

Kajian Fungsi Nilai Mutlak dan Grafiknya

INDRAWATI DAN CINTA SEMBIRING

Jurusan Matematika FMIPA, Universitas Sriwijaya, Sumatera Selatan, Indonesia

INTISARI: Fungsi nilai mutlak adalah suatu fungsi yang aturannya memuat nilai mutlak. Nilai mutlak suatu bilangan real x , dinyatakan dengan $|x|$, didefinisikan sebagai

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

Fungsi ini merupakan fungsi khusus yang menarik, karena memiliki ciri khas yang berbeda dari fungsi lain terutama proses pencarian solusi dan penyajian yang berbentuk grafik. Fungsi nilai mutlak dapat diselesaikan dan digambar grafiknya dengan cara mengubah bentuk aturan fungsi nilai mutlak tersebut sehingga diperoleh suatu fungsi dengan banyak persamaan yang memenuhi daerah definisinya. Fungsi nilai mutlak memiliki limit di suatu titik namun tidak terdiferensialkan dititiktersebut, sehingga fungsi nilai mutlak tidak kontinu di titik tersebut.

KATA KUNCI: nilai mutlak, daerah definisi, grafik

ABSTRACT: Absolute value function is a function consisting absolute value. Absolute value of a real number x , denoted by $|x|$ is defined by

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

This function is an interesting special function. Since it has different characteristics rather than other functions especially solution finding process and describing its graph. Absolute value function can be solved and drawn its graph by changing the rule of that absolute value function so we can obtain a function having a lot of equation satisfying its domain. The absolute value function has limit at the point but differentiable so this function discontinue there.

KEYWORDS: absolute value, definition range, graph

E-MAIL: iin10juni@yahoo.com

Januari 2011

1 PENDAHULUAN

Pengetahuan tentang fungsi real dan berbagai sifatnya sangat membantu dalam mempelajari kalkulus. Kalkulus yang didasarkan pada sifat-sifat bilangan merupakan ilmu yang mempelajari perubahan dan pertumbuhan^[1]. Kalkulus diawali dengan studi mengenai fungsi, yang menyatakan hubungan khusus antar bilangan, misalkan harga suatu item merupakan fungsi permintaan untuk item tersebut, dimana hubungan ini dinyatakan sebagai himpunan pasangan terurut^[2].

Dari fungsi yang ada, fungsi nilai mutlak merupakan fungsi khusus yang menarik, karena memiliki ciri khas yang berbeda dari fungsi lain terutama proses pencarian solusi dan penyajian yang berbentuk grafik. Fungsi ini jarang sekali dikaji secara mendetail, sehingga sering ditemukan kesulitan pencarian solusi

yang berhubungan dengan fungsi nilai, padahal dalam kehidupan sehari-hari banyak masalah yang dapat dinyatakan dalam nilai mutlak seperti jarak, suhu, dan lain-lain. Dari hal tersebut, perlu dikaji fungsi nilai mutlak secara mendetail dan mendalam, agar setiap kasus yang berhubungan dengan fungsi tersebut dapat dipecahkan dan diperoleh solusi yang benar dan tepat.

Kenyataan bahwa fungsi-fungsi khusus dapat dicari solusinya secara mendetail dapat mempermudah pengkajian solusi fungsi-fungsi khusus yang tersedia pada studi kalkulus.

2 TINJAUAN PUSTAKA

Fungsi f adalah suatu aturan padanan yang menghubungkan tiap objek x dalam suatu himpunan, yang disebut daerah asal, dengan sebuah nilai unik $f(x)$

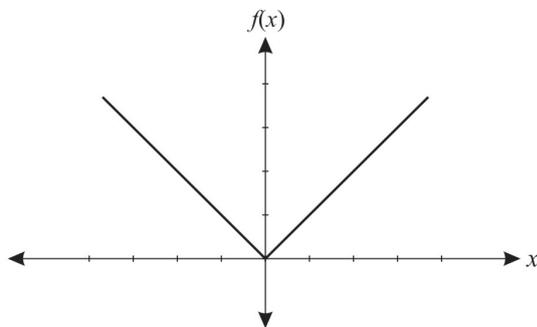
dari himpunan kedua. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut daerah hasil (jelaajah) fungsi tersebut^[3].

2.1 Definisi Fungsi Nilai Mutlak

Fungsi nilai mutlak adalah suatu fungsi yang aturannya memuat nilai mutlak. Nilai mutlak suatu bilangan real x , dinyatakan dengan $|x|$, didefinisikan sebagai

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

Misalkan $|5| = 5$, $|0| = 0$, dan $|-3| = 3$. Salah satu cara terbaik untuk membayangkan nilai mutlak adalah sebagai jarak (tak berarah). Khususnya, $|x|$ adalah jarak antara x dengan titik asal, demikian juga $|x - a|$ adalah jarak antara x dengan a . Grafik fungsi $f(x) = |x|$ ditunjukkan pada Gambar 1.



GAMBAR 1: Grafik $f(x) = |x|$

2.2 Sifat-Sifat Nilai Mutlak

Nilai mutlak berperilaku manis pada perkalian dan pembagian, tetapi tidak begitu baik dalam penambahan dan pengurangan, yaitu^[4]:

1. $|xy| = |x| |y|$
2. $|x/y| = |x|/|y|$
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (ketaksamaan segitiga)
4. $|x - y| \geq |x| - |y|$
5. $a|x| = |ax|$; a adalah konstanta.

3 PEMBAHASAN

3.1 Kekontinuan Fungsi Nilai Mutlak

Seperti halnya fungsi pada umumnya, dalam penentuan kekontinuan fungsi nilai mutlak harus dipenuhi syarat-syarat kekontinuan fungsi yaitu bahwa nilai fungsi tersebut harus sama dengan nilai limitnya. Dengan demikian dalam kekontinuan telah tercakup

masalah limit dan turunan. Jadi terlebih dahulu harus dibuktikan bahwa fungsi tersebut mempunyai limit dan terdiferensialkan.

Pada fungsi nilai mutlak, dalam penentuan limit dan turunannya fungsi tersebut harus diubah ke bentuk yang tidak memuat tanda nilai mutlak. Selanjutnya ditentukan limitnya (limit kiri harus sama dengan limit kanan) dan turunannya (turunan kiri harus sama dengan turunan kanan).

Berikut contoh masalah kekontinuan fungsi nilai mutlak.

Selidiki apakah fungsi $f(x) = |x|$ kontinu di titik 0?

Langkah pertama adalah menghilangkan tanda mutlak untuk $|x|$ sehingga fungsi $f(x)$ menjadi

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

Penentuan Limit:

Limit kanan: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ dan

Limit kiri: $\lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0$.

Dengan demikian limit kiri = limit kanan

Keterdiferensialan:

Turunan kanan fungsi f di titik 0 adalah

$$f'_+ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x - 0}{x} = 1.$$

Turunan kiri fungsi f di titik 0 adalah

$$f'_- = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{-x - 0} = \frac{x - 0}{x} = -1.$$

Karena turunan turunan kanan tiak sama dengan turunan fungsi, maka fungsi tersebut tidak memiliki turunan di titik 0. Dengan demikian fungsi tersebut tidak kontinu di titik 0.

3.2 Penggambaran Grafik Fungsi Nilai Mutlak

Dalam pencarian solusi dan penggambaran grafik fungsi nilai mutlak yang harus dilakukan adalah mengubah bentuk aturan fungsi nilai mutlak tersebut sehingga diperoleh suatu fungsi dengan banyak persamaan, selanjutnya menyelesaikan masing-masing persamaan tersebut berdasarkan aturan yang berlaku.

3.3 Mengubah Bentuk Aturan Fungsi Nilai Mutlak

Aturan fungsi nilai mutlak yang memuat tanda $| |$ diubah ke fungsi yang tidak memuat tanda nilai mutlak. Pengubahan ini dilakukan dengan cara mendefinisikan fungsi sesuai dengan aturan fungsi nilai mutlak. Pengubahan ini akan menghasilkan fungsi dengan banyak persamaan, dengan daerah definisinya masing-masing. Daerah definisinya terbagi atas beberapa himpunana yang saling terasing dan setiap himpunan bagiannya

berlaku aturan tersendiri. Selanjutnya dilakukan pemeriksaan terhadap daerah definisi tersebut. Untuk daerah definisi yang tidak memenuhi, mengkaitkan fungsi yang dihasilkan juga tidak memenuhi persamaan, sehingga tidak termasuk ke dalam fungsi hasil dari perubahan bentuk fungsi nilai mutlak.

3.4 Fungsi yang Memuat Tanda || dalam Operasi Aljabar

Ilustrasi $y = || + || - ||$

Pada ilustrasi di atas ditemukan tiga tanda || pada fungsi y yang memuat operasi penjumlahan dan pengurangan. Untuk mengubah aturan tanda nilai mutlak pada fungsi seperti ini yaitu dengan cara menghilangkan tanda nilai mutlak satu persatu secara bergiliran sehingga diperoleh fungsi y yang tidak memuat lagi tanda nilai mutlak.

3.5 Fungsi yang Memuat Tanda || dalam || (Bentuk |||)

Untuk mengubah aturan tanda nilai mutlak pada fungsi seperti ini yaitu dengan cara terlebih dahulu menghilangkan tanda nilai mutlak pada bagian dalam, selanjutnya menghilangkan tanda nilai mutlak pada bagian luar pada fungsi yang dimaksud.

3.6 Penentuan Titik-titik untuk Melukis Grafik

Setelah diperoleh beberapa fungsi yang memenuhi daerah definisinya, selanjutnya ditentukan titik titik untuk melukis grafiknya. Penentuan titik-titik ini dilakukan sesuai dengan aturan penggambaran grafik pada masing-masing fungsi yang diperoleh. Fungsi yang diperoleh dapat saja berupa fungsi linier ataupun fungsi kuadrat. Setelah diperoleh titik-titik untuk menggambar grafik, kemudian titik-titik tersebut dihubungkan sehingga terbentuk grafik yang berada dalam daerah definisi fungsi.

3.7 Contoh Soal

Ubahlah fungsi berikut ke bentuk yang tidak memuat tanda nilai mutlak serta gambarkan grafiknya.

1. $f(x) = 2|x| + |x - 1|$

Penyelesaian:

Langkah pertama, menghilangkan tanda mutlak untuk $|x|$ sehingga fungsi $f(x)$ berbentuk

$$f(x) = \begin{cases} 2x + |x - 1|, & x \geq 0 \\ -2x + |x - 1|, & x < 0 \end{cases}$$

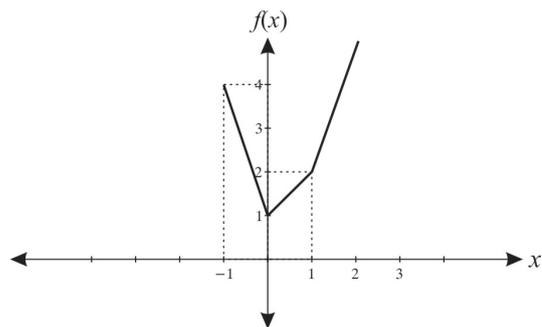
Selanjutnya menghilangkan tanda mutlak untuk $|x - 1|$, sehingga menghasilkan fungsi

$$f(x) = \begin{cases} 2x + (x - 1), & x \geq 0 \text{ dan } x - 1 \geq 0 \\ 2x - (x - 1), & x \geq 0 \text{ dan } x - 1 < 0 \\ -2x + (x - 1), & x < 0 \text{ dan } x - 1 \geq 0 \\ -2x - (x - 1), & x < 0 \text{ dan } x - 1 < 0 \end{cases}$$

Setelah disederhanakan dan dilakukan pemeriksaan terhadap daerah definisi fungsi, maka diperoleh tiga fungsi yang memenuhi persamaan, yaitu

$$f(x) = \begin{cases} -3x + 1, & x < 0 \\ x + 1, & 0 \leq x < 1 \\ 3x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Ketiga fungsi yang diperoleh, semuanya merupakan fungsi linier, sehingga penggambaran grafik dilakukan dengan cara mencari titik potong masing-masing fungsi terhadap sumbu-sumbu koordinatnya. Grafik fungsinya diberikan oleh Gambar 2.



GAMBAR 2: Grafik $f(x) = 2|x| + |x - 1|$

2. $f(x) = |2|x| + x^2|$

Penyelesaian:

Penghilangan tanda nilai mutlak pertama-tama dilakukan pada tanda mutlak bagian dalam yaitu $|x|$, sehingga diperoleh fungsi

$$f(x) = \begin{cases} |2x - x^2|, & x \geq 0 \\ |-2x - x^2|, & x < 0 \end{cases}$$

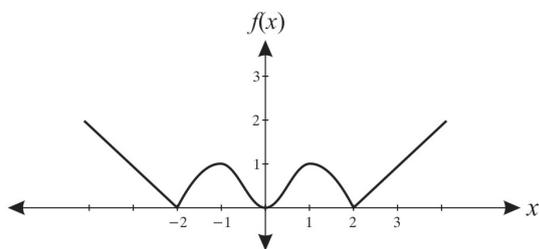
Selanjutnya menghilangkan tanda nilai mutlak pada masing-masing fungsi, sehingga menghasilkan fungsi

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & x \geq 0 \text{ dan } 2x - x^2 \geq 0 \\ x^2 - 2x, & x \geq 0 \text{ dan } x^2 - 2x < 0 \\ -2x - x^2, & x < 0 \text{ dan } -2x - x^2 \geq 0 \\ 2x + x^2, & x < 0 \text{ dan } 2x + x^2 < 0 \end{cases}$$

Setelah disederhanakan dan dilakukan pemeriksaan terhadap daerah definisi fungsi, maka diperoleh empat fungsi yang memenuhi persamaan, yaitu

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 2x, & x \geq 2 \\ -2x - x^2, & -2 \leq x < 0 \\ 2x + x^2, & x < -2 \end{cases} .$$

Keempat fungsi yang diperoleh, semuanya merupakan fungsi kuadrat, sehingga penggambaran grafik dilakukan dengan cara mencari titik potong masing-masing fungsi terhadap sumbu-sumbu koordinatnya, menentukan sumbu simetri, titik puncak, dan beberapa titik lain yang dianggap perlu. Grafiknya diberikan oleh Gambar 3.



GAMBAR 3: Grafik $f(x) = |2|x| + x^2|$

4 SIMPULAN

Fungsi nilai mutlak dapat diselesaikan dan digambar grafiknya dengan cara mengubah bentuk aturan fungsi nilai mutlak tersebut sehingga diperoleh suatu fungsi dengan banyak persamaan yang memenuhi daerah definisinya. Fungsi nilai mutlak memiliki limit di suatu titik namun tidak terdiferensialkan di titik tersebut, sehingga nilai mutlak tidak kontinu di titik tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Graham, R.L., D.E. Knuth, and O. Patashnik, 1989, *Concrete Mathematics*, Addison-Wisley Publishing Company, Massachusetts
- [2] Lipschutz, S. and M.L. Lipson, 2001, *Matematika Diskrit*, Terjemahan oleh Tim Editor, Penerbit Salemba Teknika, Salemba Teknika, Jakarta
- [3] Purcell, E.J. and D. Varberg, 1995, *Kalkulus dan Geometri Analitis*, Jilid I Edisi Kelima, Penerbit Erlangga, Jakarta
- [4] Martono, K., 1990, *Seri Matematika Teori, Soal Jawab dan Pembahasan Kalkulus Sistem Bilangan Real dan Fungsi*, Jilid 1, Penerbit ITB, Bandung