Analisis Struktur Daerah Integral dari Himpunan Polinomial Berdasarkan Struktur Polinomial Gelanggang

NOVI RUSTIANA DEWI
Jurusan Matematika, Universitas Sriwijaya, Sumatera Selatan, Indonesia

INTISARI: Himpunan $R[x]$ polinomial dengan koefisien dari gelanggang R juga merupakan sebuah gelanggang dengan berbagai operasi polinomial jumlahan dan perkalian, dan bahwa R merupakan gelanggang bagian dari $R[x]$. Oleh karena itu akan ditunjukkan bahwa jika D adalah sebuah daerah integral maka demikian juga dengan himpunan polinomial dengan koefisien di dalam D, yaitu $D[x]$.

KATA KUNCI: polinomial, gelanggang, daerah integral

ABSTRACT: The set $R[x]$ of all polynomials with coefficients in the ring R is itself a ring with the usual operations of polynomial addition and multiplication, and that R is a subring of $R[x]$. So we will proof that if D is an integral domain then so is set $D[x]$ of polynomials with coefficients in D.

KEYWORDS: polynomial, ring, integral domain

Oktober 2011

1 PENDAHULUAN

Salah satu hal yang cukup menarik dalam bidang struktur aljabar adalah bagaimana mengembangkan suatu polinomial dalam x dengan koefisien di dalam suatu gelanggang (ring) R. Dapat diterka bagaimana menjumlahkan dan mengalikan berbagai polinomial itu berdasarkan derajat masing-masing polinomial, yang ternyata bahwa himpunan $R[x]$ dari semua polinomial dengan koefisien di dalam gelanggang R merupakan suatu gelanggang dengan operasi polinomial biasa penjumlahan dan perkalian, dan bahwa R adalah gelanggang bagian (subring) dari $R[x]$ [1].

Atas dasar hal tersebut, akan dikaji bagaimana bentuk himpunan polinomial dengan mengambil koefisien di dalam suatu daerah integral (*integral domain*) D. Daerah integral merupakan gelanggang komutatif dengan elemen satuan (*unity*) yang tidak memuat pembagi nol (*divisors of zero*). Selanjutnya himpunan semua polinomial dalam indeterminasi x dengan koefisien di dalam daerah integral D tersebut dinotasikan dengan $D[x]$. Pengkajian dilakukan atas dasar definisi serta sifat yang berlaku dalam gelanggang dan daerah integral.

2 TINJAUAN PUSTAKA

Sebelum dikaji lebih mendalam tentang himpunan $D[x]$, terlebih dahulu diberikan definisi dan sifat gelanggang, pembagi nol dan daerah integral.

Definisi 1 *(Gelanggang) Suatu gelanggang $\langle R, +, \cdot \rangle$ adalah suatu himpunan R bersama-sama dengan dua operasi biner '$+$' dan '$\cdot$', yang disebut sebagai penjumlahan dan perkalian yang didefinisikan pada R sedemikian sehingga aksioma berikut dipenuhi:*

1. *$\langle R, + \rangle$ merupakan suatu grup abelian.*
2. *Bersifat asosiatif terhadap operasi perkalian.*
3. *Untuk semua $a, b, c \in R$, hukum distributif kiri, $a(b+c) = (ab) + (ac)$ dan hukum distributif kanan $(a+b)c = (ac) + (bc)$ dipenuhi*[1].

Definisi 2 *(Gelanggang komutatif, elemen satuan) Suatu gelanggang yang bersifat komutatif terhadap operasi perkalian disebut gelanggang komutatif. Suatu gelanggang R dengan suatu identitas perkalian 1 sedemikian sehingga $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ untuk semua $x \in R$, disebut gelanggang dengan elemen satuan*[1].

Teorema 1 *Jika R adalah suatu gelanggang dengan elemen satuan, maka elemen satuan 1 merupakan satu-satunya identitas perkalian*[1].

Bukti: Diberikan 1 dan $1'$ keduanya merupakan identitas perkalian di dalam suatu gelanggang R. Dengan mengambil 1 sebagai identitas diperoleh:

$$(1)(1') = 1'$$

Demikian pula dengan mengambil $1'$ sebagai identitas, diperoleh:

$$(1)(1') = 1,$$

sehingga diperoleh $1 = 1'$

Definisi 3 *(pembagi nol) Jika a dan b adalah dua elemen tak nol dari suatu gelanggang R sedemikian sehingga $ab = 0$, maka a dan b disebut pembagi nol*[1].

Definisi 4 *(daerah integral) Suatu daerah integral D adalah suatu gelanggang komutatif dengan elemen satuan dan tidak memuat pembagi nol*[1].

Selanjutnya akan diberikan pula definisi serta sifat polinomial gelanggang. Suatu polinomial didefinisikan sebagai suatu jumlahan biasa tak berhingga

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

dengan $a_i = 0$ untuk semua kecuali sebanyak berhingga bilangan i. Bilangan a_i merupakan koefisien dari $f(x)$[1].

Untuk mempermudah pekerjaan dengan polinomial, jika $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$ mempunyai $ai = 0$ untuk $i > n$, maka $f(x)$ dapat dinotasikan sebagai $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$.

Jumlahan dan perkalian polinomial dengan koefisien di dalam suatu gelanggang R didefinisikan sebagai berikut. Jika

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

dan

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n + \ldots$$

Maka jumlahan polinomial adalah

$$f(x) + g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots$$

dimana $c_n = a_n + b_n$, dan untuk perkalian polinomial adalah

$$f(x)g(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + \ldots + d_nx^n + \ldots$$

di mana $d_n = \sum_i = 0^n a_i b_{n-i}$. Perhatikan bahwa kedua c_i dan d_i adalah nol untuk semua kecuali sebanyak berhingga bilangan dari nilai-nilai i, sehingga definisi ini memberikan suatu pengertian. Catatan bahwa $\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$ tidak tidak harus sama dengan $\sum_{i=0}^n b_i a_{n-i}$jika R tidak komutatif. Berdasarkan definisi jumlahan dan perkalian tersebut , diperoleh Teorema berikut.

Teorema 2 *Himpunan $R[x]$ dari semua polinomial-polinomial dalam suatu indeterminasi x dengan koefisien-koefien di dalam suatu gelanggang R adalah suatu gelanggang atas jumlahan dan perkalian polinomial. Jika R komutatif, maka demikian pula $R[x]$, dan jika R mempunyai elemen satuan 1, maka 1 juga merupakan elemen satuan untuk $R[x]$.*

Bukti: Himpunan $\langle R[x], +\rangle$ merupakan suatu grup abelian cukup jelas. Hukum asosiatif perkalian dan hukum distributif juga berlaku, walaupun perhitungannya agak rumit. Berikut diilustrasikan pembuktian keberlakuan hukum asosiatif. Berdasarkan aksioma gelanggang, untuk $a_i, b_j, c_k \in R$ diperoleh

$$\begin{aligned}
\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right)\right]\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right) &= \left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-1}\right) x^n\right]\left(\sum_{j=0}^{\infty} c_k x^k\right) \\
&= \sum_{s=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{s}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-1}\right) c_{s-n}\right] x^s = \sum_{s=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j+k=s} a_i b_j c_k\right) x^s \\
&= \sum_{s=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{s} a_{s-m}\left(\sum_{j=0}^{m} b_j c_{m-j}\right)\right] x^s \\
&= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x_i\right)\left[\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{m} b_j c_{m-j}\right) x^m\right] \\
&= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x_i\right)\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right)\right].
\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, hukum distributif dapat dibuktikan.

Selanjutnya pernyataan bahwa jika R komutatif maka demikian pula $R[x]$, dan jika R mempunyai elemen satuan 1, maka 1 juga merupakan elemen satuan untuk $R[x]$ dapat dilihat berdasarkan definisi perkalian di dalam $R[x]$.

Jika $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \neq 0 \in R[x]$, didefinisikan derajat dari f, yang dinotasikan dengan $\deg(f(x))$ sebagai berikut:

$$\deg(f(x)) = \text{maks}\{m : a_m \neq 0\}.$$

Oleh karena itu jika $n = \deg(f(x))$, maka dapat ditulis bahwa $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$. Selanjutnya didefinisikan $\deg(0) = -\infty$, dan untuk mempermudah dalam mencari rumus derajat, dianggap bahwa $-\infty < n$, $-\infty + n = -\infty$, dan $-\infty < n$, $-\infty + (-\infty) = -\infty$ untuk semua $n \in Z^+$, dan tidak didefinisikan operasi lain dengan $-\infty$. Suatu polinomial berderajat 1 disebut polinomial linier. Jika $f(x) \neq 0$ dan $\deg(f(x)) = n$, maka a_n disebut koefisien utama dari f, dan a_0 disebut bentuk konstan[?].

Teorema 3 *Diberikan R suatu gelanggang komutatif dan misalkan $f(x), g(x) \in R[x]$, maka*

1. $\deg(f(x) + g(x)) \leq$ *maks*$\{\deg(f(x)), \deg(g(x))\}$
2. $\deg(f(x) + g(x)) \leq \deg(f(x)) + \deg(g(x))$
3. *Kesamaan berlaku pada (2) jika koefisien utama dari $f(x)$ atau $g(x)$ bukan suatu pembagi nol. Dengan kata lain, kesamaan dipenuhi oleh (2) jika R adalah suatu daerah integral.*

Bukti. (1) cukup jelas, berdasarkan rumus jumlahan untuk polinomial. Untuk (2) dan (3), misalkan $\deg(f(x)) = n \leq 0$ dan $\deg(g(x)) = m \leq 0$, maka $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, dengan $a_n \neq 0$ dan $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ dengan $b_m \neq 0$, sehingga $f(x)g(x) = (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \cdots + a_n b_m x^{n+m}$, dengan $\deg(f(x)g(x)) \leq n + m$, dan $\deg(f(x)g(x)) = n + m$ jika dan hanya jika $a_n b_m \neq 0$, dengan kata lain a_n atau b_m bukan suatu pembagi nol di dalam R.

3 HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian 2 telah dibahas tentang himpunan polinomial-polinomial $R[x]$ dengan koefisien-koefisien di dalam gelanggang R, yang juga merupakan suatu gelanggang atas jumlahan dan perkalian polinomial. Derah integral merupakan sebuah gelanggang komutatif dengan penambahan syarat mempunyai elemen satuan dan tidak memuat pembagi no[3]. Untuk menunjukkan bahwa ternyata jika koefisien-koefisien di dalam himpunan polinomial-polinomial tersebut diambil dari suatu daerah integral, maka akan terbentuk suatu polinomial daerah integral cukup ditunjukkan bahwa $D[x]$ tidak memuat elemen pembagi nol. Hal ini tertuang di dalam teorema berikut:

Teorema 4 *Jika D suatu daerah integral, maka*

1. *$D[x]$ adalah suatu daerah integral, dan*
2. *Elemen satuan dari $D[x]$ juga merupakan elemen satuan dari D.*

Bukti:

1. Jika $f(x) \neq 0$ dan $g(x) \neq 0$, maka

$$\begin{aligned} &\deg(f(x)g(x)) \\ &\qquad = \deg(f(x)) + \deg(g(x)) \geq 0 > -\infty, \end{aligned}$$

sehingga diperoleh $f(x)g(x) \neq 0$ atau $f(x)$ dan $g(x)$ bukan pembagi nol di dalam $D[x]$.

2. Jika $f(x)g(x) = 1$ maka

$$\begin{aligned} \deg(f(x)g(x)) &= \deg(f(x)) + \deg(g(x)) \\ &= \deg(1) = 0, \end{aligned}$$

sehingga $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya adalah polinomial berderajat nol, yang merupakan elemen di dalam D. Oleh karena itu, terdapat elemen satuan di dalam $D[x]$, yang sekaligus merupakan elemen satuan di dalam D.

4 KESIMPULAN

Berdasarkan uraian pada hasil dan pembahasan, dapat diambil kesimpulan bahwa jika koefisien dari suatu himpunan polinomial diambil dari suatu daerah integral, maka himpunan polinomial tersebut memenuhi struktur daerah integral, yang disebut polinomial daerah integral.

Lebih lanjut dapat diselidiki struktur aljabar yang lebih khusus pada himpunan polinomial-polinomial, seperti struktur Lapangan (field).

DAFTAR PUSTAKA

[1] Fraleigh, J.B., 1993, *A Fisrt Course In Abstract Algebra*, Fifth Edition, Addisonwesley Publishing Company, USA

[2] Adkins, W.A. & S.H. Weintraub, 1992, *Algebrs an Approach via Module Theory*, Departmen of Mathematics Lousiana State University Baton Rouge, L.A.

[3] Lang, Serge, 1993, *Algebra*, Third Edition, Yale University, New Haven Connecticut