Kajian Struktur Aljabar Grup pada Himpunan Matriks yang Invertibel

NOVI RUSTIANA DEWI, NING ELIYATI, DAN OKTAVIANUS HASIHOLAN MARBUN
Jurusan Matematika FMIPA, Universitas Sriwijaya, Sumatera Selatan, Indonesia

INTISARI: Secara umum, himpunan $\mathbf{M}_{m,n}(\Re)$ semua matriks $m \times n$ dengan operasi penjumlahan matriks merupakan sebuah Grup, namun himpunan $\mathbf{M}_{n,n}(\Re)$ semua matriks $n \times n$ dengan operasi perkalian matriks bukanlah sebuah grup, karena matriks $n \times n$ yang semua entrinya nol tidak mempunyai invers. Dalam karya ilmiah ini akan dikaji bentuk himpunan semua matriks $n \times n$ yang invertibel yang memenuhi struktur Grup terhadap operasi perkalian, bahkan masih dapat dibentuk suatu subhimpunan yang juga merupakan Grup terhadap operasi perkalian matriks yang sekaligus merupakan subgrup dari himpunan matriks yang invertibel tersebut.

KATA KUNCI: grup, subgrup, himpunan matriks invertibel

Januari 2011

1 PENDAHULUAN

Matriks merupakan kumpulan elemen yang disusun menurut baris dan kolom sehingga berbentuk empat persegi panjang, yang panjang dan lebarnya ditunjukkan oleh banyaknya kolom dan baris [1]. Matriks dapat dikelompokan sebagai suatu himpunan berdasarkan suatu karakter tertentu dan jenis entri yang tertentu pula. Secara umum, notasi $\mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{k})$ menggambarkan matriks berukuran $m \times n$ yang entrinya berada di dalam lapangan (*field*) $\mathbf{k}$. $\mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{k})$ merupakan ruang vektor berdimensi $\mathbf{k}$ dengan operasi biner jumlahan dan perkalian dengan skalar, sehingga lebih lanjut dapat diselidiki sifat apa saja yang berlaku pada himpunan matriks tersebut berdasarkan karakter, lapangan yang entri matriksnya berasal serta operasi biner yang berlaku pada matriks tersebut. Dari uraian di atas akan dikaji keberlakuan aksioma grup dan subgrup pada himpunan matriks yang mempunyai invers (*invertible*).

Karya ilmiah ini bertujuan untuk membuktikan keberlakuan syarat-syarat grup pada suatu himpunan matriks yang invertibel dan mengkaji bentuk himpunan bagiannya yang juga merupakan grup terhadap operasi perkalian matriks yang sekaligus merupakan subgrup dari himpunan matriks-matriks yang invertibel.

2 TINJAUAN PUSTAKA

Menurut Baker [3] jika diberikan $\mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{k})$ himpunan matriks berukuran $m \times n$ yang entrinya berada di dalam Lapangan $\mathbf{k}$, selanjutnya dinotasikan entri (i, j) suatu matriks A berukuran $m \times n$ dengan A_{ij} atau a_{ij} dan

$$A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya digunakan notasi khusus: $\mathbf{M}_n(\mathbf{k}) = \mathbf{M}_{n,n}(\mathbf{k}), \mathbf{k}^n = \mathbf{M}_{n,l}(\mathbf{k})\mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{k})$ merupakan suatu ruang vektor-$\mathbf{k}$ dengan operasi matriks jumlahan dan perkalian dengan skalar. Vektor nol adalah matriks nol $\mathbf{O}_{m,n}$ yang biasa dinotasikan dengan $\mathbf{O}$ saja. Berikut ini diberikan beberapa definisi dan teorema yang berkaitan dengan pengkajian grup pada himpunan matriks yang invertibel, diawali dengan beberapa definisi dan sifat matriks bujur sangkar.

Definisi 1 *Matriks bujur sangkar (square matrix) merupakan matirks yang jumlah baris dan kolomnya sama yang dinotasikan dengan matriks* $A_{n,n} = A_n$ [1]

Teorema 1 *Jika A dan B adalah matriks bujur sangkar dengan ordo yang sama, maka* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ [1].

Teorema 2 *Jika A sebuah matriks yang mempunyai invers maka* $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, adj(A)$ [1].

Definisi 2 *Matriks identitas disebut juga matriks satuan, yang dilambangkan dengan "I", merupakan matriks bujus sangkar yang semua unsur diagonal utamanya sama dengan 1, dan semua unsur lainnya sama dengan 0* [1].

Berikut ini diberikan definisi struktur aljabar grup dan beberapa sifat grup dan subgrup.

Definisi 3 *Diberikan G himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner "$*$". Himpunan G dikatakan grup jika memenuhi aksioma berikut:*

(i) *Bersifat tertutup yaitu untuk setiap $a, b \in G$ maka $a * b \in G$.*

(ii) *Bersifat asosiatif untuk setiap $a, b, c, \in G$ maka $(a * b) * c = a(b * c)$*

(iii) *Terdapat $e \in G$ sedemikian sehingga untuk setiap $a \in G$ berlaku $e * a = a * e = a$(terdapat elemen netral $e \in G$).*

(iv) *Untuk setiap $a \in G$ terdapat invers tunggal $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$* [4].

Definisi 4 *Jika suatu himpunan bagian H dari suatu grup G tertutup di bawah operasi biner pada G dan jika H sendiri adalah suatu grup, maka H merupakan suatu subgrup dari G. Selanjutnya notasi $H \leq G$ atau $G \geq H$ menyatakan bahwa H merupakan suatu subgrup dari G, dan $H < G$ berarti $H \leq G$ tetapi $H \neq G$* [5].

Teorema 3 *Misalkan G adalah suatu grup dan himpunan tak kosong H subgrup dari G, maka pernyataan berikut ekivalen:*

(i) *Untuk setiap $a, b, \in H$, berlaku $ab \in H$ dan $a^{-1} \in H$*

(ii) *Untuk setiap $a, b, \in H$, berlaku $ab^{-1} \in H$* [1].

3 HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan uraian pada tinjauan pustaka, himpunan matriks bujur sangkar berukuran nxn atas lapangan $\mathbf{k}$ dinotasikan dengan $\mathbf{M}_n(\mathbf{k})$. Berikut diberikan sifat himpunan $\mathbf{M}_n(\mathbf{k})$ yang berkaitan dengan fungsi determinan.

Preposisi 1 *Fungsi determinan det: $\mathbf{M}_n(\mathbf{k}) \to \mathbf{k}$ mempunyai sifat berikut:*

(i) *Untuk $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbf{k})$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.*

(ii) $\det(I_n) = 1$.

(iii) *$A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{k})$ invertibel jika dan hanya jika det $(A) \neq 0$.*

Berdasarkan preposisi 1, selanjutnya digunakan notasi

$$\mathbf{GL}_n(\mathbf{k}) = \{A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{k}) : \det(A) \neq 0\}$$

untuk himpunan matriks $n \times n$ yang invertibel. Demikian juga himpunan unit dari ring $\mathbf{M}_n(\mathbf{k})$ dinotasikan sebagai berikut:

$$\mathbf{SL}_n(\mathbf{k}) = \{A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{k}) : \det(A) = 1\} \subseteq \mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$$

untuk himpunan matriks unimodular nxn.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$ merupakan grup terhadap operasi perkalian matriks. Berdasarkan definisi 3, akan dibuktikan bahwa $\mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$ terhadap operasi perkalian matriks memenuhi 4 aksioma grup, yaitu:

(i) Bersifat tertutup.
Jika untuk setiap $A_n, B_n \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$, maka $A_n, B_n \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$ dikatakan bersifat tertutup (sesuai dengan penggantian operasi "$*$" menjadi "$\cdot$")

Bukti:

Jika $A_n, B_n, \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$, maka $A_n, B_n = C_n$ untuk suatu $C = A \times B$ atau hasil kali A dan B berordo n. Selanjutnya, karena $A_n, B_n, \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$, maka $\det(A) \neq 0$ dan $\det(B) \neq 0$(berdasarkan definisi $\mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$).

Berdasarkan Preposisi 1, $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$, di mana $\det(A) \neq 0$ dan $\det(B) \neq 0$, jadi diperoleh $\det(AB) \neq 0$ Sehingga $A_n \times B_n \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$. (terbukti).

(ii) Bersifat Asosiatif
Jika untuk setiap $A_n \times B_n \times C_n \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$, maka $(A_n \times B_n) \times C_n = A_n(B_n)$ dikatakan bersifat asosiatif (menurut definisi 3 bagian (ii)).

Bukti:

Jika $A_n \times B_n \times C_n$ maka

$$\begin{aligned}
[(AB)C]_{ij} &= \sum_{i=1}^{n} [AB]_{ij} C_{ij} \\
&= \sum_{ij}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} \right) c_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} c_{ij} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{ij} c_{ij} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij} c_{ij} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} [BC]_{ij} \\
&= [A(BC)]_{ij} \quad \text{(terbukti)}
\end{aligned}$$

(iii) Untuk setiap $A_n \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$, terdapat matriks identitas $I_n \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$ sehingga $I_n \times A_n = A_n \times I_n = A_n$ (menurut definisi 3 bagian (iii)).

Bukti:

Berdasarkan Definisi 2 maktriks identitas adalah matriks bujur sangkar yang semua unsur diagonal utamanya sama dengan 1, dan semua unsur lainnya sama dengan nol. Secara umum matriks identitas dapat ditulis sebagai berikut:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dan $\det(I_n) = 1 \neq 0$ atau $I_n \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$. Berdasarkan sifat matriks identitas : $(IA)_{ij} = (AI)_{ij} = A_{ij}$ maka syarat terpenuhi. (terbukti)

(iv) Untuk setiap $A_n \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$ terdapat matriks invers tunggal yang dinotasikan $A^{-1} \in \mathbf{M}$, sedemikian rupa sehingga $A^{-1} \times A_n = A_n \times A^{-1} = I_n$ (pada definisi 3 bagian (iv))

Bukti:

Berdasarkan Teorema 2,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \, adj(A)$$

Karena det $(A) \neq 0$, maka matriks A dijamin akan mempunyai invers A^{-1} yang determinannya juga tidak sama dengan nol. Dengan kata lain, untuk setiap matriks $A_n \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$ selalu terdapat $A^{-1} \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$ sehingga $A^{-1}A_n = A_nA^{-1} = I_n$ (terbukti).

Berdasarkan pembuktian aksioma-aksioma (i), (ii), (iii), (iv) maka himpunan matriks $\mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$ dengan operasi perkalian atau dapat sinotasikan dengan $\langle \mathbf{GL}_n(\mathbf{k}) \rangle$ merupakan grup.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa himpunan matriks-matriks unimodular nxn $\mathbf{SL}_n(\mathbf{k}) \leq \mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$, yaitu $\mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$ merupakan suatu subgrup dari $\mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$. Pembuktian menggunakan Teorema 3, yaitu $\mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$ merupakan suatu subgrup dari $\mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$ jika pernyataan berikut ini ekuivalen:

(i) untuk setiap $A_n \times B_n \in \mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$ berlaku $A_n \times B_n \in \mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$ dan $A_n^{-1} \in \mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$.

(ii) untuk setiap $A_n \times B_n \in \mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$ berlaku $A_nB_n^{-1} \in \mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$.

Bukti:

(i) ($\Rightarrow$) Untuk sebarang $A_n \times B_n \in \mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$ berlaku $\det(A_n) = 1$ dan $\det(B_n) = 1$, sehingga

$$\det(A_nB_n) = \det(A_n) \cdot \det(B_n) = 1 \times 1 = 1.$$

Dengan kata lain diperoleh $A_nB_n \in \mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$. Demikian pula, karena $\det(A_n^{-1}) = 1$ maka $\det(A_n^{-1}) = 1$ sehingga diperoleh $A_n^{-1} \in \mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$.

($\Leftarrow$) Diketahui untuk setiap $A_n \times B_n \in \mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$ berlaku $A_n \times B_n \in \mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$ dan $A_n^{-1} \in \mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$ subgrup dari $\mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$. Karena $\mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$ merupakan subset dari $\mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$ maka $\mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$ juga merupakan himpunan matriks yang invertibel, jadi $\mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$ pasti akan memenuhi semua aksioma grup.

(ii) Diketahui bahwa untuk setiap $A_n \times B_n \in \mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$, maka berlaku $A_nB_n^{-1} \in \mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$ sehingga apabila $A_n \in \mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$ maka $A_nA^{-1} = I_n \in \mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$. Kemudian jika $I_n, A_n \in \mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$ maka $I_nA^{-1} \in \mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$ dan berlaku juga untuk $B_n \in \mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$ maka $B^{-1} \in \mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$. Dengan demikian untuk setiap $A_n, B_n \in \mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$, berlaku $A_nB^{-1} \in \mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$ sehingga $A_n(B^{-1})^{-1} = A_nB_n \in \mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$) atau $(B^{-1})^{-1} = B_n \in \mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$, untuk setiap $B_n \in \mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$ dan $\mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$ subgrup dari $\mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$.

4 KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Suatu himpunan matriks yang invertibel $\mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$ dengan operasi biner perkalian merupakan suatu grup.

2. Suatu himpunan bagian $\mathbf{SL}_n(\mathbf{k})$ dari $\mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$ yang merupakan himpunan matriks-matriks yang determinannya 1 merupakan subgrup dari $\mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Arifin, A., 2000, *Aljabar*, Institut Tehnik Bandung, Bandung

[2] Anton, H., 1994, *Elementary Linear Algebra*, Jhon Wiley and Sons, New York

[3] Baker, A., 2006, *Matrix Group an Introduction to Lie Group Theory*, Springer Verlag, London

[4] Ledermann, W., 1973, *Introduction to Group Theory*, Longman Scientific and Technical, England

[5] Fraleigh, J.B., 1993, *A Fisrt Course In Abstract Algebra*, Fifth Edition, Addisonwesley Publishing Company, USA