PENERAPAN PROGRAM LINEAR BERKENDALA FUZZY UNTUK OPTIMISASI PRODUKSI GERABAH

Eko Hari Parmadi
Program Studi Teknik Informatika, Fakultas Sains & Teknologi Univ. Sanata Dharma
Kampus III Paingan, Maguwoharjo, Depok, Sleman, Telp. 0274 883037
e-mail: hari@staff.usd.ac.id

Abstrak
Masalah program linear adalah masalah menentukan nilai maksimum atau nilai minimum dari sebuah fungsi linear yang disebut fungsi objektif dengan syarat-syarat atau kendala yang dinyatakan dalam bentuk persamaan atau pertidaksamaan linear. Namum dalam beberapa situasi dijumpai kendala yang tidak tegas atau fuzzy. Penyelesaian dengan Metode Simpleks maupun Metode Grafik hanya berlaku untuk kendala atau fungsi objektif yang tegas, demikian pula halnya dengan berbagai program aplikasi yang ada seperti QM for Windows TORA atau WinQSB. Masalah optimisasi gerabah adalah masalah menentukan keuntungan maksimum dari beberapa jenis gerabah yang diproduksi oleh suatu mesin. Masalah ini dapat dinyatakan dalam sebuah model program linear berkendala fuzzy. Kendala fuzzy yang dimaksud adalah kebutuhan tanah liat dan pasir serta ketersediaannya untuk setiap model gerabah. Dengan asumsi bahwa hubungan antara variabel tanah liat dan pasir adalah linear maka penerapan bilangan fuzzy segitiga dalam masalah program linear berkendala fuzzy akan diubah menjadi model masalah program linear tegas untuk kemudian hasilnya dapat disimulasikan menggunakan QM for Windows atau WinQSB.
Kata kunci*: program linear berkendala fuzzy, bilangan fuzzy segitiga, program linear*

1. PENDAHULUAN

Salah satu masalah yang dihadapi oleh para pengrajin gerabah adalah menentukan jumlah produksi yang optimum sehingga diperoleh keuntungan yang maksimum. Hal ini dapat dimaklumi mengingat para pengrajin mempunyai modal yang tidak terlalu besar. Selama ini, bahan baku pembuatan gerabah berupa tanah liat dan pasir didapat dengan cara membeli dalam bentuk gumpalan dimana setiap unitnya sekitar 1 kilogram. Hal serupa juga berlaku untuk bahan baku pasir. Suatu mesin pembuat gerabah dapat menghasilkan dua sampai tiga model gerabah, dimana setiap model mempunyai komposisi tanah liat dan pasir yang berbeda.

Program Linear adalah suatu teknik dalam riset operasi untuk memecahkan masalah optimisasi (memaksimumkan atau meminimumkan) dengan menggunakan persamaan pertidaksamaan linear dalam mencari pemecahan yang optimum dengan memperhatikan batasan-batasan yang ada [1]. Agar persoalan dapat dipecahkan menggunakan program linear maka persoalan harus dapat dirumuskan secara matematis, fungsi objektif harus dibuat optimum, fungsi objektif dan kendala atau batasan harus linear, semua batasan harus dinyatakan dalam persamaan atau pertidaksamaan linear dan semua variabelnya harus tidak negatif.

Salah satu terapan program linear adalah di bidang optimisasi produksi. Kalau seorang produsen mempunyai m buah bahan mentah dan ingin memproduksi n jenis produk dimana setiap jenis produk menggunakan semua jenis bahan mentah dengan komposisi tertentu. Dari berbagai jenis produk yang diproduksi tersebut akan dijual untuk mendapatkan keuntungan atau laba. Persoalan yang timbul adalah berapa besar masing-masing jenis produk harus diproduksi sehingga hasil penjualan maksimum[1]. Masalah lain yang muncul adalah, koefisien kendala yang tidak tegas atau fuzzy membuat masalah program linear yang ada tidak dapat diselesaikan dengan mudah mengingat belum tersedia algoritma untuk penyelesaian masalah program linear dengan kendala fuzzy. Metode simpleks maupun Metode grafik hanya mampu mengatasi masalah program linear tegas. Melalui penerapan bilangan fuzzy segitiga, masalah program linear berkendala fuzzy diubah menjadi masalah program linear tegas untuk kemudian diselesaikan dengan metode yang sudah tersedia yaitu metode simpleks atau grafik.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Optimisasi Masalah Produksi Menggunakan Program Linear

Salah satu terapan program linear adalah di bidang optimisasi produksi. Kalau seorang produsen mempunyai m buah bahan mentah dan ingin memproduksi n jenis produk dimana setiap jenis produk menggunakan semua jenis bahan mentah dengan komposisi tertentu. Dari berbagai jenis produk yang diproduksi tersebut akan dijual untuk mendapatkan keuntungan atau laba. Persoalan yang timbul adalah berapa besar masing-masing jenis produk harus diproduksi sehingga hasil penjualan maksimum[1].

Apabila: x_j = banyaknya produk j, $j=1,2,3,...,n$
b_i = bahan mentah jenis i yang tersedia, $i=1,2,3,....,m$
a_{ij} = bahan mentah i yang digunakan untuk memproduksi satu unit produk j
cj = harga jual satu produk j
$c_j x_j$ = penerimaan hasil penjualan produk j

Masalah tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk persoalan program linear sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &mencari\ x_j \\ &\max \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &kendala: \quad \sum a_{ij} x_j \le b_i \\ &\qquad\qquad x_j \ge 0 \\ &i = 1,2,3,4,....,m \\ &j = 1,2,3,4,....,n \end{aligned} \qquad ....(1)$$

Himpunan Fuzzy

Tidak semua hal yang dijumpai dalam kehidupan sehari-hari dapat didefinisikan secara tegas. Hal ini disebabkan oleh batasan yang kabur atau tidak dapat ditentukan secara tegas. Banyak kata-kata, kriteria atau istilah dalam kehidupan sehari-hari yang mengandung ketidaktegasan, seperti: tinggi, mahal, kaya, cantik, menarik, hemat dan sebagainya. Untuk mengatasi permasalahan himpunan dengan batas yang tidak tegas ini, Zadeh mengaitkan himpunan semacam itu dengan suatu fungsi yang menyatakan derajat kesesuaian unsur-unsur dalam semestanya dengan syarat konsep yang merupakan syarat himpunan tersebut. Fungsi ini disebut fungsi keanggotaan dan nilai fungsi itu disebut derajat keanggotaan suatu unsur dalam himpunan itu, yang selanjutnya disebut himpunan fuzzy[2]. Derajat keanggotaan dinyatakan dengan suatu bilangan real dalam selang tertutup [0,1]. Dengan kata lain, fungsi keanggotaan dari suatu himpunan kabur $\tilde{A}$ dalam semesta X adalah pemetaan $\mu_{\tilde{A}}$ dari X ke selang [0,1]. Misalkan diberikan himpunan semesta X, maka suatu himpunan kabur (fuzzy) $\widetilde{A}$ didefinisikan sebagai:

$$\begin{aligned} &\widetilde{A} = \{(x, \mu_{\widetilde{A}}(x)) \mid x \in X\} \\ &\mu_{\widetilde{A}}(x) \quad : X \to [0,1] \end{aligned} \qquad ....(2)$$

$\mu_{\widetilde{A}}$ disebut fungsi keanggotaan dari suatu himpunan kabur $\widetilde{A}$ dan nilai fungsi $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ menyatakan derajat keanggotaan unsur $x \in X$ dalam himpunan kabur $\widetilde{A}$ [3].

Cara lain menyatakan suatu himpunan kabur adalah menggunakan potongan-α, yang merupakan himpunan bagian tegas dalam himpunan semesta dengan α adalah suatu bilangan dalam selang tertutup [0,1]. Untuk suatu bilangan $\alpha \in [0,1]$, ***potongan-α*** dari suatu himpunan kabur $\widetilde{A}$, yang dilambangkan dengan A_α, adalah himpunan tegas yang memuat semua elemen dari semesta dengan derajat keanggotaan dalam $\widetilde{A}$ yang lebih besar atau sama dengan α, yaitu:

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\widetilde{A}}(x) \ge \alpha\}. \qquad ....(3)$$

Sedangkan ***potongan-α kuat*** dari himpunan kabur $\widetilde{A}$ adalah himpunan tegas

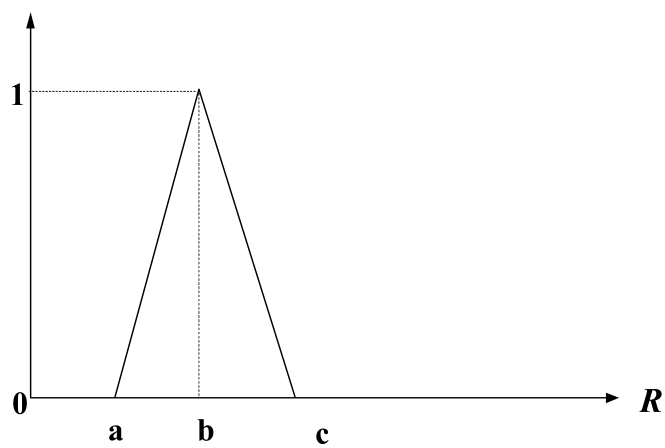
 ISSN: 1979-2328

$$A'_{\alpha} = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}. \qquad \text{.. (4)}$$

Bilangan Fuzzy

Konsep bilangan fuzzy/kabur muncul dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam aplikasi teori kabur dalam bentuk besaran yang dinyatakan dengan bilangan yang tidak tepat, seperti misalnya "kira-kira 5 kilogram", "sekitar 5 unit " dan sebagainya. Secara intuitif dapat diterima bahwa ungkapan "kurang lebih 5", "kira-kira 5 kilogram" atau "sekitar 5 unit" dapat dinyatakan dalam suatu himpunan kabur pada semesta bilangan real, dimana bilangan 5 mempunyai derajat keanggotaan sama dengan 1(satu), bilangan-bilangan di sekitar 5 mempunyai derajat keanggotaan kurang dari 1 dan semakin jauh bilangan itu dari 5, derajat keanggotaannya semakin mendekati 0 (nol) [4]. Bilangan fuzzy yang banyak dipakai dalam aplikasi adalah bilangan kabur segitiga dengan fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$\tilde{p} = (a,b,c) = Segitiga(x;a,b,c) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a} & \text{untuk } a \le x \le b \\ \dfrac{c-x}{c-b} & \text{untuk } b \le x \le c \\ 0 & \text{untuk lainnya} \end{cases} \qquad \text{.................................... (5)}$$



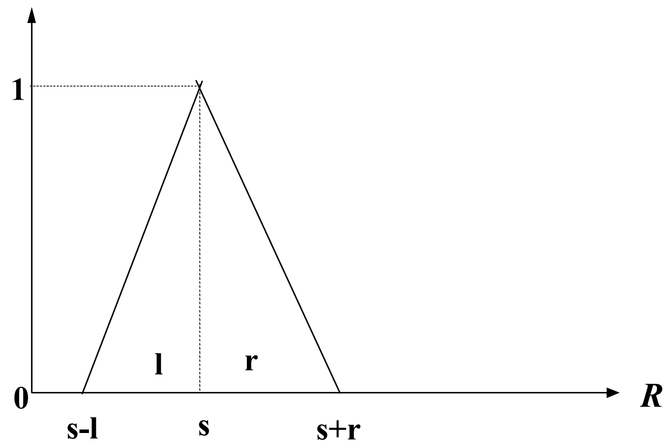
Gambar 1. Bilangan Fuzzy *Segitiga*(*x*; a, b, c)

Bila $\tilde{p} = (a,b,c)$ dan $\tilde{q} = (f,g,h)$ adalah bilangan-bilangan fuzzy segitiga, maka $\tilde{p} + \tilde{q}$ adalah bilangan fuzzy segitiga dengan fungsi keanggotaan:

$$\tilde{p} + \tilde{q} = Segitiga(x; a+f, b+g, c+h) = \begin{cases} \dfrac{x-(a+f)}{(b+g)-(a+f)} & \text{untuk } a+f \le x \le b+g \\ \dfrac{(c+h)-x}{(c+h)-(b+g)} & \text{untuk } b+g \le x \le c+h \\ 0 & \text{untuk lainnya} \end{cases} \qquad \text{……………(6)}$$

Dengan kata lain: $\tilde{p} + \tilde{q} = (a+f, b+g, c+h)$ ....(7)

Bilangan fuzzy segitiga juga dapat disajikan menggunakan notasi $s = < s\ , l\ , r >$, dimana:



Gambar 2. Bilangan Fuzzy Segitiga $s = < s\ ,\ l\ \ ,r >$

Secara umum, empat aturan dasar dalam operasi aritmetika yaitu $\{+,-,x,/\}$ juga digunakan dalam operasi antar dua buah bilangan fuzzy. Misalkan diberikan bilangan fuzzy *A* dan *B*, dan * adalah operasi aritmetika yang dikenakan pada *A* dan *B*, maka bilangan fuzzy *A**B* didefinisikan sebagai [5]:

$$(A*B)(z) = \sup_{z=x*y} \min\{A(x), B(y)\} \qquad \text{...(8)}$$

dimana $* \in \{+,-,x,/\}$

Program Linear Berkendala Fuzzy

Menurut Klir & Yuan (1995), masalah program linear berkendala fuzzy dapat dinyatakan dengan rumusan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &\max \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &kendala: \quad \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \leq B_i \\ &\qquad\qquad x_j \geq 0 \qquad \text{...(9)} \\ &i = 1,2,3,4,....,m \\ &j = 1,2,3,4,....,n \end{aligned}$$

Dimana x_j adalah variabel ke-j, c_j adalah koefisien-koefisien fungsi objektif , A_{ij} adalah koefisien-koefisien kendala dan B_{ij} adalah koefisien nilai ruas kanan.[5].

Masalah program linear fuzzy dapat diubah menjadi masalah program linear tegas yang ekuivalen dengan maslah semula. Hasil akhir dari masalah program linear fuzzy adalah suatu nilai optimum (maksimum atau minimum) bernilai real yang menggambarkan hasil optimum dari kompromi berbagai kendala atau batasan yang ada [6].

3. METODE PENELITIAN

Secara garis besar, metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah pengumpulan data penelitian, perancangan model, implementasi model dan simulasi model.

Pengumpulan data penelitian

Pengumpulan data penelitian dilakukan dengan cara pencarian informasi, wawancara dengan para pengrajin gerabah di daerah Kasongan Daerah Istimewa Yogyakarta serta dengan melakukan studi literatur. Data yang dikumpulkan adalah data model gerabah berikut kebutuhan tanah liat dan pasir untuk setiap modelnya serta total bahan baku tanah liat dan pasir yang mereka miliki. Sedangkan studi literatur dimaksudkan sebagai landxasan teori untuk mendukung perancangan model yang akan dibuat. Berikut nama gerabah serta kebutuhan tanah liat dan pasir yang diperlikan untuk membuat produk tersebut tiap unitnya.

Tabel 1. Jenis Gerabah berikut kebutuhan tanah liat, pasir dan keuntungan per unit

Nama Gerabah	Kebutuhan tanah liat	Kebutuhan pasir	Keuntungan per unit (dalam $)
Vas bunga besar	Sekitar 4	Sekitar 4	5
Vas bunga sedang	Sekitar 4	Sekitar 3	4
Vas bunga kecil	Sekitar 5	Sekitar 1	4
Guci besar	Sekitar 9	Sekitar 7	7
Guci sedang	Sekitar 7	Sekitar 6	7
Guci kecil	Sekitar 4	Sekitar 4	6

Perancangan Model

Data yang telah dikumpulkan selanjutnya dianalisis dan ditentukan variabel, fungsi objektif serta batasan-batasannya kemudian disusun menjadi sebuah model program linear berkendala fuzzy. Pada tahap ini juga disusun pula bilangan fuzzy segitiga kemudian diterapkan pada kendala-kendala yang ada. Berikut ini rumusan Program Linear Berkendala Fuzzy:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ kendala: \quad & \sum_{j=1}^{n} < s_{ij}, l_{ij}, r_j > x_j \le < t_i, u_i, v_i > \\ & x_j \ge 0 \\ & i = 1,2,3,4,....,m \\ & j = 1,2,3,4,....,n \end{aligned} \qquad ......(11)$$

Hasil dari model yang telah disusun selanjutnya diubah menjadi model program linear tegas dan diselesaikan menggunakan program aplikasi yang tersedia seperti Win QSB atau QM for Windows.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ kendala: \quad & \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \; x_j \le t_i \\ & \sum_{j=1}^{n} (s_{ij} - l_{ij}) \, x_j \le t_i - u_i \\ & \sum_{j=1}^{n} (s_{ij} + r_{ij}) \, x_j \le t_i + v_i \\ & x_j \ge 0 \\ & i = 1,2,3,4,....,m \\ & j = 1,2,3,4,....,n \end{aligned} \qquad ......(12)$$

Masukkan dari program aplikasi berupa banyaknya variabel, banyaknya kendala, koefisien fungsi objektif serta koefisien dari tiap-tiap kendala dari masalah program linear tegas. Hasil akhirnya berupa nilai optimum dari program berupa nilai maksimum atau minimum program serta nilai dari variabel yang menyebabkan nilai maksimum atau minimum tersebut.

Implementasi Model

Model yang telah dibuat diimplementasikan menggunakan QM for Windows. Caranya adalah dengan memasukkan data variabel, kendala, koefisien fungsi objektif dari model yang telah disusun. Sebagai contoh: seorang pengrajin gerabah mempunyai 2 buah bahan mentah yaitu tanah liat dan pasir untuk memproduksi 2 jenis gerabah yaitu vas bunga besar dan vas bunga kecil. Untuk memproduksi vas bunga besar diperlukan sekitar 4 unit tanah liat dan sekitar 5 unit pasir. Sedangkan untuk memproduksi vas bunga kecil diperlukan sekitar 4 unit tanah liat dan sekitar 1 unti pasir. Tanah liat yang tersedia kira-kira 24 unit dan pasir yang tersedia kira-kira 12 unit. Keuntungan dari penjualan satu unit vas bunga kecil dan besar masing-masing adalah 5$ dan 4$. Berapa besar vas bunga besar dan kecil harus diproduksi sehingga hasil penjualan maksimum?

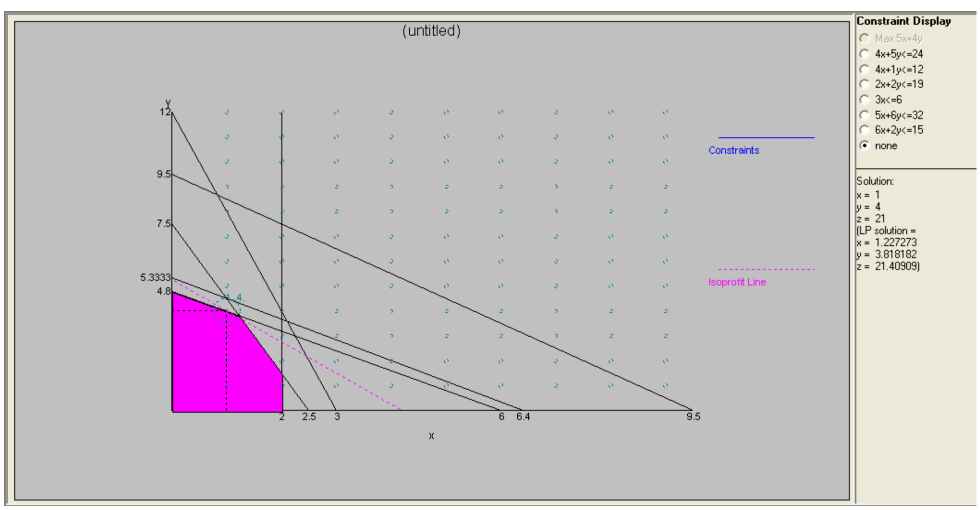
Misalkan: x adalah banyaknya vas bunga besar yang diproduksi
y adalah banyaknya vas bunga kecil yang diproduksi

maka rumusan program linear berkendala fuzzy-nya adalah sebagai berikut:

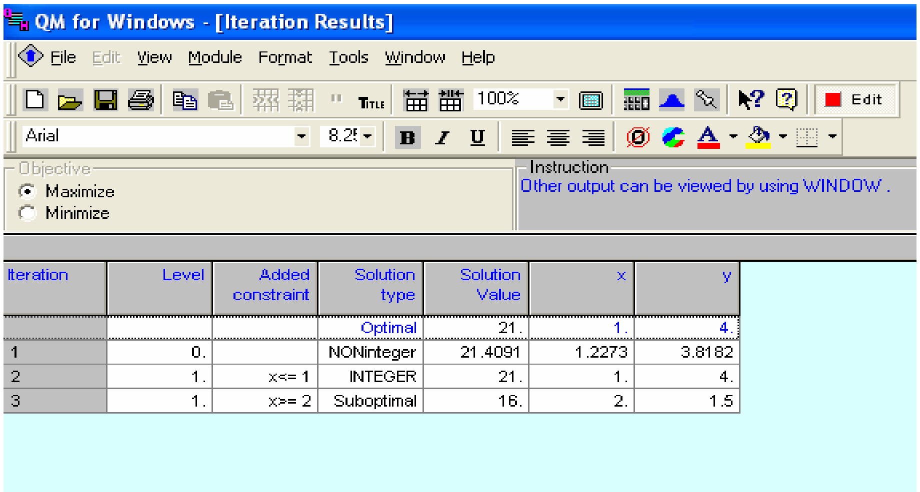
$$\begin{aligned}
&\max \quad z = 5x + 4y \\
&kendala: \quad <4,2,1> x + <5,3,1> y \;\le\; <24,5,8> \\
&\qquad\qquad <4,1,2> x + <1,1,1> y \;\le\; <12,6,3> \\
&\qquad\qquad x, y \;\ge 0
\end{aligned} \qquad \text{...(13)}$$

Rumusan masalah program linear tegas-nya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
&\max \quad z = 5x + 4y \\
&kendala \quad 4x + 5y \le 24 \\
&\qquad\qquad 4x + y \le 12 \\
&\qquad\qquad 2x + 2y \le 19 \\
&\qquad\qquad 3x \le 6 \\
&\qquad\qquad 5x + 6y \le 32 \\
&\qquad\qquad 6x + 2y \le 15 \\
&\qquad\qquad x, y \ge 0
\end{aligned}$$

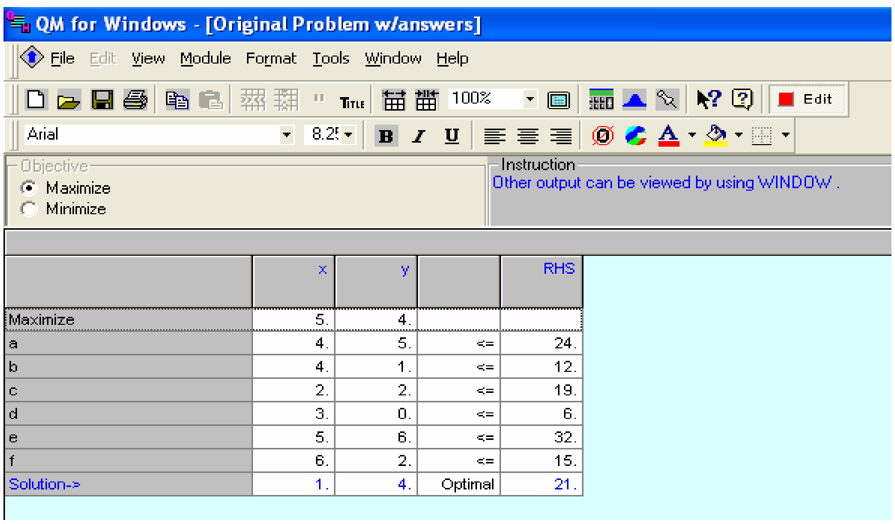


Gambar 3. Tampilan Grafik dan Hasil Program



Iteration	Level	Added constraint	Solution type	Solution Value	x	y
			Optimal	21.	1.	4.
1	0.		NONinteger	21.4091	1.2273	3.8182
2	1.	x<= 1	INTEGER	21.	1.	4.
3	1.	x>= 2	Suboptimal	16.	2.	1.5

Gambar 4. Hasil Optimum Program



	x	y		RHS
Maximize	5.	4.		
a	4.	5.	<=	24.
b	4.	1.	<=	12.
c	2.	2.	<=	19.
d	3.	0.	<=	6.
e	5.	6.	<=	32.
f	6.	2.	<=	15.
Solution->	1.	4.	Optimal	21.

Gambar 5. Rumusan Masalah dan Hasil Program

Berdasarkan hasil program tersebut dapat disimpulkan bahwa banyaknya vas bungan besar yang harus diproduksi adalah 1 dan banyaknya vas bunga kecil yang diproduksi adalah 4. Keuntungan maksimum yang didapat adalah 21$.

Simulasi Model

Pada tahap ini sistem diberi masukan berupa nilai-nilai tiap kendala hasil pengubahan atau pemilihan bilangan fuzzy segitiga. Berdasarkan hasil simulasi diperoleh kesimpulan bahwa, nilai optimum program sangat tergantung pada bilangan fuzzy yang dipilih atau digunakan.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan hasil dan analisis pada saat simulasi model dapat diperoleh hasil bahwa perubahan bilangan fuzzy pada kendala akan mempengaruhi hasil optimum program. Banyaknya jenis gerabah yang harus diproduksi selalu merupakan bilangan yang bulat.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Program Linear berkendala fuzzy dapat diterapkan untuk optimisasi produksi gerabah.
2. Hasil akhir program sangat bergantung pada bilangan fuzzy segitiga yang digunakan.
3. Bannyaknya jenis gerabah yang harus diproduksi merupakan bilangan bulat

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Supranto Johannes, 2006, *Riset Operasi untuk Pengambilan Keputusan Edisi Revisi,* UI-Press, Jakarta
[2] Susilo, Frans.,2003, *Pengantar Himpunan dan Logika Kabur serta Aplikasinya*. Penerbit Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.
[3] Wang, Li Xin, 1997, *A Course in Fuzzy System and Control,* Prentice Hall, New Jersey.
[4] Susilo, Frans, 2006, *Himpunan & Logika Kabur Serta Aplikasinya*, Graha Ilmu, Yogyakarta
[5] Klir George J, Yuan Bo, 1995, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic Theory and Applications*, Prentice Hall International, Inc.
[6] Yongjean, 1993, *A Use of Fuzzy Set in Linear Programming Problems*, http://woosuk.woosuk .ac.kr/~yongjean/pe1993-1.html