delta\theta) =$$

$$(q_{z+\Delta z} + q_{r+\Delta r} + q_{\theta+\Delta\theta}) \ + \ c\ \rho\ \Delta T\ (r\ \ \Delta z\ \ \Delta r\ \ \Delta\theta) \qquad \text{..........(2)}$$

Panas konduksi persatuan waktu yang masuk kedalam elemen pada arah z, r dan θ sesuai dengan persamaan laju perpindahan panas konduksi (1), masing-masing harga limitnya adalah :

$$q_z = (-k\frac{\partial T}{\partial z})(r\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\theta) \qquad ....(3)$$

$$q_r = (-k\frac{\partial T}{\partial r})(r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{dz}) \qquad ....(4)$$

$$q_\theta = (-k\frac{\partial T}{\partial \theta})(\mathrm{dr}\,\mathrm{d}z) \qquad ....(5)$$

Menurut Gerald (2005), jika q_z dideretkan menurut deret Taylor disekitar $z = z_o$, maka akan diperoleh :

$$q_z = \mathrm{q_{z_o}} + (\mathrm{z - z_o})\,\mathrm{q'_{z_o}} + \frac{(\mathrm{z - z_o})^2}{2!} q''_{z_o} + \frac{(\mathrm{z - z_o})^3}{3!} q'''_{z_o} + ...$$

Untuk z – zo = dz, persamaan diatas dapat ditulis kembali menjadi :

$$\mathrm{q}_{\mathrm{z_o}+dz} = \mathrm{q_{z_o}} + \mathrm{dz}\,\mathrm{q'_{z_o}} + \frac{\mathrm{dz}^2}{2!} q''_{z_o} + \frac{\mathrm{z}^3}{3!} q'''_{z_o} + ...$$

Secara umum persamaan tersebut dapat ditulis menjadi :

$$\mathrm{q}_{\mathrm{z}+dz} = \mathrm{q_z} + \mathrm{dz}\,\mathrm{q'_z} + \frac{\mathrm{dz}^2}{2!} q''_z + \frac{\mathrm{z}^3}{3!} q'''_z + ...$$

atau $$\mathrm{q}_{\mathrm{z}+dz} = \mathrm{q_z} + \mathrm{dz}\,\mathrm{q'_z} + \mathrm{O}(\mathrm{dz}^2)$$

dimana derajat residu $O(dz^2)$ dapat diabaikan untuk dz yang sangat kecil, sehingga diperoleh persamaan pendekatan :

$$\mathrm{q}_{\mathrm{z}+dz} = \mathrm{q_z} + \mathrm{dz}\,\mathrm{q'_z}$$

atau $$\mathrm{q_z} - \mathrm{q}_{\mathrm{z}+dz} = -\,\mathrm{dz}\,\mathrm{q'_z}$$

$$= -\,\mathrm{dz}\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\mathrm{q'_z}$$

$$= -\,\mathrm{dz}\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\left[(-k\frac{\partial T}{\partial z})(r\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\theta)\right]$$

$$= k\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} r\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{dz} \qquad \text{..........(6)}$$

Dengan cara yang sama, akan diperoleh juga selisih laju perpindahan panas konduksi masing-masing pada arah r dan θ sebagai berikut :

$$\mathrm{q_r} - \mathrm{q}_{r+dr} = -\,\mathrm{dr}\,\mathrm{q_r'}$$

$$= -\,\mathrm{dr}\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}\mathrm{q_r'}$$

$$= -\,\mathrm{dr}\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}\left[(-k\frac{\partial T}{\partial r})(r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{dz})\right]$$

$$= k\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{dz}\,\mathrm{dr} + k\frac{\partial T}{\partial r}\mathrm{dr}\,\mathrm{dz}\,\mathrm{d}\theta \qquad \text{..........(7)}$$

dan

$$\mathrm{q}_\theta - \mathrm{q}_{\theta+d\theta} = -\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{q}_\theta'$$

$$= -\,\mathrm{d}\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\mathrm{q}_\theta'$$

$$= -\,\mathrm{d}\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\left[(-k\frac{\partial T}{r\,\partial \theta})(\mathrm{dr}\,\mathrm{dz})\right]$$

$$= k\frac{\partial^2 T}{r\,\partial \theta^2}\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{dz} \qquad \text{..........(8)}$$

Jika persamaan (6), (7) dan (8) disubstitusikan ke persamaan keseimbangan energi (2), maka diperoleh :

$$\left[r\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{r\,\partial \theta^2} + \mathrm{r}\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r}\right]k\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{dr}\,\mathrm{dz}\,\mathrm{dt} +$$

$$\dot{q}\,(\mathrm{r\,dr\,d}\theta\,\mathrm{dz\,dt}) = \mathrm{c}\rho\,\mathrm{dT}\,(\mathrm{r\,d}\theta\,\mathrm{dr\,dz})$$

$$\left[r\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{r\,\partial \theta^2} + \mathrm{r}\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r}\right]\frac{1}{\mathrm{r}} + \frac{\dot{\mathrm{q}}}{\mathrm{k}} = \frac{\mathrm{c}\rho}{\mathrm{k}}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}}$$

atau $$\left[\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{r^2\,\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial T}{\partial r}\right] + \frac{\dot{\mathrm{q}}}{\mathrm{k}} = \frac{\mathrm{c}\rho}{\mathrm{k}}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}} \qquad \text{..........(9)}$$

dimana : c = kapasitas panas yang dianggap tak tergantung pada temperatur.

ρ = massa jenis elemen yang dianggap tak tergantung pada temperatur.

Jika k dianggap homogen, maka persamaan umum konduksi panas yang didalamnya ada sumber panas q adalah :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\dot{\mathrm{q}}}{\mathrm{k}} = \frac{1}{\mathrm{a}}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}} \qquad \text{……….(10)}$$

dimana : $a = \dfrac{\mathrm{k}}{\mathrm{c}\,\rho}$ (difusivitas thermal)

Jika sistem dalam keadaan setimbang/stasioner (tidak tergantung oleh waktu), maka persamaan konduksi panas menjadi :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\dot{\mathrm{q}}}{\mathrm{k}} = 0 \qquad \text{..........(11)}$$

Jika sistem dalam keadaan setimbang/statisioner dan tanpa sumber panas q maka persamaan konduksi panas menjadi :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \qquad \text{..........(12)}$$

PENUTUP

Dari uraian/pembahasan persamaan umum konduksi panas secara analitis tersebut, dilakukan asumsi-asumsi yang masih dapat dibenarkan, sehingga hasil yang diperoleh juga diharapkan bisa berlaku secara umum.

Persamaan umum konduksi panas masih bisa dijabarkan ke dalam koordinat-koordinat kartesian atau bola (eliptik), asalkan kita dapat menterjemahkan gejala-gejala fisis ke dalam bentuk matematis.

DAFTAR PUSTAKA

Gerald, C.F. 2005. *Applied Numerical Analysis*. Addison-Wesley Publishing Company.

Holman, J.P. 2006. *Perpindahan Panas*. Penerbit Erlangga. Jakarta.

Kreith, F. 2005. *Principles Heat Transfer*. Harper & Row Publisher.