

# Ring Reguler yang Memenuhi Sifat *Stable Range One*

EVI YULIZA

Jurusan Matematika FMIPA, Universitas Sriwijaya, Sumatera Selatan, Indonesia

**INTISARI:** Suatu ring  $R$  dikatakan ring reguler apabila untuk setiap  $x$  di  $R$  terdapat  $y$  di  $R$  sehingga  $x = xyx$ . Suatu ring  $R$  dikatakan memenuhi sifat *stable range one* apabila kondisi berikut dipenuhi yaitu: jika  $aR + bR = R$  maka terdapat suatu  $y \in R$  sehingga  $a + by \in U(R)$  dengan  $U(R)$  adalah himpunan semua unit dalam  $R$ . Suatu ring  $R$  dikatakan unit reguler apabila untuk setiap  $x \in R$  terdapat suatu unit  $u \in R$  sehingga  $xux = x$ . Penelitian ini akan menunjukkan bahwa ring reguler yang memenuhi sifat *stable range one* adalah unit reguler.

**KATA KUNCI:** ring reguler, *stable range one*, unit reguler

**ABSTRACT:** Ring  $R$  is said to be ring regular if given any  $x$  at  $R$  there exist  $y$  at  $R$  such that  $x = xyx$ . A ring  $R$  is stable range one if condition next filled that is: if  $aR + bR = R$  there exist  $y \in R$  such that  $a + by \in U(R)$  with  $U(R)$  collection all units in  $R$ . A ring  $R$  is said to be unit regular if any  $x \in R$  there exist a unit  $u \in R$  such that  $xux = x$ . The research will show that ring regular that fulfil character stable range one regular unit.

**KEYWORDS:** ring regular, stable range one, regular unit

September 2010

## 1 PENDAHULUAN

Dalam penelitian ini, ring  $R$  dianggap asosiatif dengan elemen identitas. Suatu ring  $R$  dikatakan memenuhi sifat *stable range one* apabila kondisi berikut dipenuhi yaitu: jika  $aR + bR = R$  maka terdapat suatu  $y \in R$  sehingga  $a + by \in U(R)$  dengan  $U(R)$  adalah himpunan semua unit dalam  $R$ . Beberapa peneliti telah menyelidiki ring yang memenuhi sifat *stable range one*, diantaranya adalah Chen<sup>[1]</sup>, Chen dan Chin<sup>[2]</sup>, serta Goodearl dan Menal<sup>[3]</sup>.

Suatu ring  $R$  dikatakan ring reguler apabila untuk setiap  $x$  di  $R$  terdapat  $y$  di  $R$  sehingga  $x = xyx$ . Keterkaitan antara ring reguler  $R$  dengan sifat *stable range one* dikemukakan oleh Chen<sup>[4,5]</sup>. Berdasarkan keterkaitan tersebut akan diselidiki ring reguler  $R$  yang memenuhi sifat *stable range one*.

Goodearl<sup>[6]</sup> menyelidiki keterkaitan antara ring reguler yang memenuhi sifat *stable range one* dengan unit reguler, yaitu: Jika  $R$  ring reguler memenuhi sifat *stable range one* maka  $R$  merupakan unit ring reguler. Suatu ring  $R$  dikatakan unit reguler apabila untuk setiap  $x \in R$  terdapat suatu unit  $u \in R$  sehingga  $xux = x$ . Selanjutnya, Chen dan Chin memberikan bukti yang lain yang menunjukkan keterkaitan antara ring reguler yang memenuhi sifat *stable range one* dengan unit reguler. Penelitian ini bermaksud memberikan bukti yang lebih sederhana dan mendasar.

## 2 LANDASAN TEORI

Penelitian ini merupakan hasil bedah jurnal (kaji ulang) khususnya artikel penelitian yang dilakukan oleh Chen dan Chin. Banyak pembuktian pada jurnal tersebut yang belum lengkap dan tidak tertulis secara rinci sehingga penulis berusaha untuk memahami dan mengkaji lebih rinci. Penulis berusaha menyusun kembali artikel-artikel yang berhubungan dengan ring reguler yang memenuhi sifat *stable range one* sehingga diharapkan penelitian ini dapat menghasilkan tulisan yang komprehensif dan sistematis.

### 2.1 Ring Reguler

**Definisi 1** Misalkan  $R$  ring dengan elemen satuan. Suatu elemen  $u \in R$  disebut unit di  $R$  jika  $u$  mempunyai invers di  $R$  terhadap perkalian, yaitu:  $(\exists u^{-1})u \cdot u^{-1} = u^{-1} \cdot u = 1$ . Jika setiap elemen tak nol di  $R$  merupakan unit maka  $R$  disebut ring division. Suatu ring  $R$  disebut ring Boolean apabila  $a^2 = a$  untuk setiap  $a \in R$ <sup>[7]</sup>.

**Definisi 2** Elemen  $x$  di suatu ring  $R$  disebut elemen idempoten apabila memenuhi  $x^2 = x$ <sup>[8]</sup>.

Jelas bahwa jika  $R$  ring dengan elemen satuan maka 1 merupakan elemen idempoten. Jika  $e$  dan  $f$  adalah elemen-elemen idempoten di ring  $R$  maka  $e$  dan  $f$  dikatakan idempoten orthogonal apabila  $ef = 0 = fe$ .

**Definisi 3** Suatu ring  $R$  disebut ring reguler (Von Neumann) jika untuk setiap  $x \in R$  terdapat  $y \in R$  sedemikian hingga  $x = xyx$ <sup>[3]</sup>.

**Contoh 1** Sebarang ring division adalah reguler, sebab: jika diambil sebarang  $x \in R$  maka terdapat  $y \in R$  sehingga  $xy = 1$ . Akibatnya,  $xyx = (xy)x = 1 \cdot x = x$ .

**Definisi 4** Suatu ring  $R$  dikatakan memenuhi sifat *stable range one*, jika untuk setiap  $a, b \in R$  memenuhi  $aR + bR = R$  maka terdapat  $y \in R$  sehingga  $a + by \in U(R)$ <sup>[4]</sup>.

Di sini himpunan  $U(R)$  didefinisikan sebagai berikut<sup>[6]</sup>:

$$U(R) = \{x \in R | (\exists u \in R) xu = 1\}.$$

## 2.2 Ring Unit Reguler

**Definisi 5** Suatu ring  $R$  disebut unit reguler apabila untuk setiap  $x \in R$  terdapat unit  $u \in R$  (elemen invertibel) sehingga  $xux = x$ <sup>[6]</sup>.

**Contoh 2** Sebarang ring division adalah unit reguler, sebab jika diambil sebarang  $x \in R$  maka terdapat unit  $u \in R$  sehingga  $ux = 1$ . Akibatnya,  $xux = x \cdot 1 = x$ .

**Teorema 1** Jika suatu ring reguler  $R$  mempunyai sifat *stable range one* maka  $R$  merupakan ring unit reguler<sup>[6]</sup>.

**Bukti:** Ambil sebarang  $a \in R$ . Mengingat  $R$  reguler, maka terdapat  $x \in R$  sehingga  $axa = a$ . Sementara itu,  $aR + (1 - ax)R = R$  maka terdapat  $y \in R$  sehingga  $a + (1 - ax)y \in U(R)$ . Akibatnya, terdapat unit  $u \in R$  sehingga  $[a + (1 - ax)y]u = 1$ . Dari sini diperoleh,

$$\begin{aligned} a &= axa = ax1a \\ &= ax[a + (1 - ax)y]ua \\ &= ax(a + (y - axy))ua \\ &= (axa + axy - axaxy)ua \\ &= (axa + axy - axy)ua \\ &= (axa)ua = aua. \end{aligned}$$

Jadi,  $R$  merupakan ring unit reguler.  $\square$

**Lemma 1** Jika  $R$  ring reguler sehingga untuk setiap  $x, y \in R$  terdapat unit  $u \in R$  sehingga  $x - u$  dan  $y - u^{-1}$  kedua-duanya unit di  $R$  maka  $R$  merupakan ring unit reguler<sup>[3]</sup>.

**Bukti:** Ambil sebarang  $x \in R$ , maka terdapat  $y \in R$  sehingga  $xyx = x$  dan terdapat unit  $u \in R$  sehingga  $x - u$  dan  $y - u^{-1}$  kedua-duanya unit. Selanjutnya,  $xy(x - u) = xyx - xyu = x(u^{-1} - y)u$ . Akibatnya,  $x(u^{-1} - y)u(x - u^{-1})x = xy(x - u)(x - u)^{-1}x = xy \cdot 1 \cdot x = xyx = x$ . Karena  $(u^{-1} - y)u(x - u)^{-1}$  merupakan unit maka  $R$  merupakan ring unit reguler.  $\square$

## 3 PEMBAHASAN

Telah ditunjukkan bahwa jika suatu ring reguler  $R$  mempunyai sifat *stable range one* maka ring reguler adalah unit reguler. Berikut ini akan diselidiki keterkaitan antara ring reguler  $R$  yang mempunyai sifat *stable range one* dengan unit reguler.

**Proposisi 1** Suatu ring  $R$  mempunyai sifat *stablerangeone* jika dan hanya jika untuk suatu  $a, x, b \in R$  memenuhi  $ax + b = 1$ , terdapat  $y \in R$  sedemikian hingga  $a + by$  adalah invertibel.

**Bukti:**

( $\Rightarrow$ ) Diketahui bahwa  $R$  mempunyai sifat *stable range one* dan ambil  $a, x, b \in R$  memenuhi  $ax + b = 1$ . Maka  $aR + bR = R$  dan menurut yang diketahui bahwa terdapat  $y \in R$  sedemikian hingga  $a + by$  adalah invertibel. Hal ini juga berlaku untuk  $a + by$  adalah invertibel kiri.

( $\Leftarrow$ ) Diketahui untuk suatu  $a, x, b \in R$  memenuhi  $ax + b = 1$  sehingga  $aR + bR = R$ , terdapat  $y \in R$  sedemikian hingga  $a + by$  adalah invertibel yang berarti  $a + by \in U(R)$ . Dengan demikian ring  $R$  mempunyai sifat *stable range one*.  $\square$

**Proposisi 2** Misalkan  $R$  suatu ring, maka  $R$  adalah unit reguler. Jika  $R$  adalah unit reguler maka setiap elemen di  $R$  adalah hasil kali dari suatu idempoten dan elemen invertibel (tidak perlu komutatif).

**Bukti:** Diketahui  $R$  adalah unit reguler. Ambil sebarang  $x \in R$  maka terdapat unit  $u \in R$  sehingga  $ux = 1$ . Selanjutnya,

$$\begin{aligned} 1x &= x \\ (ux)x &= x \\ ux2 &= x \end{aligned}$$

Hal ini berakibat  $x$  adalah elemen idempoten dan  $u$  adalah elemen invertibel. Jadi, untuk setiap  $x \in R$  berlaku  $x = eu$  untuk suatu elemen idempoten  $e \in R$  dan elemen invertibel.  $\square$

**Teorema 2** Suatu ring reguler  $R$  yang mempunyai sifat *stablerangeone* jika dan hanya jika ring reguler adalah unit reguler.

**Bukti:**

( $\Rightarrow$ ) Diasumsikan bahwa  $R$  mempunyai sifat *stable range one* dan ambil  $a \in R$ . Karena  $R$  adalah reguler, maka terdapat  $x \in R$  sedemikian hingga  $axa = a$ . Jelas,  $ax + (1 - ax) = 1$ . Berdasarkan asumsi dan Preposisi 1, maka terdapat  $y \in R$  sedemikian hingga  $u = a + (a - ax)y = 1$  adalah invertibel. Dengan demikian,  $axu = ax[a + (1 - ax)y] = axa = a$ . Ini berarti  $ax = au^{-1}$  sehingga  $ax = au^{-1}a = axa = a$ .

( $\Leftarrow$ ) Diasumsikan bahwa  $R$  adalah unit reguler dan andaikan bahwa  $ax + b = 1$  untuk suatu  $a, x, b \in R$ . Berdasarkan Proposisi 2, diperoleh  $a = eu$ ,  $b = gv$  untuk suatu elemen idempoten  $e, g \in R$  dan untuk suatu elemen invertibel  $u, v \in R$ . Diperoleh,

$$\begin{aligned} e(ux + b) + (1 - e)gv &= eux + eb + (1 - e)b \\ &= ax + b \\ &= 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Karena  $R$  reguler, maka terdapat  $c \in R$  sedemikian hingga  $(1 - e)g = (1 - e)gc(1 - e)g$ . Misalkan  $f = (1 - e)gc(1 - e)$ . Berdasarkan pers.(1) diperoleh,

$$\begin{aligned} e(ux + b) + fb &= e(ux + b) + (1 - e)gc(1 - e)gv \\ &= 1 - (1 - e)gv + (1 - e)gv \\ &= 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Catatan bahwa  $0 = feux = fax = f(1 - b)$ , sehingga  $fb = f$ . Selanjutnya, diperoleh  $e = e1 = e(ax + b) = e(ux + b)$ . Jadi ,

$$e + f = e(ux + b) + fb = 1. \quad (3)$$

Jelas bahwa  $1 + ebv^{-1}c(1 - e)$  adalah invertibel dengan invers  $1 - ebv^{-1}c(1 - e)$ . Karena  $e + f = 1$  diperoleh  $e + (1 - e)gc(1 - e) = 1$  sehingga  $e + (1 - e)gvc(1 - e) = 1$ . Tetapi, karena  $b = gv$  diperoleh  $e + (1 - e)bv^{-1}c(1 - e) = 1$  dan oleh karena itu,

$$e + bv^{-1}c(1 - e) = 1 + ebv^{-1}c(1 - e) \quad (4)$$

Karena  $(1 - e)e = 0$ , dapat tulis

$$\begin{aligned} e + bv^{-1}c(1 - e)[1 + ebv^{-1}c(1 - e)] \\ = 1 + ebv^{-1}c(1 - e). \end{aligned} \quad (5)$$

Kalikan pada sisi kanan dengan  $u$  dan catat bahwa  $eu = a$ , diperoleh

$$\begin{aligned} a + bv^{-1}c(1 - e)[1 + ebv^{-1}c(1 - e)]u \\ = [1 + ebv^{-1}c(1 - e)]u \end{aligned} \quad (6)$$

adalah invertibel. Berdasarkan Proposisi 1 diperoleh bahwa  $R$  mempunyai sifat *stable range one*.  $\square$

#### 4 KESIMPULAN

Syarat perlu ring reguler  $R$  mempunyai sifat *stable range one* apabila ring reguler adalah unit reguler sedangkan ring reguler  $R$  adalah unit reguler merupakan syarat cukup ring reguler  $R$  mempunyai sifat *stable range one*.

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1] Chen, H., 2001, Regular Rings with Finite Stable Range, *Comm. Algebra*, (29), 157 - 166
- [2] Chen, H., A.Y.M. Chin, 2002, A Note On Regulars Rings With A Stable Range One, *IJMMS.Hindawi.Com*, (31:7), 449 - 450
- [3] Goodearl, K.R., P. Menal, 1988, Stable Range One for Rings with Many Units, *J. Pure Applic. Algebra*, (54), 261 - 287
- [4] Chen, H., 2000, On Generalized Stable Rings, *Comm. Algebra*, (28), 1907 - 1917
- [5] Chen, H., 2003, Generalized Stable Regular Rings, *Comm. Algebra*, (31), 4899 - 4910
- [6] Goodearl, K.R., 1991, *Von Neumann Regular Rings*, 2nd edition, Malabar, Florida, Krieger
- [7] Fraleigh, J.B., 2000, *A First Course in Abstract Algebra*, 6th edition
- [8] Bhattacharya, P.B., S.K. Jain, dan S.R. Nagpaul, 1994, *Basic Abstract Algebra*, 2nd edition