

PERANCANGAN PIRANTI LUNAK PENGUJIAN STRUKTUR ALJABAR GRUP KHUSUS (ABELIAN, SIKLIK & HOMOMORFISMA)

Ngarap Im Manik

Jurusan Matematika FST-BINUS University
Jl.K.H Syahdan 9, Jakarta Barat, Indonesia
email : manik@binus.edu

Abstrak

Pengujian terhadap bentuk-bentuk Grup khusus, seperti Grup Abelian, Siklik, Homomorfisma, Isomorfisma, Monomorfisma, dan Epimorfisma dalam Struktur Aljabar merupakan hal yang kurang menarik bagi sebagian para siswa/mahasiswa, dikarenakan banyaknya teorema dan persyaratan yang harus dipenuhi. Untuk menarik minat dan memudahkan siswa/mahasiswa dalam pengujian bentuk-bentuk masalah di atas, dirancang suatu piranti lunak komputer menggunakan Delphi 7.0. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa dengan piranti lunak tersebut para pengguna dapat terbantu dalam hal pengujiannya dan dapat terhindar dari penggunaan paket program berlisensi karena program yang dirancang dapat dimiliki secara terbuka.

Kata Kunci: *Struktur aljabar, grup khusus, piranti lunak komputer*

1. PENDAHULUAN

Salah satu cabang utama ilmu Matematika adalah studi mengenai aljabar, yakni ilmu yang mempelajari mengenai aturan-aturan operasi dan relasi dari himpunan, serta kemungkinan bentukan dan konsep yang muncul dari aturan-aturan tersebut. Interaksi dari operasi dan sifat-sifat terhadap elemen anggota dari himpunan ini banyak dimanfaatkan dalam berbagai hal, beberapa di antaranya yakni untuk kriptografi, analisa efisiensi algoritma, maupun struktur geometri dan analisa pola. Sejarah perkembangannya, John A. Beachy (1996) menuturkan bahwa sejak awal abad ke-20 studi mengenai struktur aljabar mengalami perkembangan signifikan dan melahirkan beberapa klasifikasi umum struktur aljabar seperti Grup, Ring, dan Field. Penerapan karakteristik dari bentuk-bentuk struktur aljabar khusus ini banyak bermanfaat dalam pengembangan metode penyelesaian masalah yang bersifat abstrak dan sulit direpresentasikan melalui operasi aljabar biasa, misalnya dalam pengembangan sistem matriks dan determinan untuk aljabar linear, maupun penyusunan pola simetri dengan permutasi grup.

Hingga saat ini studi mengenai struktur aljabar masih menjadi suatu hal yang cukup kompleks untuk dijelaskan kepada orang awam atau pelajar yang baru pertama kali menyentuh subjek ini. Salah satu kesulitan utama adalah sulitnya memahami konsep dan perhitungan dari struktur aljabar itu sendiri. Di sinilah teknologi berperan untuk membantu manusia dalam memahami prinsip struktur dari sebuah sistem aljabar dengan membantu proses komputasi sifat-sifat dari struktur aljabar tersebut dan dengan demikian memberikan klasifikasi yang pasti dan gambaran yang lebih jelas bagi para penggunanya.

Salah satu cabang utama ilmu matematika adalah studi mengenai aljabar, yakni ilmu yang mempelajari mengenai aturan-aturan operasi dan relasi dari himpunan, serta kemungkinan bentukan dan konsep yang muncul dari aturan-aturan tersebut. Interaksi dari operasi dan sifat-sifat terhadap elemen anggota dari himpunan ini banyak dimanfaatkan dalam berbagai hal, beberapa di antaranya yakni untuk kriptografi, analisa efisiensi algoritma, maupun struktur geometri dan analisa pola.

Melihat sejarah perkembangannya, John A. Beachy (1996) menuturkan bahwa sejak awal abad ke-20 studi mengenai struktur aljabar mengalami perkembangan signifikan dan melahirkan beberapa klasifikasi umum struktur aljabar seperti Grup, Ring, dan Field. Penerapan karakteristik dari bentuk-bentuk struktur aljabar khusus ini banyak bermanfaat dalam pengembangan metode penyelesaian masalah yang bersifat abstrak dan sulit direpresentasikan melalui operasi aljabar biasa, misalnya dalam pengembangan sistem matriks dan determinan untuk aljabar linear, maupun penyusunan pola simetri dengan permutasi grup.

Hingga saat ini studi mengenai struktur aljabar masih menjadi suatu hal yang cukup kompleks untuk dijelaskan kepada orang awam atau pelajar yang baru pertama kali menyentuh subjek ini. Salah satu kesulitan utama adalah sulitnya memahami konsep dan perhitungan dari struktur aljabar itu sendiri. Di sinilah teknologi berperan untuk membantu manusia dalam memahami prinsip struktur dari sebuah sistem aljabar dengan membantu proses komputasi sifat-sifat dari struktur aljabar tersebut sehingga memberikan klasifikasi yang pasti dan gambaran yang lebih jelas bagi para penggunanya.

Tujuan dari aplikasi piranti lunak ini adalah sebagai berikut : Dapat melakukan komputasi yang lebih efisien terhadap pembuktian struktur aljabar dibandingkan secara manual, membantu meningkatkan pemahaman pengguna terhadap karakteristik dari suatu klasifikasi struktur aljabar. Sedangkan manfaat dari aplikasi ini adalah sebagai berikut : mempermudah pengguna dalam melakukan pembuktian struktur dari suatu sistem aljabar, membantu pengguna dalam meneliti struktur dari sistem aljabar dengan jumlah elemen yang besar dan

sulit dilakukan secara manual. Khusus bagi bidang pendidikan, aplikasi ini dirancang untuk membantu memberikan simulasi yang dapat menyajikan tahapan proses pembuktian secara sederhana dan mudah dipahami.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Struktur dan Sistem Aljabar

Menurut Jong Jek Siang (2002,p436) sistem aljabar didefinisikan sebagai suatu himpunan beserta dengan operasi-operasi pada himpunan tersebut. Struktur aljabar secara lepas didefinisikan sebagai karakteristik dari suatu sistem aljabar. Istilah struktur aljabar juga mengacu kepada cabang ilmu matematika bernama Aljabar Abstrak yang mempelajari mengenai karakteristik sistem aljabar seperti Grup, Ring, dan Field.

Tabel Cayley

Operasi biner dari suatu himpunan merupakan operasi antara dua elemen dari himpunan tersebut. Tabel Cayley merupakan tabel yang dirancang oleh Arthur Cayley pada abad ke-19 untuk menggambarkan struktur dari Grup berhingga dengan cara menyusun semua hasil operasi dari elemen Grup tersebut ke dalam tabel persegi.

Tabel 1. Tabel Cayley untuk Operasi Penjumlahan Modulo 5

+	0	1	2	3	4	> baris 0
0	0	1	2	3	4	> baris 1
1	1	2	3	4	0	> baris 2
2	2	3	4	0	1	> baris 3
3	3	4	0	1	2	> baris 4
4	4	0	1	2	3	> baris 5

Tabel di atas merupakan contoh tabel Cayley untuk operasi penjumlahan modulo 5. 0, 1, 2, 3, dan 4 pada baris dan kolom berwarna abu-abu merupakan elemen dari himpunan, sedangkan "+" melambangkan operasi yang didefinisikan pada himpunan tersebut. Kotak berwarna putih melambangkan hasil operasi biner antar masing-masing pasangan elemen dalam himpunan. Tabel Cayley banyak digunakan dalam studi mengenai struktur aljabar karena penyusunannya dapat menggambarkan sifat-sifat dari Grup. Sebagai contoh, dapat ditentukan bahwa operasi penjumlahan modulo 5 dari himpunan 0, 1, 2, 3, dan 4 merupakan Grup Abelian dengan melihat bahwa hasil produk operasi pada tabel Cayley saling simetris terhadap sumbu diagonal tabel.

Sifat-Sifat Operasi Aljabar

Operasi biner pada sistem aljabar memiliki sifat-sifat yang digunakan untuk mengklasifikasikan sistem tersebut, seperti dijelaskan (E.H.Connell, 2004) yakni : tertutup, asosiatif, komunitatif, memiliki elemen identitas, memiliki invers dan distributive.

Klasifikasi Struktur Aljabar

Berdasarkan sifat-sifat pada operasinya, menurut John R. Durbin (2002) struktur suatu sistem aljabar dapat diklasifikasikan ke dalam beberapa kategori, yakni :

A. Semigrup

Misalkan (A, \diamond) adalah suatu sistem aljabar. (A, \diamond) disebut Semigrup bila memenuhi kondisi-kondisi (Wallace, 1979)

1. \diamond merupakan operasi tertutup
2. \diamond merupakan operasi asosiatif

Contoh :

A adalah himpunan bilangan-bilangan bulat genap positif = {2, 4, 6, ...}, dengan \diamond adalah operasi penjumlahan biasa.

B. Monoid

Misalkan (A, \diamond) adalah suatu sistem aljabar. (A, \diamond) disebut Monoid bila memenuhi kondisi-kondisi :

1. (A, \diamond) merupakan Semigrup
2. (A, \diamond) memiliki elemen identitas

Contoh :

A adalah himpunan atlet dari suatu klub basket tertentu dengan tinggi yang bervariasi, dan \diamond didefinisikan sebagai : $(\forall a, b \in A) a \diamond b = a$ (jika a lebih tinggi dari b)

$$(\forall a, b \in A) a \diamond b = b \text{ (jika b lebih tinggi dari a)}$$

C. Grup

Misal (A, \diamond) adalah suatu sistem aljabar. (A, \diamond) disebut Grup bila memenuhi kondisi-kondisi :

1. (A, \diamond) merupakan Monoid
2. Setiap elemen dalam A memiliki invers

Contoh :

A adalah himpunan bilangan bulat = $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, dengan \diamond adalah operasi penjumlahan biasa.

D. Ring

Misalkan (A, \diamond, \square) adalah sebuah sistem aljabar. (A, \diamond, \square) disebut Ring bila memenuhi kondisi-kondisi: (Caenepeel, 2009)

1. (A, \diamond) merupakan Grup Komutatif (Abelian)
2. (A, \square) memenuhi sifat tertutup dan asosiatif (Semigrup)
3. Operasi \square bersifat distributif terhadap \diamond

Contoh :

A adalah himpunan bilangan bulat = $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ dengan \diamond didefinisikan sebagai operasi penjumlahan aritmatika biasa dan \square didefinisikan sebagai operasi perkalian biasa.

E. Grup Komutatif (Abelian)

Misalkan (A, \diamond) adalah suatu Grup. Grup (A, \diamond) disebut sebagai Grup Komutatif bila memenuhi kondisi-kondisi : (Pevtsova, 2009)

1. (A, \diamond) merupakan Grup
2. \diamond bersifat komutatif

Contoh Grup Siklik misalnya pada himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan biasa.

F. Grup Siklik

Misalkan (A, \diamond) adalah suatu Grup. Grup (A, \diamond) disebut sebagai Grup Siklik bila ada suatu elemen $a \in A$ sedemikian sehingga setiap elemen A dapat dinyatakan sebagai hasil operasi a dengan dirinya sendiri sebanyak n kali (n berhingga). Elemen a yang bersifat seperti itu disebut sebagai Generator.

(A, \diamond) Grup Siklik $\Leftrightarrow (\exists a \in A)(\forall x \in A) x = a^n = a \diamond a \diamond \dots \diamond a$ (n berhingga)

Contoh :

Himpunan $A = \{0, 1, 2\}$ dengan operasi penjumlahan modulo 3.

G. Homomorfisma Grup

John R. Durbin (1992, p152) mendefinisikan bahwa jika G adalah sebuah Grup dengan operasi * dan H adalah sebuah Grup dengan operasi #, maka pemetaan $\theta: G \rightarrow H$ adalah sebuah homomorfisma jika :

$$\theta(a * b) = \theta(a) \# \theta(b) \text{ untuk semua } a, b \in G.$$

Jika terdapat hubungan homomorfisma dari G ke H, maka H disebut sebagai *homomorphic image* atau citra homomorfis dari G.

Contoh : Misalkan terdapat 2 buah himpunan G dan H

$$G = \text{himpunan bilangan bulat tidak negatif} = \{0, 1, 2, \dots\}; H = \{\text{genap, ganjil}\}$$

Kedua himpunan G dan H memiliki operasi biner masing-masing * dan #, yang didefinisikan sebagai operasi penjumlahan biasa. Citra homomorfis suatu himpunan mewarisi sifat-sifat dari himpunan yang dicerminkannya. Pewarisan sifat inilah yang menjadi manfaat utama dari homomorfisma Grup. Pada contoh sebelumnya dapat dilihat karakteristik hasil operasi antar elemen pada himpunan G yang tidak berhingga dengan melihat hasil operasi dari himpunan H yang jumlahnya jauh lebih sedikit namun tetap mencerminkan sifat-sifat hasil operasi himpunan G, yaitu bilangan genap atau bilangan ganjil. Sifat homomorfisma terutama banyak digunakan untuk meneliti karakteristik sistem aljabar dengan jumlah anggota yang besar dan sulit diteliti secara manual, sehingga dengan homomorfisma efisiensi penelitian jauh meningkat.

3. METODE PENELITIAN

Dalam penelitian ini metode yang digunakan meliputi:

a. Studi Literatur

Melakukan pembelajaran terhadap materi struktur aljabar, khususnya yang terkait dengan teori Grup, serta melakukan pembelajaran mengenai teknik pemrograman dan metode algoritma yang digunakan dalam perancangan program. Materi literatur didapat dari berbagai sumber, baik dari buku-buku maupun jurnal dan internet.

b. Metode Perancangan

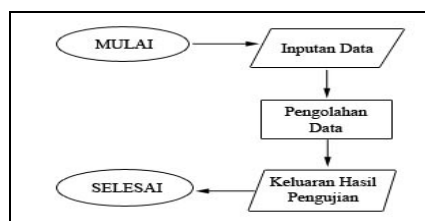
Perancangan program merupakan langkah yang krusial dalam pembuatan suatu program aplikasi. Perancangan diperlukan untuk membuat bentuk dasar dan langkah-langkah yang perlu dilakukan dalam tahapan-tahapan pembuatan aplikasi. Rekayasa Piranti Lunak menurut Roger S. Pressman (2005, p23) adalah penetapan dan pemakaian prinsip-prinsip rekayasa dalam rangka mendapatkan piranti lunak yang ekonomis, terpercaya, dan bekerja efisien pada mesin (komputer).

Rekayasa piranti lunak secara garis besar mencakup 3 elemen yang mampu mengontrol proses pengembangan piranti lunak, yaitu : *Metode-metode (methods)*, Menyediakan cara-cara teknis untuk membangun piranti lunak. *Alat-alat bantu (tools)* : Menyediakan dukungan otomatis atau semi otomatis untuk metode dan *Prosedur-prosedur (procedure)*: Merupakan pengembangan metode dan alat bantu. Penelitian ini menggunakan rekayasa piranti lunak SDLC (*Software Development Life Cycle*) yaitu serangkaian kegiatan yang dilakukan selama masa pengembangan software.

Tahapan-tahapan dari kegiatan pada SDLC model *Waterfall* menurut (A. Dix, 1997) meliputi: Spesifikasi kebutuhan, Perancangan, *Coding and unit Testing*, *Integration and Testing* serta Implementasi dan Pemeliharaan

3.1 Spesifikasi Kebutuhan

Analisis spesifikasi kebutuhan untuk mendapatkan hasil akhir dari sistem yang dibuat adalah analisis mengenai berbagai tahapan proses yang dibutuhkan oleh sistem untuk mendapatkan hasil yang diinginkan. Berikut ini adalah gambaran secara umum mengenai tahapan analisis sistem aplikasi pengujian struktur aljabar yang akan dibuat.



Gambar 1. Global Flow Chart Analisis Kebutuhan Sistem

Saat mulai menjalankan aplikasi hal pertama yang perlu dilakukan pengguna adalah memasukkan data sistem aljabar yang dibutuhkan program untuk proses pengujian sifat. Pengguna akan memasukkan data elemen-elemen dari himpunan yang akan diuji. Pengguna dapat menginput data untuk satu atau dua buah himpunan sesuai kebutuhan. Jika pengguna ingin menguji sampai sifat homomorfisma, maka pengguna perlu memasukkan data elemen untuk kedua himpunan. Selain itu pengguna juga perlu memasukkan hasil operasi untuk tiap pasang elemen himpunan tersebut ke dalam tabel Cayley yang di-generate oleh program.

Setelah data elemen dan hasil operasi dari tiap sistem aljabar selesai dimasukkan, pengguna dapat menginstruksikan program untuk mulai melakukan pengolahan data. Dalam proses pengolahan data ini sifat-sifat umum dari sistem aljabar akan diuji satu per satu, mulai dari sifat tertutup, asosiatif, ada tidaknya elemen identitas, ada tidaknya invers bagi setiap elemen dalam sistem aljabar, serta sifat komutatif. Jika ada suatu sifat yang tidak terbukti maka program tidak akan melakukan pengujian untuk sifat-sifat umum selanjutnya sesuai dengan kriteria struktur aljabar. Pengujian sifat-sifat umum operasi aljabar ini butuh dilakukan terlebih dahulu sebelum pengguna dapat melakukan pengujian untuk bentuk-bentuk grup khusus.

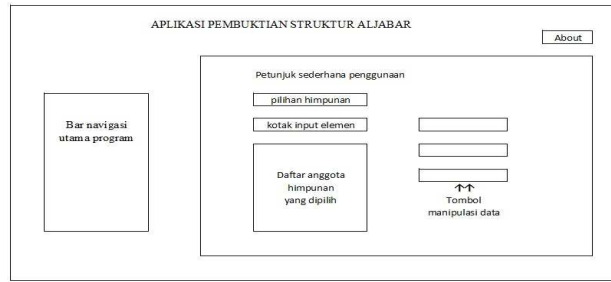
Jika pengujian sifat-sifat umum sistem aljabar telah membuktikan bahwa sistem aljabar tersebut adalah sebuah Grup, maka pengguna dapat melanjutkan instruksi program untuk menguji dua bentuk Grup khusus, yaitu sifat siklik dan homomorfisma sistem aljabar. Pada pengujian homomorfisma pengolahan data akan berjalan jika kedua sistem aljabar yang di-input terbukti sebagai Grup. Selain itu pada uji homomorfisma juga akan diuji bentuk derivatif homomorfisma, yakni sifat isomorfisma, monomorfisma, dan epimorfisma.

3.2 Perancangan

Agar menghasilkan sebuah program aplikasi yang mudah digunakan oleh pengguna, serta dapat memberikan hasil keluaran yang jelas dan mudah dipahami bagi pengguna maka dilakukan beberapa bentuk rancangan seperti berikut ini :

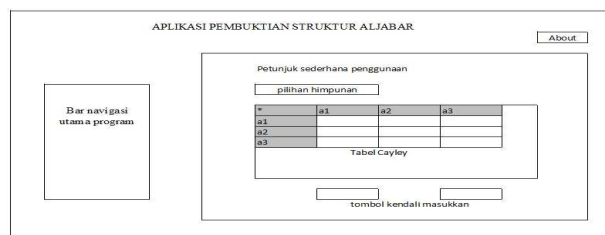
3.2.1 Rancangan Tampilan

Rancangan pertama dari program aplikasi saat mulai dijalankan adalah tampilan halaman di mana pengguna perlu memasukkan data dari elemen himpunan yang ingin diuji, berikut merupakan beberapa gambar rancangan tampilan program.



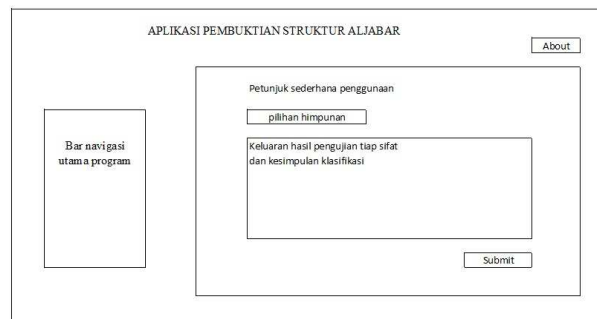
Gambar 2. Rancangan *Input* Elemen Himpunan

Pada rancangan kedua, setelah pengguna memasukkan data elemen-elemen dalam himpunan, program akan men-generate tabel Cayley sesuai masukkan data elemen dari pada rancangan pertama. Di sini pengguna memasukkan nilai hasil operasi tiap pasangan, seperti ditunjukkan pada gambar 3.



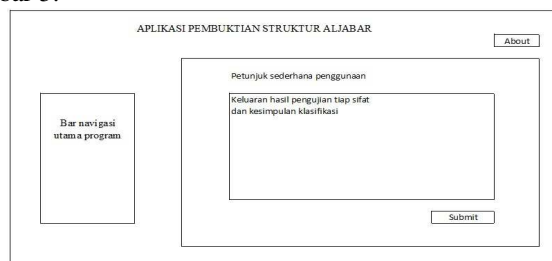
Gambar 3. Rancangan *Input* Hasil Operasi pada Himpunan

Pada rancangan ketiga pengguna menginstruksikan program untuk melakukan pengujian sifat-sifat umum aljabar, kemudian program akan menampilkan hasil pengujian sifat-sifat tersebut serta kesimpulan hasil klasifikasi sistem aljabar tersebut seperti ditunjukkan pada gambar 4.



Gambar 4. Rancangan *Output* untuk Pengujian Klasifikasi Umum

Setelah melakukan pengujian sifat umum pada rancangan ketiga, pada rancangan keempat pengguna dapat menginstruksikan program untuk melakukan pengujian terhadap sifat dari bentuk Grup khusus sistem aljabar, seperti ditunjukkan pada gambar 5.



Gambar 5. Rancangan *Output* untuk Pengujian Grup Khusus

3.2.2 Rancangan Proses

Saat program aplikasi dijalankan pertama kali maka program akan masuk ke dalam form *input* elemen anggota himpunan. Di sini pengguna harus memilih himpunan mana yang ingin di-*input* kemudian memasukkan data elemen-elemen anggota himpunan tersebut. Setelah mengetikkan data elemen di kotak *input*, pengguna selanjutnya menekan tombol "Tambah ke Himpunan" untuk menginstruksikan komputer agar memeriksa *input*

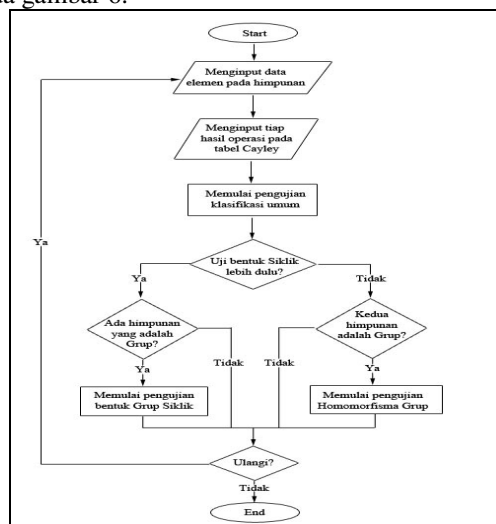
yang diberikan pengguna. Jika *input* sudah ada dalam daftar anggota maka akan keluar pesan peringatan, namun jika *input* belum ada maka program akan menambahkan *input* tersebut ke dalam daftar elemen himpunan. Selain itu terdapat dua tombol manipulasi data lainnya, yaitu "Hapus dari Himpunan" untuk menghapus suatu elemen tertentu dari daftar himpunan, dan "Kosongkan Himpunan" yang digunakan untuk menghapus seluruh data elemen dari himpunan yang dipilih.

Setelah meng-*input* data elemen, pengguna akan melanjutkan ke modul berikutnya dengan menggunakan bar navigasi di bagian kiri program. Langkah selanjutnya adalah mengisi hasil operasi antar tiap elemen pada tabel Cayley. Ukuran dan data elemen awal tabel Cayley akan secara otomatis di-*generate* dalam bentuk *StringGrid* berdasarkan data yang telah di-*input* pengguna pada modul *input* data elemen himpunan. Adapun algoritma untuk *StringGrid* seperti berikut ini

```
StringGrid.jumlah_baris = jumlah_data_himpunan + 1;
StringGrid.jumlah_kolom = jumlah_data_himpunan + 1;
UNTUK i = 1 SAMPAI DENGAN jumlah_data_himpunan
    StringGrid.Cells[kolom_0,baris_i] = elemen_ke_i;
    StringGrid.Cells[kolom_i,baris_0] = elemen_ke_i;
    i = i+1;
AKHIR UNTUK
```

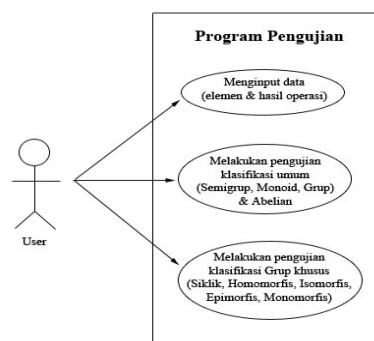
Pengguna kemudian mengisi setiap sel dengan hasil operasi antara pasangan elemen pada baris dengan kolom dari sel tersebut. Setelah mengisi seluruh sel, pengguna meneka tombol "Submit". Jika seluruh sel telah terisi, maka data akan disimpan oleh program. Selain itu juga terdapat tombol "Kosongkan Tabel" untuk mengosongkan seluruh sel yang telah diisi. Kemudian pengguna melanjutkan ke modul berikutnya di mana program akan melakukan pengujian sifat-sifat umum dari himpunan yang dipilih pengguna. Secara bertahap prosesnya adalah sebagai berikut.

Pertama-tama program akan merubah jenis data dari *StringGrid* pada tabel Cayley ke dalam bentuk data sementara berupa angka. Hal ini dikarenakan untuk mengambil data sel formatnya harus berupa angka integer, sedangkan data masukan belum tentu berupa angka. *StringGrid3* menampung isi dari *StringGrid1* (himpunan pertama), sedangkan *StringGrid4* menampung hasil isi *StringGrid2* (himpunan kedua). Secara keseluruhan proses program dapat dilihat pada gambar 6.



Gambar 6. Flow Chart Sistem Kontrol Modul

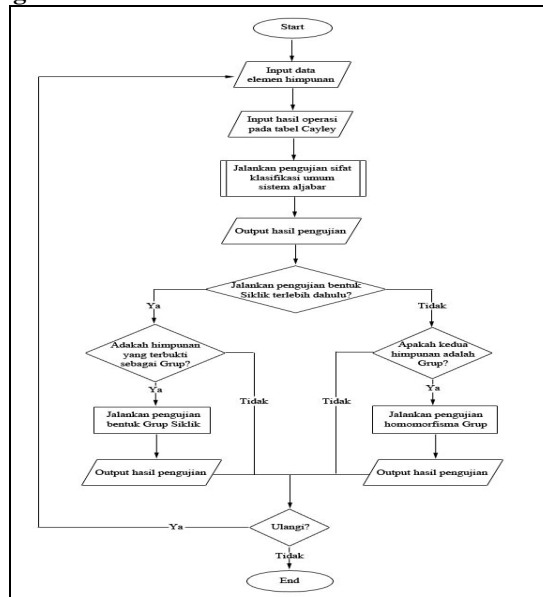
3.2.3 Use Cases Diagram



Gambar 7. Use Cases Diagram untuk Program Pengujian

Gambar 7 menunjukkan kemungkinan interaksi yang bisa dilakukan pengguna dengan sistem program aplikasi. Kemungkinan-kemungkinan ini disajikan dalam bentuk *Use Cases Diagram*.

3.2.4 Flow Chart Program Utama



Gambar 8. Flow Chart Program Utama

Gambar 8 menunjukkan alur kerja keseluruhan dalam program. Subrutin pengujian sifat klasifikasi umum dipecah ke dalam beberapa tahapan.

4. HASIL dan PEMBAHASAN

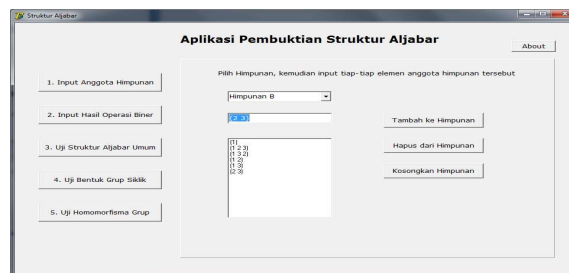
4.1 Kebutuhan Sistem

Kebutuhan untuk menjalankan sistem aplikasi yang telah dibuat sangat berkaitan dengan perangkat yang digunakan. Dalam perancangan program aplikasi ini, digunakan komputer dan sistem operasi dengan spesifikasi sebagai berikut : Processor : AMD Phenom II X4 955 3.20 GHz; Memory : 4 Gigabyte; Operating System : Microsoft Windows 7 Professional x86, sedangkan untuk membuat aplikasi ini digunakan software Borland Delphi 7 dengan bahasa pemrograman Delphi. Program aplikasi ini dapat dijalankan pada semua komputer dengan sistem operasi Windows.

4.2. Pengoperasian Program Utama

Program utama dari aplikasi pengujian ini terdiri dari 1 buah form dengan 5 modul, yaitu modul Input Anggota Himpunan, modul Input Hasil Operasi Biner, modul Uji Struktur Aljabar Umum, modul Uji Bentuk Grup Siklik, dan modul Uji Homomorfisma Grup. Berikut tampilan layar beberapa form dan modul hasil aplikasi pengujian struktur aljabar

Tampilan Hasil

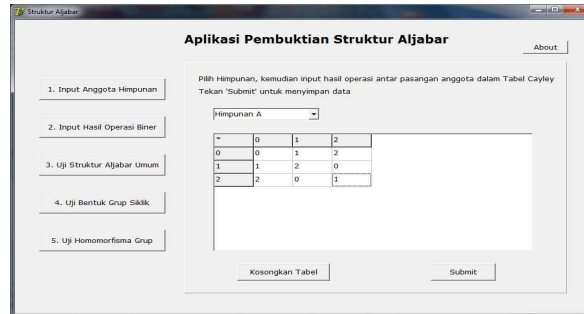


Gambar 9. Tampilan Modul Input Anggota Himpunan

Modul ini akan muncul ketika pertama kali program dijalankan. Pada modul ini pengguna perlu memilih dari *ComboBox*, himpunan mana yang ingin di-input elemennya. Setelah memilih himpunan, kemudian pengguna mengetikkan elemen pada kotak teks yang tersedia dan menekan tombol "Tambah ke Himpunan". Jika

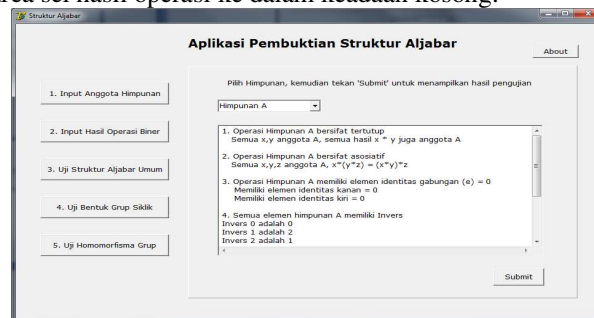
elemen yang di-*input* sebelumnya belum terdapat dalam himpunan yang dipilih, maka *ListBox* akan ter-*update* dan menampilkan daftar elemen-elemen dalam himpunan tersebut.

Tombol "Hapus dari Himpunan" berguna untuk menghapus suatu elemen tertentu yang dipilih pengguna dari himpunan, sedangkan tombol "Kosongkan Himpunan" berfungsi untuk menghapus seluruh elemen dari *ListBox* daftar himpunan. Setelah selesai meng-*input* seluruh elemen dari himpunan yang dipilih, selanjutnya pengguna melanjutkan ke modul kedua, yakni modul Input Hasil Operasi Biner, seperti ditunjukkan pada gambar 10.



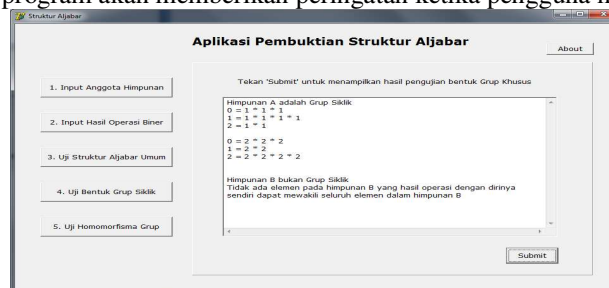
Gambar 10. Tampilan Modul Input Hasil Operasi Biner

Di modul ini, seperti pada modul sebelumnya, pertama-tama pengguna perlu memilih himpunan mana yang ingin di-*input* hasil operasinya. Setelah himpunan pada *ComboBox* dipilih, ukuran dan isi *StringGrid* akan otomatis ter-*update* dengan data dari elemen himpunan yang dipilih. Selanjutnya pengguna perlu mengisi setiap sel pada tabel Cayley (*StringGrid*) dengan hasil operasi antara elemen baris dengan elemen kolom. Setelah seluruh sel terisi, selanjutnya pengguna perlu menekan tombol "Submit" untuk menyimpan hasil operasi. Program akan memberikan peringatan jika ada sel hasil operasi yang belum terisi. Tombol "Kosongkan Tabel" digunakan untuk me-*reset* area sel hasil operasi ke dalam keadaan kosong.



Gambar 11. Tampilan Modul Uji Struktur Aljabar Umum

Gambar 11 di atas menunjukkan tampilan pada modul berikutnya. Pada modul ini pengguna perlu memilih pada *ComboBox*, himpunan mana yang ingin diuji kemudian menekan tombol "Submit" untuk menginstruksikan program agar melakukan pengujian sifat. Hasil dari pengujian akan ditampilkan pada kotak teks yang tersedia. Jika langkah-langkah untuk modul pertama dan kedua belum selesai dilakukan, maka modul ini tidak akan berjalan dan program akan memberikan peringatan ketika pengguna menekan tombol "Submit".



Gambar 12. Tampilan Modul Uji Bentuk Grup Siklik

Pada modul ini program akan melakukan pengujian terhadap semua himpunan yang telah terbukti sebagai Grup. Tombol "Submit" digunakan untuk melakukan proses pengujian. Hasil pengujian akan ditampilkan pada kotak teks yang tersedia. Untuk menjalankan modul ini pengguna perlu menjalankan modul Uji Struktur Aljabar Umum terlebih dahulu. Jika ada langkah-langkah pada tiga modul pertama yang belum selesai dilakukan, atau jika tidak ada himpunan yang terbukti sebagai Grup berdasarkan uji pada modul sebelumnya, maka program akan memberikan peringatan ketika tombol "Submit" ditekan.

Pembahasan

Untuk mengevaluasi kinerja sistem apakah dapat melakukan pengujian dengan tepat atau tidak telah dilakukan percobaan dengan sampel sistem aljabar. Untuk tujuan percobaan ini ditentukan dua sistem aljabar, masing-masing sebagai berikut.

1. Sistem Aljabar $(A,*)$ terdiri dari : Himpunan $A = \{0, 1, 2\}$; Operasi "*" didefinisikan sebagai operasi penjumlahan modulo 3
2. Sistem Aljabar $(B,\#)$ terdiri dari : Himpunan Permutasi $B = \{(1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}$; Operasi "#" didefinisikan sebagai operasi komposisi seperti yang ditampilkan sebelumnya.

Tampilan keluaran lengkap dari hasil pengujian adalah sebagai berikut.

```
f(0) = (1)
f(1) = (1 2 3)
f(2) = (1 3 2)

Grup Himpunan B adalah image Homomorfis dari Grup Himpunan A
Grup Himpunan B adalah image Monomorfis dari Grup Himpunan A
Memenuhi syarat :
- Grup B image homomorfis dari A
- f:A->B adalah fungsi injektif/1-1

Pemeriksaan :
f(0 * 0) = f(0) = (1) sama dengan (1) = (1) # (1) = f(0) # f(0)
f(1 * 0) = f(1) = (1 2 3) sama dengan (1 2 3) = (1 2 3) # (1) = f(1) # f(0)
```

Gambar 4.16 Output Hasil Pengujian Homomorfisma $(A,*)$ dengan $(B,\#)$

Dari keluaran hasil pengujian yang diberikan program diketahui bahwa Grup Himpunan B merupakan citra monomorfis dari Grup Himpunan A. Sifat-sifat homomorfisma dipenuhi serta fungsi pemetaan f bersifat injektif. Demikian juga bahwa perbandingan hasil antara pengujian secara manual dengan pengujian melalui program aplikasi, memberikan hasil pengujian yang tepat, sama dengan pengujian secara manual. Selanjutnya untuk suatu sistem aljabar yang memiliki himpunan dengan jumlah n elemen anggota, maka jumlah proses komputasi yg dilakukan untuk pengujian sifat adalah:

Uji Tertutup = n^2 proses, Uji Asosiatif = n^3 proses, Uji Elemen Identitas = $2n^2$ proses, Uji Invers = n^2 proses, Uji komutatif = n^2 proses, Uji siklik = $\frac{1}{2} n^2(n+1)$ proses dan Uji homomorfis = n^2 proses. Sehingga dapat diketahui bahwa untuk sistem aljabar dengan 2 elemen anggota program akan melakukan minimal 38 proses, sedangkan bila sistem aljabar tersebut diganti dengan sistem aljabar lain dengan 6 elemen anggota maka jumlah prosesnya akan meningkat menjadi minimal 658 proses, demikian seterusnya seiring perubahan jumlah elemen anggota sistem aljabar yang diuji. Dari hasil perbandingan antar berbagai sampel sistem aljabar tersebut tidak ditemukan peningkatan waktu proses yang terlihat secara kasat mata, karena program menyelesaikan komputasi dalam waktu yang sangat singkat. Maka program aplikasi yang dibuat berhasil menjalankan fungsinya.

5. SIMPULAN

Dari analisis dan pengujian terhadap beberapa sampel sistem aljabar terhadap program yang ada, dapat disimpulkan bahwa program pengujian dapat memberikan hasil yang tepat, sesuai dengan sifat-sifat yang ada. Waktu kerja yang dibutuhkan program dalam memberikan hasil pengujian sangat singkat, sehingga jauh lebih efisien dibandingkan pengujian secara manual. Demikian pula bahwa program telah diuji dengan beberapa sistem aljabar yang memiliki jumlah elemen bervariasi, dan tidak ditemukan peningkatan waktu yang kasat mata dalam waktu proses program. Ukuran *file* program kecil dan algoritma program dirancang dengan algoritma-algoritma dasar yang tidak kompleks, sehingga tidak membutuhkan spesifikasi komputer yang tinggi untuk menjalankan program. Program dinilai dapat memenuhi tujuannya untuk memudahkan pengguna dalam

memahami mengenai klasifikasi sistem aljabar beserta sifat-sifatnya. Program memberikan penjelasan hasil pengujian secara bertahap dan jelas.

UCAPAN TERIMA KASIH

Dengan selesainya penelitian ini penulis mengucapkan terimakasih kepada **Andrew Saputra** yang telah membantu dalam penyelesaian program pengujian ini.

DAFTAR PUSTAKA

- Beachy, John A. dan Blair, William D. 1996. *Abstract Algebra 2nd ed.* Illinois : Waveland Press, Inc.
- Caenepeel, Stefaan, and Verschoren, Alain ,2009. Noncommutative Rings and Geometry. *Algebras and Representation Theory* vol. 12 No. 2-5 tahun 2009.
- Connell, E. H. 2004. *Elements of Abstract and Linear Algebra.* University of Miami. <http://www.math.miami.edu/~ec/book/book.pdf>. Terakhir diakses pada tanggal 26 November 2010.
- Dix, A., and Finlay, J., and Abowd, G., and Beale, R. 1997. *Human-Computer Interaction.* <http://www.hcibook.com/hcibook/downloads/pdf/slides.5.pdf>. Terakhir diakses pada 8 Januari 2011.
- Durbin, John R. 1992,. *Modern Algebra : An Introduction 3rd ed.* Singapore : John Wiley & Sons, Inc.
- Jong Jek Siang ,2002 . *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu komputer.* Yogyakarta : Andi.
- Pressman, Roger S. 2005. *Software Engineering: A Practitioner's Approach 6th ed.* Boston : McGraw-Hill.
- Pevtsova, Julia, and Witherspoon, Sarah ,2009. Varieties for Modules of Quantum Elementary Abelian Groups. *Algebras and Representation Theory* vol. 12 No. 2-5 tahun 2009.
- Wallace, D. A. R. 1979. The Algebraic Structure of Group Rings. *Bulletin of American Mathematical Society* vol. 1 No. 2 tahun 1979.