SOLUSI PENCAPAIAN BIAYA MINIMUM BAGI PASANGAN LIMA PEKERJAAN DAN LIMA MESIN MENGGUNAKAN METODE HUNGARIAN

Lie Liana, Yeye Susilowati, Suhana
Program Studi Manajemen, Fakultas Ekonomika dan Bisnis, Universitas Stikubank Semarang
Jl. Kendeng V Bendan Ngisor Semarang
E-mail: lieliana08@gmail.com, yeye_susilowati@yahoo.co.id, suhana.aziza@gmail.com

ABSTRACT

In daily life a human often does a work with a machine. Commonly a work can be accomplished by many machines. Conversely one machine can finish many works. Tasking model is a special form of linear programming used to seek the most efficient task to determine whether a work can be accomplished by which machine. The main goal of tasking model is to find work and machine pairs in such a way that it can minimize total cost. Main characteristic of tasking model is a machine is focused for a work and conversely a work is only finished with one machine. The term for such condition is one to one correspondence or one to one basis so the number of employees must be the same with number of machine. The problem is how to pair five works with five machines in such a way to minimize cost. Though linear programming can be used to gain optimum solution of work and machine, a more efficient algorith has been developed to accomplish the problem. The method is called Hungarian method. By using Method of Hungarian, it is derived work and machine pairs in such a way so that minimum cost can be gained amounted 1.700.000.000,-.

Keywords: model of tasking, one to one basis, method of Hungarian

Abstrak

Pada kehidupan sehari-hari seringkali manusia mengerjakan suatu pekerjaan dengan menggunakan mesin. Pada umumnya satu pekerjaan bisa dikerjakan dengan beberapa mesin dan sebaliknya satu mesin bisa untuk mengerjakan beberapa pekerjaan. Model penugasan merupakan suatu bentuk khusus dari linear programming yang digunakan untuk mencari penugasan yang paling efisien untuk menentukan suatu pekerjaan sebaiknya dikerjakan dengan mesin yang mana. Tujuan utama dari model penugasan adalah mencari pasangan pekerjaan dan mesin sedemikian sehingga meminimalkan biaya total. Karakteristik utama dari model penugasan adalah satu mesin ditujukan untuk satu pekerjaan dan sebaliknya satu pekerjaan hanya dikerjakan dengan satu mesin. Istilah untuk kondisi seperti ini adalah korespondensi satu-satu atau one to one basis sehingga jumlah pekerjaan harus sama dengan jumlah mesin. Permasalahan yang ada adalah bagaimana memasangkan lima pekerjaan dengan lima mesin sedemikian sehingga didapatkan biaya minimum. Walaupun linear programming dapat digunakan untuk mendapatkan solusi optimal dari masalah pekerjaan dan mesin ini, suatu algoritma yang lebih efisien telah dikembangkan untuk permasalahan penugasan ini yang dinamakan metode Hungarian. Dengan menggunakan Metode Hungarian akhirnya diperoleh pasangan pekerjaan dan mesin sedemikian rupa sehingga didapatkan biaya minimum sebesar Rp. 1.700.000.000,-.

Kata kunci: model penugasan, one to one basis, metode Hungarian

PENDAHULUAN

Manusia pada kehidupan sehari-hari mempunyai pekerjaan yang harus diselesaikan untuk memenuhi kebutuhannya. Pada era teknologi seperti sekarang ini tidak semua pekerjaan mampu dikerjakan secara manual atau handmade. Pada umumnya manusia memerlukan alat bantu untuk menyelesaikan pekerjaannya. Salah satu alat bantu yang biasa digunakan adalah mesin. Seringkali satu pekerjaan bisa diselesaikan dengan menggunakan beberapa mesin dan sebaliknya satu mesin bisa untuk menyelesaikan beberapa pekerjaan. Permasalahan yang kemudian muncul adalah bagaimana mengatur penyelesaian pekerjaan dengan menggunakan mesin yang ada sedemikian sehingga biaya total menjadi minimum.

Model penugasan merupakan suatu bentuk khusus dari *linear programming* yang dapat digunakan salah satunya untuk mencari penugasan yang paling efisien untuk pekerjaan ke mesin. Tujuan utama dari model penugasan adalah meminimalkan biaya total dari pekerjaan tertentu yang dikerjakan mesin tertentu. Karakteristik utama dari model penugasan adalah satu pekerjaan ditujukan untuk satu mesin atau dalam teori himpunan dikenal dengan korespondensi

satu-satu atau *one to one basis*. Tetapi walaupun *linear programming* dapat digunakan untuk mendapatkan solusi optimal dari suatu masalah penugasan, suatu algoritma yang lebih efisien telah dikembangkan untuk permasalahan penugasan ini yang dinamakan metode Hungarian. Metode Hungarian ini biasanya efektif digunakan untuk kasus yang relatif kompleks seperti kasus empat atau lebih pekerjaan yang diselesaikan dengan empat atau lebih mesin. Kasus untuk tiga pekerjaan yang diselesaikan dengan daftar kombinasi antara pekerjaan dan mesin.

Metode Hungarian menggunakan tabel untuk menyelesaikan setiap permasalahan penugasan pekerjaan dengan mesin yang digunakan. Padaumumnya, baris berisi pekerjaan yang akan diselesaikan dan kolom berisi mesin yang digunakan untuk menyelesaikan pekerjaan. Angka-angka yang berada dalam tabel adalah biaya yang dibutuhkan oleh mesin untuk menyelesaikan pekerjaan.

PERMASALAHAN

Sebuah perusahaan pembuatan barang dari bahan logam mempunyai lima jenis mesin yang diberi nama M1, M2, M3, M4 dan M5. Setiap mesin memiliki kapasitas yang berbeda dalam pengoperasiannya. Pada bulan yang akan datang, perusahaan mendapatkan pesanan untuk menyelesaikan lima jenis pekerjaan yaitu P1, P2, P3, P4 dan P5. Biaya pengoperasian setiap pekerjaan oleh kelima mesin dapat dilihat pada tabel di bawah:

Permasalahan yang muncul adalah bagaimana menugaskan kelima mesin untuk menyelesaikan kelima jenis pekerjaan agar total biaya pekerjaan minimum ?

		MESIN							
PEKERJAAN	M1	M2	M3	M4	M5				
P1	200	300	350	500	600				
P2	500	600	200	800	700				
P3	300	400	175	550	650				
P4	250	250	100	650	400				
P5	600	400	150	750	500				

Catatan: nilai-nilai dalam tabel tersebut dalam jutaan rupiah.

KAJIAN TEORI

Metode penugasan (*assignment method*) adalah metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah penugasan. Metode penugasan ini sering disebut juga metode Hungarian (*Hungarian methode*) (Yamit, 2003). Metode Hungarian ini sebenarnya lebih tepat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan penugasan yang relatif kompleks dimana jumlah pekerjaan dan mesin cukup banyak. Solusi optimal dengan menghitung satu persatu atau membuat daftar kombinasi dapat dilakukan untuk jumlah pekerjaan dan mesin yang sedikit, tetapi akan menjadi tidak efisien kalau kita menghadapi permasalahan dengan jumlah yang banyak. Secara matematik dapat dihitung terlebih dahulu jumlah daftar kombinasinya dengan menggunakan teori probabilitas. Untuk permasalahan dengan tiga pekerjaan dan tiga mesin diperlukan 6 kombinasi ($3!=3 \times 2 \times 1=6$), sedangkan untuk empat pekerjaan dan empat mesin diperlukan 24 perhitungan ($4!=4 \times 3 \times 2 \times 1=24$). Bila permasalahan mencakup lima pekerjaan dan lima mesin maka diperlukan 120 perhitungan ($5!=5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1=120$). Berdasarkan perhitungan ini nampaknya mulai permasalahan dengan lima pekerjaan dan lima mesin akan lebih efektif bila diselesaikan dengan menggunakan metode Hungarian.

Model Penugasan:

- Suatu metode kuantitatif untuk mengalokasikan sumberdaya kepada tugas atau pekerjaan atas dasar satu-satu(one-to-one basis).
- Setiap sumberdaya (assignee) ditugasi secara khusus kepada suatu tugas atau kegiatan, misalnya mesin ke pekerjaan.

Tujuan:

• Mengalokasikan pembagian pekerjaan-mesin sedemikian rupa sehingga dapat diperoleh biaya total minimum

Prototype Metode Penugasan:

- Suatu perusahaan memiliki n pekerjaan yang harus diselesaikan oleh n mesin pada waktu yang relatif bersamaan
- Beberapa mesin memiliki kemampuan yang lebih baik dari mesin lain untuk pekerjaan-pekerjaan tertentu. Hal ini ditunjukkan dengan biaya yang lebih besar bila pekerjaan dilakukan dengan mesin tersebut.

 Karena setiap mesin hanya akan mendapat satu pekerjaan, maka tidak semua pekerjaan dapat dikerjakan oleh mesin terbaik dan sebaliknya karena setiap pekerjaan hanya diselesaikan oleh satu mesin maka tidak semua mesin dapat mengerjakan pekerjaan yang terbaik juga.

Pernyataan Secara Matematis:

Penugasan jmesin (j = 1,2,3,...,n) kepada ipekerjaan (i = 1,2,3,...,n) dengan biaya Cij.

0, jika pekerjaan ke i tidak dibebankan ke mesinj

X_{ij} =

1, jika pekerjaan ke i dibebankan ke mesinj

FUNGI TUJUAN: Xo =
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

KENDALA :
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$
 , $i = 1,2,3,...,n$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ji} = 1 , j = 1,2,3,...,n$$

METODE PENYELESAIAN

Langkah 1:

Menyusun tabel biaya. Dalam tabel biaya ini disajikan biaya untuk setiap kemungkinan penugasan.

Langkah 2:

Melakukan pengurangan kolom / baris. Mengurangi biaya pada setiap kolom / baris dengan biaya terkecil pada setiap kolom / baris tersebut.

Langkah 3:

Melakukan pengurangan baris / kolom. Dengan menggunakan hasil pada tabel pada langkah 2, kurangkan biaya pada setiap baris / kolom dengan biaya terkecil dalam setiap baris / kolom tersebut.

Langkah 4:

Berdasarkan hasil tabel pada langkah 3, dibuat garis minimum yaitu jumlah garis yang paling sedikit yang bisa melewati semua angka nol pada setiap kolom maupun setiap baris. Jika jumlah garis minimum tidak sama dengan jumlah kolom maupun jumlah baris, maka penugasan optimum belum dapat ditentukan. Dalam keadaan seperti ini beralih ke langkah 5.

Langkah 5:

Merevisi tabel. Berdasarkan hasil pada langkah 4, dilakukan revisi tabel dengan cara sebagai berikut:

- a. Tentukan angka terkecil dari angka yang tidak dilewati oleh garis minimum.
- b. Kurangkan angka yang tidak dilewati garis minimum dengan angka terkecil tersebut.
- c. Tambahkan angka yang terdapat pada persilangan garis minimum dengan angka terkecil.
- d. Kembali ke langkah 4.

Langkah 6:

Menentukan penugasan optimum dilakukan dengan meletakkan angka 1 (satu) di setiap angka 0 (nol) pada tabel akhir sedemikian sehingga pada setiap baris maupun kolom hanya terdapat satu angka 1.

Apabila terdapat lebih dari satu cara penugasan optimum disebut multi optimum.

ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Sebuah perusahaan pembuatan barang dari bahan logam mempunyai lima jenis mesin yang diberi nama M1, M2, M3, M4 dan M5. Setiap mesin memiliki kapasitas yang berbeda dalam pengoperasiannya. Pada bulan yang akan datang, perusahaan mendapatkan pesanan untuk menyelesaikan lima jenis pekerjaan yaitu P1, P2, P3, P4 dan P5. Biaya pengoperasian setiap pekerjaan oleh kelima mesin dapat dilihat pada tabel di bawah:

	MESIN						
PEKERJAAN	M1	M2	M3	M4	M5		
P1	200	300	350	500	600		
P2	500	600	200	800	700		
P3	300	400	175	550	650		
P4	250	250	100	650	400		
P5	600	400	150	750	500		

Catatan: nilai-nilai biaya dalam tabel tersebut dalam jutaan rupiah.

Untuk menjawab pertanyaan bagaimana menugaskan kelima mesin untuk menyelesaikan kelima jenis pekerjaan agar total biaya pekerjaan minimum di atas akan digunakan metode penugasan (assignment method) yang juga dikenal dengan istilah metode Hungarian. Jika dibandingkan dengan pendekatan transportasi, maka metode penugasan lebih mudah dan lebih cepat penyelesaiannya.

Langkah-Langkah Penyelesaian:

Langkah 1: Buatlah tabel biaya!

Tabel 1.

······································							
	MESIN						
PEKERJAAN	M1	M2	M3	M4	M5		
P1	200	300	350	500	600		
P2	500	600	200	800	700		
P3	300	400	175	550	650		
P4	250	250	100	650	400		
P5	600	400	150	750	500		

Langkah 2: Lakukan pengurangan kolom!

Untuk setiap kolom dilakukan pengurangan kolom sebagai berikut:

a. Tentukan biaya terkecil setiap kolom

Tabel 1a.

		MESIN						
PEKERJAAN	M1	M2	M3	M4	M5			
P1	200	300	350	500	600			
P2	500	600	200	800	700			
P3	300	400	175	550	650			
P4	250	250	100	650	400			
P5	600	400	150	750	500			

Kolom M1=200 M2=250M3=100 M4=500 M5=400

b. Kurangkan semua biaya dengan biaya terkecil setiap kolom

Kolom 1: Kolom 2: Kolom 3:

Kolom 4: Kolom 5:

```
P1M4 = 500 - 500 = 0 P1M5 = 600 - 400 = 200

P2M4 = 800 - 500 = 300 P2M5 = 700 - 400 = 300

P3M4 = 550 - 500 = 50 P3M5 = 650 - 400 = 250

P4M4 = 650 - 500 = 150 P4M5 = 400 - 400 = 0

P5M4 = 750 - 500 = 250 P5M5 = 500 - 400 = 100
```

Sehingga akhirnya didapatkan Tabel 2:

Tabel 2.

	MESIN						
PEKERJAAN	M1	M2	M3	M4	M5		
P1	0	50	250	0	200		
P2	300	350	100	300	300		
P3	100	150	75	50	250		
P4	50	0	0	150	0		
P5	400	150	50	250	100		

Nilai yang terdapat dalam kolom baru disebut dengan istilah opportunity costs.

Perhatikan kolom M1, jika M1 ditugaskan untuk menyelesaikan P3, maka biaya penugasan adalah Rp. 300,-. Jika M1 ditugaskan untuk menyelesaikan P1, maka biaya penugasan sebesar Rp. 200,-, berarti *opportunity cost* penugasan P1M1 sebesar Rp. 100,-.

Langkah 3: Lakukan pengurangan baris!

Berdasarkan tabel 2, lakukan pengurangan semua biaya dengan biaya terkecil setiap baris seperti pengurangan kolom di atas. Pengurangan baris dilakukan apabila pada langkah 2 belum setiap baris memiliki angka nol.

Tabel 2a.

PEKERJAAN	M1	M2	M3	M4	M5	Baris
P1	0	50	250	0	200	P1 = 0
P2	300	350	100	300	300	P2 = 100
P3	100	150	75	50	250	P3 = 50
P4	50	0	0	150	0	P4 = 0
P5	400	150	50	250	100	P5 = 50

Sehingga:

Baris 1: Baris 2: Baris 3:

$$P1M5 = 200 - 0 = 200$$
 $P2M5 = 300 - 100 = 200$ $P3M5 = 250 - 50 = 200$

Baris 4: Baris 5:

Hasil pengurangan baris adalah sebagai berikut:

Tabel 3.

140013.							
	MESIN						
PEKERJAAN	M1	M2	M3	M4	M5		
P1	0	50	250	0	200		
P2	200	250	0	200	200		
P3	50	100	25	0	200		
P4	50	0	0	150	0		
P5	350	100	0	200	50		

Langkah 4: Bentuk penugasan optimum!

Dengan membuat garis minimum yaitu garis yang meliputi semua angka 0 (nol) yang terdapat dalam tabel 3. Penugasan optimum dapat dibentuk apabila jumlah garis minimum sama dengan jumlah baris atau jumlah kolom.

Tabel 3a.

	MESIN						
PEKERJAAN	M1	M2	M3	M4	M5		
P1	Q	50	250	P	200		
P2	200	250		200	200		
P3	50	100	25	()	200		
P4	50	0		1: 0	0		
P5	350	100	•	200	50		

Tabel 3a menunjukkan jumlah garis minimum baik vertikal maupun horisontal:

- a. Satu garis minimum vertikal untuk kolom M1
- b. Satu garis minimum vertikal untuk kolom M3
- c. Satu garis minimum vertikal untuk kolom M4
- d. Satu garis minimum horisontal untuk baris P4

Oleh karena garis minimum hanya berjumlah 4 (empat) garis, maka penugasan optimum belum dapat ditentukan. Proses selanjutnya berpindah ke langkah 5.

Langkah 5 : Lakukan revisi tabel!

Prosedur dalam merevisi tabel 3a dilakukan sebagai berikut:

a. Tentukan angka terkecil dari angka yang tidak dapat diliput (dilewati) oleh garis minimum yang terdapat dalam tabel 3a. Angka tersebut adalah 50.

Tabel 3a.

		MESIN					
PEKERJAAN	M1	M2	M3	M4	M5		

P1	Q	50	250	P	200
P2	200	250)	200	200
P3	50	100	25	•	200
P4	50	0		1 0	0
P5	350	100)	200	50

Kurangkan angka-angka yang tidak dilewati garis minimum dengan angka terkecil (50), sebagai berikut:
 Kolom M2: Kolom M5:

c. Tambahkan angka yang terdapat pada persilangan garis minimum dengan angka terkecil (50).

BarisP4:

$$P4M1 = 50 + 50 = 100$$

$$P4M3 = 0 + 50 = 50$$

$$P4M4 = 150 + 50 = 200$$

Hasil revisi dapat dilihat pada tabel 4.

Tabel 4.

	MESIN						
PEKERJAAN	M1	M2	M3	M4	M5		
P1	0	0	250	0	150		
P2	200	200	0	200	150		
P3	50	50	25	0	150		
P4	100	0	50	200	0		
P5	350	50	0	200	0		

d. Kembali ke langkah 4.

Dengan membuat garis minimum yaitu garis yang meliputi semua angka 0 (nol) yang terdapat dalam tabel 4. Penugasan optimum dapat dibentuk apabila jumlah garis minimum sama dengan jumlah baris atau jumlah kolom.

Tabel 4a.

	MESIN						
PEKERJAAN	M1	M2	M3	M4	M5		
P1	Û	Û	250		15 0		
P2	200	200)	200	150		
P3	50	50	25)	150		
P4	100	0	5 0	2 0	0		
P5	350	50		200	0		

Pada tabel 4a ternyata jumlah garis minimum sama dengan banyaknya kolom atau baris yaitu 5 (lima) garis. Hal ini merupakan syarat untuk menentukan penugasan optimum. Dengan demikian maka tabel 4a menunjukkan penugasan sudah optimum.

Langkah 6: Tentukan penugasan optimum!

Dari tabel 4a dapat ditentukan penugasan optimum setiap mesin untuk menyelesaikan ke lima jenis pekerjaan dengan cara:

- a. Letakkan angka satu pada setiap angka nol
- b. Dalam setiap kolom maupun baris, tidak boleh lebih dari satu angka 1.

Tabel 5.

	MESIN						
PEKERJAAN	M1	M2	M3	M4	M5		
P1	1	0	250	0	150		
P2	200	200	1	200	150		
P3	50	50	25	1	150		
P4	100	1	50	200	0		
P5	350	50	0	200	1		

Untuk kasus perusahaan pengecoran logam di atas, penugasan optimum dapat dilihat pada tabel 5 dengan perincian sebagai berikut:

P1M1, P2M3, P3M4, P4M2, dan P5M5 sehingga:

Total Biaya Minimum = 200 + 200 + 550 + 250 + 500 = 1.700.

Ada 120 kombinasi untuk melakukan lima pekerjaan dengan menggunakan lima mesin. Masing-masing kombinasi itu mempunyai biaya dan ternyata biaya yang paling minimum adalah Rp. 1.700.000.000,-. Sebagai ilustrasi di bawah ini hanya akan diberikan 24 kombinasi dari P1. Masih ada 24 kombinasi dari P2, 24 kombinasi dari P3, 24 kombinasi P4 dan 24 kombinasi dari P5.

TUGAS					BIAYA	TOTAL
					(dalam juta rupiah)	BIAYA
						(dalam juta rupiah)
M1	M2	M3	M4	M5		
P1	P2	Р3	P4	P5	200 + 600 + 175 + 650 + 500	2.125
P1	P2	P3	P5	P4	200 + 600 + 175 + 750 + 400	2.125
P1	P2	P4	P3	P5	200 + 600 + 100 + 550 + 500	1.950
P1	P2	P4	P5	P3	200 + 600 + 100 + 750 + 650	2.300
P1	P2	P5	P3	P4	200 + 600 + 150 + 550 + 400	1.900
P1	P2	P5	P4	P3	200 + 600 + 150 + 650 + 650	2.250
P1	P3	P2	P4	P5	200 + 400 + 200 + 650 + 500	1.950
P1	P3	P2	P5	P4	200 + 400 + 200 + 750 + 400	1.950
P1	P3	P4	P2	P5	200 + 400 + 100 + 800 + 500	2.000
P1	P3	P4	P5	P2	200 + 400 + 100 + 750 + 700	2.150
P1	P3	P5	P2	P4	200 + 400 + 150 + 800 + 400	1.950
P1	P3	P5	P4	P2	200 + 400 + 150 + 650 + 700	2.100
P1	P4	P2	P3	P5	200 + 250 + 200 + 550 + 500	1.700
P1	P4	P2	P5	P3	200 + 250 + 200 + 750 + 650	2.050
P1	P4	P3	P2	P5	200 + 250 + 175 + 800 + 500	1.925
P1	P4	P3	P5	P2	200 + 250 + 175 + 750 + 700	2.075
P1	P4	P5	P2	P3	200 + 250 + 150 + 800 + 650	2.050
P1	P4	P5	P3	P2	200 + 250 + 150 + 550 + 700	1.850
P1	P5	P2	P3	P4	200 + 400 + 200 + 550 + 400	1.750
P1	P5	P2	P4	P3	200 + 400 + 200 + 650 + 650	2.100
P1	P5	P3	P2	P4	200 + 400 + 175 + 800 + 400	1.975
P1	P5	P3	P4	P2	200 + 400 + 175 + 650 + 700	2.125
P1	P5	P4	P2	P3	200 + 400 + 100 + 800 + 650	2.150
P1	P5	P4	P3	P2	200 + 400 + 100 + 550 + 700	1.950

Catatan: nilai-nilai biaya dalam tabel tersebut dalam jutaan rupiah.

KESIMPULAN

Berdasarkan metode Hungarian ternyata biaya minimum untuk melakukan lima pekerjaan dengan lima mesin adalah Rp. 1.700.000.000,-. Hal ini dapat dibuktikan menggunakan daftar kombinasi yang berisi 120 kemungkinan kombinasi. Apabila semua kemungkinan didaftar maka akan nampak bahwa biaya minimum memang Rp. 1.700.000.000,-

DAFTAR PUSTAKA

Heizer, J. dan B. Render. (2009). Manajemen Operasi. Buku 1. Edisi 9. Jakarta: Salemba Empat.

Heizer, J. dan B. Render. (2010). Manajemen Operasi. Buku 2. Edisi 9. Jakarta: Salemba Empat.

Krajewski, L. J., L. P. Ritzman, dan M. K. Malhotra. (2007). Operations Management: Processes and Value Chains. Eighth Edition. Pearson Prentice Hall.

Modul Manajemen Produksi/Koperasi, Magister Manajemen Universitas Stikubank Semarang.

Yamit, Z. (2002). Manajemen Produksi dan Operasi. Cetakan Keempat. Yogyakarta: Penerbit Ekonisia.

Yamit, Z. (2003). Manajemen Kuantitatif untuk Bisnis (Operations Research). Edisi 2003/2004. Yogyakarta: BPFE.