Jurnal Penelitian Sains ; hal 38 - 51
No.8. Oktober 2000 ISSN: 1410-7058

PROSES STOKASTIK KELAHIRAN-KEMATIAN MURNI

Eddy Roflin
Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Sriwijaya

ABSTRAK

Proses stokastik yang banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari adalah proses dengan ruang keadaan diskrit dan waktu kontinyu. Secara matematik proses seperti ini dinyatakan oleh proses Poisson yang sering pula disebut proses cacah. Salah satu perluasan dari proses Poisson adalah proses kelahiran murni (pure birth process) dimana kejadian pada waktu tertentu bergantung pada banyaknya kejadian pada waktu sebelumnya. Kebalikan dari proses kelahiran murni ini adalah proses kematian murni (pure death process), sedangkan gabungan dari kedua proses ini disebut dengan proses kelahiran-kematian murni (pure birth-death processes). Apabila proses tersebut memenuhi syarat linieritas, maka proses-proses itu disebut dengan proses Yule-Furry.Setiap individu dapat dibedakan menurut jenis kelaminnya, yaitu wanita dan laki-laki. Oleh karena itu, pada makalah ini dibahas proses stokastik kelahiran - kematian murni dengan dua jenis kelamin pada proses Yule-Furry Proses stokastik ini meliputi empat peristiwa yaitu terjadinya kelahiran wanita, kelahiran laki-laki, kematian wanita dan kematian laki-laki, sehingga diperoleh model proses Poisson dengan empat peristiwa tersebut.

1. Pendahuluan

Proses stokastik adalah himpunan variabel acak yang merupakan fungsi *waktu* atau *ruang*), yang sering pula disebut dengan *proses acak*, (Praptono, 1986). Proses stokastik dengan ruang state diskrit dan waktu kontinyu merupakan perkembangan atau perluasan dari proses stokastik dengan ruang state diskrit dan waktu diskrit. Proses stokastik dengan ruang state diskrit dan waktu kontinyu merupakan model matematik yang banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari. Secara matematik, bentuk yang seperti ini di antaranya adalah *proses Poisson*.

Proses stokastik dengan waktu kontinyu mempunyai ruang state diskrit atau kontinyu. Seandainya X(t) menyatakan banyaknya panggilan pada satu alat telepon dalam interval waktu (0,t]. Banyaknya variabel acak X(t) adalah kontinyu, tetapi ruang sate X(t) diskrit, proses stokastik X(t)

= 0,1,2,... dikatakan mempunyai waktu kontinyu dengan ruang state diskrit. Misalkan Z(t) menyatakan temperatur maksimum suatu tempat pada interval waktu (0,t]. Proses stokastik Z(t) ini mempunyai waktu kontinyu dengan ruang state yang kontinyu pula.

Proses stokastik dapat digolongkan menjadi 4 (empat) macam proses, (Cox and Miller, 1987), yaitu proses stokastik dengan:

a. Waktu diskrit dan ruang state diskrit.
b. Waktu diskrit dan ruang state kontinyu.
c. Waktu kontinyu dan ruang state diskrit.
d. Waktu kontinyu dan ruang state kontinyu.

Keempat macam proses stokastik tersebut semuanya dapat dinyatakan dengan $\{X(t), t \in T\}$, dalam hal waktu diskrit biasanya digunakan parameter n, sehingga ditulis $\{X_n, n = 0,1,2,...\}$.

2. Proses Kelahiran Murni (Pure Birth Process)

Misalkan λ adalah suatu barisan bilangan positif, maka suatu proses kelahiran murni didefinisikan sebagai sebuah proses Markov yang memenuhi postulat di bawah ini.

(i) $P\{N(t, t+\Delta t) = 1 \mid N(t) = i\} = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t),$ (2.1)

(ii) $P\{N(t, t+\Delta t) = 0 \mid N(t) = i\} = 1 - \lambda_i \Delta t + o(\Delta t),$ (2.2)

(iii) $P\{N(t, t+\Delta t) = m \mid N(t) = i\} = o(\Delta t).$ (2.3)

dengan $m = 2,3,4,...$

Untuk $\Delta t \to 0$, (Cox and Miller, 1987, hlm:149) akan diperoleh persamaan diferensial di bawah ini.

$$p_i'(t) = -\lambda_i P_i(t) + \lambda_{i-1} P_{i-1}(t) \,;\, i \geq 1 \quad (2.4)$$

3. Proses Kelahiran Murni pada Proses Yule-Furry

Pandang populasi yang anggota-anggotanya makhluk biologi atau benda-benda fisika, yaitu anggota populasi yang dapat melahirkan (memecah diri) anggota baru yang tepat sama seperti induknya, dengan asumsi bahwa tidak ada populasi yang mati ataupun berimigrasi.

Anggap bahwa untuk selang waktu $(t, t+\Delta t)$ tiap anggota populasi mempunyai peluang $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$ untuk melahirkan anggota baru. Jika banyaknya individu pada waktu t adalah i, maka peluang akan ada satu kelahiran antara t dan t+Δt adalah i$\lambda\Delta$t + o(Δt).

Misalkan N(t), suatu variabel acak, menyatakan banyaknya individu pada waktu t, dan $P_i(t)$ = P{N(t) = i}. Dengan mengambil $\lambda_i = i\lambda$, maka $P_i(t)$ dapat dicari dari persamaan

$$P_i'(t) = -\, i\,\lambda P_i(t) + (i-1)\,\lambda P_{i-1}(t)\ ;\ I \geq 1 \qquad (3.1)$$

Jika syarat awal diberikan maka $P_i(t)$ dapat dinyatakan secara eksplisit.

4. Proses Kematian Murni (Pure Death Process)

Proses ini merupakan kebalikan dari proses kelahiran murni. Misalkan μ adalah suatu barisan bilangan positif, maka suatu proses kematian murni didefinisikan sebagai suatu proses Markov yang memenuhi postulat di bawah ini.

(i) $P\{N(t, t+\Delta t) = -1 \mid N(t) = j\} = \mu_j \Delta t + o(\Delta t),$ (4.1)

(ii) $P\{N(t, t+\Delta t) = 0 \mid N(t) = j\} = 1 - \mu_j \Delta t + o(\Delta t),$ (4.2)

(iii) $P\{N(t, t+\Delta t) = -m \mid N(t) = j\} = o(\Delta t).$ (4.3)

dengan m = 2,3,4,...

Untuk $\Delta t \to 0$ maka akan diperoleh persamaan diferensial

$$P_j'(t) = -\mu_j P_j(t) + \mu_{j+1} P_{j+1}(t)\ ;\ \text{dengan } j = 0,1,2,\ldots \qquad (4.4)$$

5. Proses Kematian Murni pada Proses Yule-Furry

Pandang populasi yang anggota-anggotanya makhluk biologi atau benda-benda fisika, yaitu anggota populasi yang dapat mati, dengan asumsi bahwa tidak ada populasi yang lahir ataupun beremigrasi. Anggap bahwa untuk selang waktu (t, t+Δt) tiap anggota populasi mempunyai peluang $\mu\Delta$t + o(Δt) untuk satu kematian Jika banyaknya individu pada waktu t adalah j, maka peluang akan ada satu kematian antara t dan t+Δt adalah j$\mu\Delta$t + o(Δt).

Misalkan N(t), suatu variabel acak, menyatakan banyaknya individu pada waktu t, dan $P_j(t)$ = P{N(t)=j}. Dengan mengambil $\mu_j = j\mu$, maka $P_j(t)$ dapat dicari dari persamaan

$$P_j'(t) = -j\mu P_j(t) + (j+1)\mu P_{j+1}(t) \quad ; \quad j \geq 1 \quad (5.1)$$

6. Proses Kelahiran-Kematian Murni (Pure Birth-Death Processess)

Penggabungan proses stokastik kelahiran dan kematian murni disebut dengan *proses stokastik kelahiran-kematian murni*. Proses ini mempunyai banyak aplikasi dalam pemodelan stokastik untuk berbagai fenomena di lapangan.

Jika $N_1(\Delta t)$ dan $N_2(\Delta t)$ merupakan dua proses Poisson dengan parameter λ dan μ yang keduanya saling bebas, dimana

$N_1(\Delta t)$ = Banyaknya kelahiran pada saat Δt, dan

$N_2(\Delta t)$ = Banyaknya kematian pada saat Δt,

maka proses $N(\Delta t) = N_1(\Delta t) + N_2(\Delta t)$ merupakan proses Poisson dengan parameter $\lambda + \mu$, yaitu

$$P_k(\Delta t) = \frac{e^{-(\lambda+\mu)\Delta t}\{(\lambda+\mu)\Delta t\}^k}{k!} \quad (6.1)$$

Misalkan λ dan μ adalah suatu barisan bilangan positif, maka suatu proses kelahiran-kematian murni didefinisikan sebagai suatu proses Markov yang memenuhi postulat di bawah ini.

(i) $P\{N(t, t+\Delta t) = 1 \mid N(t) = k\} = \lambda_k \Delta t + o(\Delta t)$, (6.2)

(ii) $P\{N(t, t+\Delta t) = -1 \mid N(t) = k\} = \mu_k \Delta t + o(\Delta t)$, (6.3)

(iii) $P\{N(t, t+\Delta t) = 0 \mid N(t) = k\} = \lambda - (\lambda_k + \mu_k)\Delta t + o(\Delta t)$, (6.4)

(iv) $P\{N(t, t+\Delta t) = a \mid N(t) = k\} = o(\Delta t)$, (6.5)

(v) $P\{N(t, t+\Delta t) = -a \mid N(t) = k\} = 0(\Delta t)$, (6.6)

dengan $a = 2,3,4,\ldots$

untuk $\Delta t \to 0$ kita dapatkan persamaan diferensial

$$P_k'(t) = -(\lambda_k + \mu_k)P_k(t) + \lambda_{k-1} P_{k-1}(t) + \mu_{k+1} P_{k+1}(t) \quad (6.7)$$

7. Proses Kelahiran-Kematian Murni pada Proses Yule-Furry

Pandang populasi yang anggota-anggotanya makhluk biologi atau benda-benda fisika, yaitu anggota populasi yang dapat melahirkan (memecah diri) anggota baru yang tepat sama seperti induknya dan juga dapat mati. Anggap bahwa untuk selang waktu $(t, t+\Delta t)$ tiap anggota populasi mempunyai peluang $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ untuk melahirkan anggota baru dan mempunyai peluang $\mu\Delta t + o(\Delta t)$ untuk satu kematian. Jika banyaknya individu pada waktu t adalah k, maka peluang akan ada satu kelahiran antara t dan $t+\Delta t$ adalah $k\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ dan peluang akan ada satu kematian antara t dan $t+\Delta t$ adalah $k\mu\Delta t + o(\Delta t)$.

Misalkan N(t), suatu variabel acak, menyatakan banyaknya individu pada waktu t, dan $P_k(t) = P\{N(t)=k\}$. Dengan mengambil $\lambda_k = k\lambda$ dan $\mu_k = k\mu$, maka $P_k(t)$ dapat dicari dari persamaan

$$P_k'(t) = -k(\lambda + \mu)P_k(t) + (k+1)\lambda P_{k+1}(t) + (k-1)\mu P_{k-1}(t) \qquad (7.1)$$

8. Pengembangan proses stokastik kelahiran-kematian murni

Pada butir 2 sampai dengan 7 di atas disajikan *Proses kelahiran murni, proses kematian murni, proses kelahiran-kematian murni* dan *proses Yule-Furry*. Dalam butir 8 ini, akan dibahas satu bentuk pengembangan dari proses stokastik kelahiran-kematian murni yaitu, *persamaan diferensial parsial untuk proses stokastik kelahiran-kematian murni dengan dua jenis kelamin pada proses Yule-Furry.*

Jika $N_1(\Delta t)$ dan $N_2(\Delta t)$ dan $N_3(\Delta t)$ dan $N_4(\Delta t)$ merupakan empat proses Poisson dengan parameter (λ_1), (λ_2), (μ_1), (μ_2) dan keempatnya saling bebas, dimana:

$N_1(\Delta t)$ = banyaknya kelahiran wanita pada saat Δt.

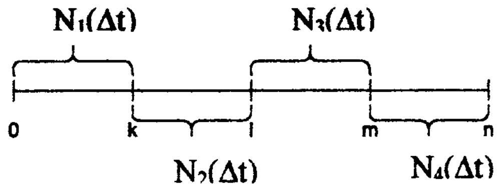
$N_2(\Delta t)$ = banyaknya kelahiran laki-laki pd saat Δt.

$N_3(\Delta t)$ = banyaknya kematian wanita pada saat Δt.

$N_4(\Delta t)$ = banyaknya kematian laki-laki pd saat Δt,

maka proses $N(\Delta t) = N_1(\Delta t) + N_2(\Delta t) + N_3(\Delta t) + N_4(\Delta t)$ merupakan proses Poisson dengan parameter $\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2$. Pernyataan tersebut dapat dijelaskan sebagai berikut:

Jurnal Penelitian Sains ; hal 38 - 51
No.8. Oktober 2000 ISSN: 1410-7058



Gambar 2. Proses Poisson dengan Empat Peristiwa

$$P_n(\Delta t) = \sum_{m=l=k=0}^{\infty} P\{N_1(\Delta t) = k \text{ dan } N_2(\Delta t) = l - k \text{ dan }$$

$$N_3(\Delta t) = m - l \text{ dan } N_4(\Delta t) = n - m\}.$$

Dengan merujuk pada teorema bahwa Variabel acak N(t) yang memenuhi asumsi-asumsi proses Poisson, yaitu independensi, homogenitas dalam waktu dan regularitas, mengikuti distribusi Poisson dengan rata-rata (mean) λt, yaitu

$$P_n(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \; ; \; n = 0, 1, 2, \ldots \text{ maka diperoleh}$$

$$P_n(\Delta t) = e^{-(\mu_1+\mu_2+\lambda_1+\lambda_2)\Delta t} \text{ x } \sum_{m=l=k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{l!} \binom{l}{k} \{(\lambda_1)\Delta t\}^k \{(\lambda_2)\Delta t\}^{l-k} \text{ x } \right.$$

$$\left. \frac{\{(\mu_1)\Delta t\}^{m-l}}{(m-l)!} \text{ x } \frac{\{(\mu_2)\Delta t\}^{n-m}}{(n-m)!} \right\}.$$

Dengan merujuk pada persamaan Binomial, maka diperoleh

$$P_n(\Delta t) = e^{-(\mu_1+\mu_2+\lambda_1+\lambda_2)\Delta t} \text{ x } \sum_{m=l=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m!} \binom{m}{l} \{(\lambda_1+\lambda_2)\Delta t\}^l \{(\mu_1)t\}^{m-l} \text{ x } \frac{\{(\mu_1)\Delta t\}^{n-m}}{(n-m)!} \right\}.$$

Selanjutnya,

$$P_n(\Delta t) = e^{-(\mu_1+\mu_2+\lambda_1+\lambda_2)\Delta t} \times \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{n!}\binom{n}{m}\right\}\{(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)\Delta t\}^m\{(\mu_2)\Delta t\}^{n-m} \text{ .Jadi}$$

$$P_n(\Delta t) = \frac{e^{-(\mu_1+\mu_2+\lambda_1+\lambda_2)t}\{(\mu_1+\mu_2+\lambda_1+\lambda_2)t\}^n}{n!}. \quad (8.1)$$

Persamaan (8.1) ini merupakan proses Poisson dengan empat peristiwa yaitu peristiwa terjadinya kelahiran wanita, kelahiran laki-laki, kematian wanita dan kematian laki-laki.

Untuk sebuah proses stokastik kelahiran-kematian murni dengan dua jenis kelamin dapat dijelaskan sebagai berikut :

Pada selang waktu $(t, t+\Delta t)$:

- tidak terjadi satu kelahiran dan kematian baik wanita maupun laki-laki, atau
- terjadi satu kelahiran wanita (i+1) dan tidak terjadi satu kelahiran laki-laki, atau
- terjadi satu kelahiran laki-laki (j+1) dan tidak terjadi satu kelahiran wanita, atau
- terjadi satu kematian wanita (i-1) dan tidak terjadi satu kematian laki-laki, atau
- terjadi satu kematian laki-laki (j-1) dan tidak terjadi satu kematian wanita.

Selain itu kecil sekali kemungkinan muncul

- terjadinya dua atau lebih kelahiran wanita $(i+a,j;\ a \geq 2)$ atau
- terjadinya dua atau lebih kelahiran laki-laki $(i,j+a;\ a \geq 2)$ atau
- terjadinya dua atau lebih kematian wanita $(i-a,j;\ a \geq 2)$ atau
- terjadinya dua atau lebih kematian laki-laki $(i,j-a;\ a \geq 2)$.

Maka dapat dirumuskan postulatnya dengan menggunakan persamaan (9.1), dengan $P_n(\Delta t) = P\{N(t, t+\Delta t) = n\}$, yaitu

Jika tidak terjadi kelahiran dan kematian baik wanita maupun laki-laki, maka

$$P\{N(t, t+\Delta t) = 0\} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2)\Delta t},$$

dengan merujuk pada rumus deret Taylor, maka diperoleh

$$P\{N(t, t+\Delta t) = 0\} \approx 1 - (\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2)\Delta t + \frac{1}{2}\{(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2)\Delta t\}^2 + \ldots$$

$$\approx 1 - (\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2)\Delta t + o(\Delta t).$$

Simbol $o(\Delta t)$ berarti bahwa jika $o(\Delta t)$ dibagi dengan Δt, maka nilainya akan menuju ke nol, bilamana Δt mendekati nol (Taylor, 1984).

Jika terjadi satu kelahiran atau kematian baik wanita maupun laki-laki, maka

$P\{N(t, t+\Delta t) = 1\} = (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2)\,\Delta t\; e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2)\Delta t}$.

$\approx (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2)\,\Delta t + \{(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2)\Delta t\}^2 + \ldots.$

$\approx (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2)\,\Delta t + o(\Delta t).$

Sedangkan untuk peristiwa hanya terjadinya satu kelahiran wanita dan tidak ada satupun kematian, maka $\lambda_2 = \mu_1 = \mu_2 = 0$, sehingga diperoleh

$P\{N(t, t+\Delta t) = 1\} \approx (\lambda_1)\,\Delta t + o(\Delta t),$

Untuk peristiwa hanya terjadinya satu kelahiran laki-laki dan tidak ada satupun kematian, maka $\lambda_1 = \mu_1 = \mu_2 = 0$, sehingga diperoleh

$P\{N(t, t+\Delta t) = 1\} \approx (\lambda_2)\,\Delta t + o(\Delta t),$

Untuk peristiwa hanya terjadinya satu kematian wanita dan tidak ada satupun kelahiran, maka $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu_2 = 0$, sehingga diperoleh

$P\{N(t, t+\Delta t) = 1\} \approx (\mu_1)\,\Delta t + o(\Delta t),$

Untuk peristiwa hanya terjadinya satu kematian laki-laki dan tidak ada satupun kelahiran, maka $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu_1 = 0$, sehingga diperoleh

$P\{N(t, t+\Delta t) = 1\} \approx (\mu_2)\,\Delta t + o(\Delta t).$

Selanjutnya karena n merupakan banyaknya individu wanita dan laki-laki pada saat t maka n dapat dibedakan menjadi dua, yaitu dengan memisalkan i sebagai banyaknya individu wanita dan j sebagai banyaknya individu laki-laki, dengan syarat untuk kelahiran laki-laki selalu memakai koefisien i yaitu $(\lambda_2)_i$.

Jika banyaknya peristiwa yang terjadi dalam selang waktu $(t, t+\Delta t)$ adalah independen dengan banyaknya peristiwa yang terjadi dalam selang waktu $(0,t]$, yang mana banyaknya peristiwa yang terjadi dalam selang waktu $(0,t]$ disimbolkan dengan i,j, (Cox and Miller, 1987). Maka $P_n(t) = P_{ij}(t)$ memenuhi sifat-sifat seperti berikut:

i. $P\{N(t) = i,j\} = P_{ij}(t).$ (8.2)

ii. $P\{N(t, t+\Delta t) = 0,0 \mid N(t) = i,j\} = 1-\{(\lambda_1)_i + (\lambda_2)_i + (\mu_1)_i + (\mu_2)_j\}\Delta t + o(\Delta t).$ (8.3)

iii. $P\{N(t, t+\Delta t) = 1,0 \mid N(t) = i,j\} = (\lambda_1)_i\,\Delta t + o(\Delta t).$ (8.4)

iv. $P\{N(t, t+\Delta t) = 0,1 \mid N(t) = i,j\} = (\lambda_2)_i\,\Delta t + o(\Delta t).$ (8.5)

Jurnal Penelitian Sains ; hal 38 - 51
No.8. Oktober 2000 **ISSN: 1410-7058**

v. $P\{N(t, t+\Delta t) = -1,0 \mid N(t) = i,j\} = (\mu_1)_i \Delta t + o(\Delta t).$ (8.6)

vi. $P\{N(t, t+\Delta t) = 0,-1 \mid N(t) = i,j\} = (\mu_2)_j \Delta t + o(\Delta t).$ (8.7)

vii. $P\{N(t, t+\Delta t) = a,0 \mid N(t) = i,j\} = o(\Delta t).$ (8.8)

viii. $P\{N(t, t+\Delta t) = 0,a \mid N(t) = i,j\} = o(\Delta t).$ (8.9)

ix. $P\{N(t, t+\Delta t) = -a,0 \mid N(t) = i,j\} = o(\Delta t).$ (8.10)

x. $P\{N(t, t+\Delta t) = 0,-a \mid N(t) = i,j\} = o(\Delta t).$ (8.11)

Banyaknya peristiwa yang terjadi dalam selang waktu $(t, t+\Delta t)$ adalah independen dengan banyaknya peristiwa yang terjadi dalam selang waktu $(0,t]$, (Cox and Miller, 1987).

untuk $\Delta t > 0$ akan diperoleh

$$
\begin{aligned}
P_{ij}(t+\Delta t) &= P\{N(t, t+\Delta t) = i,j\} \\
&= P[\{N(t) = i,j \text{ dan } N(t, t+\Delta t) = 0\} \text{ atau} \\
&\quad \{N(t) = i-1,j \text{ dan } N(t, t+\Delta t) = 1,0\} \text{ dan } \{N(t) = i-1,j \text{ dan } N(t, t+\Delta t) = 0,0\} \text{ atau} \\
&\quad \{N(t) = i,j-1 \text{ dan } N(t, t+\Delta t) = 0,1\} \text{ dan } \{N(t) = i,j-1 \text{ dan } N(t, t+\Delta t) = 0,0\} \text{ atau} \\
&\quad \{N(t) = i+1,j \text{ dan } N(t, t+\Delta t) = -1,0\} \text{ dan } \{N(t) = i+1,j \text{ dan } N(t, t+\Delta t) = 0,0\} \text{ atau} \\
&\quad \{N(t) = i,j+1 \text{ dan } N(t, t+\Delta t) = 0,-1\} \text{ dan } \{N(t) = i,j+1 \text{ dan } N(t, t+\Delta t) = 0,0\} \text{ atau} \\
&\quad \{N(t) = i-a,j \text{ dan } N(t, t+\Delta t) = a,0\} \text{ dan } \{N(t) = i-a,j \text{ dan } N(t, t+\Delta t) = 0,0\} \text{ atau} \\
&\quad \{N(t) = i,j-a \text{ dan } N(t, t+\Delta t) = 0,a\} \text{ dan } \{N(t) = i,j-a \text{ dan } N(t, t+\Delta t) = 0,0\} \text{ atau} \\
&\quad \{N(t) = i+a,j \text{ dan } N(t, t+\Delta t) = -a,0\} \text{ dan } \{N(t) = i+a,j \text{ dan } N(t, t+\Delta t) = 0,0\} \text{ atau} \\
&\quad \{N(t) = i,j+a \text{ dan } N(t, t+\Delta t) = 0,-a\} \text{ dan } \{N(t) = i,j+a \text{ dan } N(t, t+\Delta t) = 0,0\}]
\end{aligned}
$$

dengan $a = 2,3,4,...$

Dengan merujuk pada sifat-sifat $P_{ij}(t)$ dan dengan memisahkan $P_{ij}(t)$ pada sisi kiri serta membagi dengan Δt maka persamaan di atas dapat dinyatakan dalam bentuk seperti di bawah ini:

$$\frac{P_{ij}(t+\Delta t)-P_{ij}(t)}{\Delta t} = -\{(\lambda_1)_i+(\lambda_2)_i+(\mu_1)_i+(\mu_2)_j\}\frac{\Delta t}{\Delta t}P_{ij}(t)+$$

$$\left\{(\lambda_1)_{i-1}\frac{\Delta t}{\Delta t}+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right\}\left\{1-(\lambda_1)_{i-1}\frac{\Delta t}{\Delta t}+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right\}P_{i-1,j}(t)+$$

$$\left\{(\lambda_2)_i\frac{\Delta t}{\Delta t}+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right\}\left\{1-(\lambda_2)_i\frac{\Delta t}{\Delta t}+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right\}P_{i,j-1}(t)+$$

$$\left\{(\mu_1)_{i+1}\frac{\Delta t}{\Delta t}+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right\}\left\{1-(\mu_1)_{i+1}\frac{\Delta t}{\Delta t}+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right\}P_{i+1,j}(t)+$$

$$\left\{(\mu_2)_{j+1}\frac{\Delta t}{\Delta t}+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right\}\left\{1-(\mu_2)_{j+1}\frac{\Delta t}{\Delta t}+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right\}P_{i,j+1}(t)+$$

$$\sum_{a=2}^{\infty}\{P_{i-a,j}(t)\,P_{i,j}(t)+P_{i,j-a}(t)\,P_{i,j}(t)+$$

$$P_{i+a,j}(t)\,P_{i,j}(t)+P_{i,j+a}(t)\,P_{i,j}(t)\}\ \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Kemudian untuk $\Delta t \to 0$, akan diperoleh

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_{ij}(t+\Delta t)-P_{ij}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} -\{(\lambda_1)_i+(\lambda_2)_i+(\mu_1)_i+(\mu_2)_j\}\frac{\Delta t}{\Delta t}P_{ij}(t)+$$

$$\left\{(\lambda_1)_{i-1}\frac{\Delta t}{\Delta t}+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right\}\left\{1-(\lambda_1)_{i-1}\frac{\Delta t}{\Delta t}+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right\}P_{i-1,j}(t)+$$

$$\left\{(\lambda_2)_i\frac{\Delta t}{\Delta t}+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right\}\left\{1-(\lambda_2)_i\frac{\Delta t}{\Delta t}+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right\}P_{i,j-1}(t)+$$

$$\left\{(\mu_1)_{i+1}\frac{\Delta t}{\Delta t}+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right\}\left\{1-(\mu_1)_{i+1}\frac{\Delta t}{\Delta t}+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right\}P_{i+1,j}(t)+$$

$$\left\{(\mu_2)_{j+1}\frac{\Delta t}{\Delta t}+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right\}\left\{1-(\mu_2)_{j+1}\frac{\Delta t}{\Delta t}+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right\}P_{i,j+1}(t)+$$

$$\sum_{a=2}^{\infty}\{P_{i-a,j}(t)\,P_{i,j}(t)+P_{i,j-a}(t)\,P_{i,j}(t)+$$

$$P_{i+a,j}(t)\,P_{i,j}(t) + P_{i,j+a}(t)\,P_{i,j}(t)\,\}\;\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Dengan $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0,$

dan $\left\{1-(\lambda_1)_{i-1}\dfrac{\Delta t}{\Delta t}+\dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right\}$ dan $\left\{1-(\lambda_2)_i\dfrac{\Delta t}{\Delta t}+\dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right\}$

dan $\left\{1-(\mu_1)_{i+1}\dfrac{\Delta t}{\Delta t}+\dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right\}$ dan $\left\{1-(\mu_2)_{j+1}\dfrac{\Delta t}{\Delta t}+\dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right\}$

menyatakan berturut-turut, peluang tidak adanya satupun kelahiran wanita dan peluang tidak adanya satupun kelahiran laki-laki dan peluang tidak adanya satupun kematian wanita dan peluang tidak adanya satupun kematian laki-laki yang berharga 1 (satu), maka diperoleh persamaan diferensial untuk $P_{ij}(t)$ seperti di bawah ini.

$$P_{ij}'(t) = -\{(\lambda_1)_i + (\lambda_2)_i + (\mu_1)_i + (\mu_2)_j\}\,P_{ij}(t) + (\lambda_1)_{i-1}\,P_{i-1,j}(t) + (\lambda_2)_i\,P_{i,j-1}(t) + (\mu_1)_{i+1}\,P_{i+1,j}(t) + (\mu_2)_{j+1}\,P_{i,j+1}(t) \qquad (8.12)$$

dengan $i,j = 0,1,2,3,\ldots$

Untuk proses stokastik kelahiran-kematian yang linier (Yule-Furry) dengan dua jenis kelamin berlaku $(\lambda_1)_i = i(\lambda_1)$ dan $(\lambda_2)_i = i(\lambda_2)$ dan $(\mu_1)_i = i(\mu_1)$ dan $(\mu_2)_j = j(\mu_2)$, sehingga diperoleh:

$$P_{ij}'(t) = -(i\lambda_1 + i\lambda_2 + i\mu_1 + j\mu_2)\,P_{ij}(t) + (i-1)\lambda_1 P_{i-1}(t) + i\lambda_2 P_{i,j-1}(t) + (i+1)\,\mu_1\,P_{i+1,j}(t) + (j+1)\,\mu_2 P_{i,j+1}(t), \qquad (8.13)$$

dengan $i,j = 0,1,2,3,\ldots$

dimana

$P_{ij}(t)$ = peluang banyaknya wanita dan laki-laki pada saat t.

λ_1 = rata-rata kelahiran wanita.

λ_2 = rata-rata kelahiran laki-laki.

μ_1 = rata-rata kematian wanita.

μ_2 = rata-rata kematian laki-laki.

i = banyaknya individu wanita

j = banyaknya individu laki-laki.

t = waktu.

Untuk proses stokastik kelahiran-kematian yang linier (Yule-Furry) dengan dua jenis kelamin berlaku $(\lambda_1)_i = i(\lambda_1)$ dan $(\lambda_2)_i = i(\lambda_2)$ dan $(\mu_1)_i = i(\mu_1)$ dan $(\mu_2)_j = j(\mu_1)$, sehingga diperoleh:

$P_{ij}'(t) = -(i\lambda_1 + i\lambda_2 + i\mu_1 +$

$j\mu_2)\, P_{ij}(t) + (i-1)\, \lambda_1 P_{i-1}(t) +$

$i\lambda_2 P_{i,j-1}(t) + (i+1)\mu_1 P_{i+1,j}(t) +$

$(j+1)\, \mu_2 P_{i,j+1}(t),$ (8.14)

dengan $i,j = 0,1,2,3,...$

dimana

$P_{ij}(t)$ = peluang banyaknya wanita dan laki-laki pada saat t.

λ_1 = rata-rata kelahiran wanita.

λ_2 = rata-rata kelahiran laki-laki.

μ_1 = rata-rata kematian wanita.

μ_2 = rata-rata kematian laki-laki.

i = banyaknya individu wanita.

j = banyaknya individu klaki-laki.

t = waktu.

Persamaan diferensial parsial untuk fungsi pembangkit peluang transisi dari sebuah proses stokastik kelahiran-kematian murni dengan dua jenis kelamin pada proses Yule-Furry dengan syarat

$$G(z_1, z_2, t) = \sum_{i,j=0}^{\infty} z_1^{\,i} z_2^{\,j} P_{ij}(t)\,, \qquad (8.15)$$

adalah

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \{-(\lambda_1 + \lambda_2)z_1 - \mu_1 z_1 + \lambda_1 z_1^2 +$$

$$\lambda_2 z_1 z_2 + \mu_1\}\frac{\partial G}{\partial z_1} + \mu_2(1-z_2)\frac{\partial G}{\partial z_2} \qquad (8.16)$$

Rata-rata dan variansi-variansi dari persamaan (8.16) yang menyatakan banyaknya laki-laki dan wanita yang hidup pada saat t, adalah

$$\frac{\partial K}{\partial t} = (\mu_1 + \lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 e^{\theta_1} - \lambda_1 e^{\theta_1} - \lambda_2 e^{\theta_2})\frac{\partial K}{\partial \theta_1} - \mu_2(e^{\theta_2} - 1)\frac{\partial K}{\partial \theta_2}.$$

Selanjutnya diperluas pangkat dari θ_1, θ_2 dan samakan koefisien yang berhubungan dengan pangkatnya. Misalkan $K_{ij}(t)$ menyatakan gabungan dari order (i,j), sebagai contoh, $K_{10}(t)$ adalah rata-rata banyaknya wanita, $K_{11}(t)$ adalah kovariansi dari banyaknya laki-laki dan wanita, dan seterusnya.

$K_{10}'(t) = (\lambda_1 - \mu_1)\, k_{10}(t),$

$K_{01}'(t) = \lambda_2 K_{10}(t) - \mu_2\, k_{01}(t),$

$K_{20}'(t) = 2(\lambda_1 - \mu_1)\, k_{20}(t) + (\lambda_1 - \mu_1)\, k_{10}(t),$

$K_{11}'(t) = \lambda_2 K_{20}(t) + (\lambda_1 - \mu_1 - \mu_2) k_{11}(t),$

$K_{02}'(t) = 2\lambda_2 K_{11}(t) - 2\mu_2 k_{02}(t) + \lambda_2 K_{10}(t) - \mu_2 k_{01}(t).$

Persamaan ini dapat dengan mudah diselesaikan secara terurut; persamaan-persamaan itu menyatakan distribusi marginal dari banyaknya wanita, yang menyatakan sebuah proses kelahiran-kematian sederhana. Penyelesaian untuk rata-rata, jika n_1 menyatakan banyaknya wanita pada saat awal dan n_2 menyatakan banyaknya laki-laki pada saat awal, adalah

$$K_{10}(t) = e^{(\lambda_1 - \mu_1)t}$$

$$K_{01}(t) = \frac{\lambda_2 n_1}{\lambda_1 - \mu_1 + \mu_2} e^{(\lambda_1 - \mu_1)t} + \left(n_2 - \frac{\lambda_2 n_1}{\lambda_1 - \mu_1 + \mu_2}\right) e^{-\mu_2 t},$$

Jadi jika $\lambda_1 > \mu_1$, limit rasio banyaknya wanita dan laki-laki yang diharapkan adalah $(\lambda_1 - \mu_1 + \mu_2) / \lambda_2$.

9. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari model *persamaan diferensial parsial untuk proses stokastik kelahiran-kematian murni dengan dua jenis kelamin pada proses Yule-Furry* adalah sebagai berikut:

a. *Proses stokastik kelahiran-kematian murni dengan dua jenis kelamin pada proses Yule-Furry* mempunyai empat peristiwa yaitu terjadinya kelahiran wanita, kelahiran laki-laki, kematian wanita dan kematian laki-laki, sehingga diperoleh model proses Poisson dengan empat peristiwa.

b. Postulat untuk *proses stokastik kelahiran-kematian murni dengan dua jenis kelamin pada proses Yule-Furry* dapat diperoleh dari model proses Poisson dengan empat peristiwa di atas.

c. Dari postulat yang sudah ada diperoleh *persamaan diferensial parsial untuk proses stokastik kelahiran-kematian murni dengan dua jenis kelamin pada proses Yule-Furry*, yaitu

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \{-(\lambda_1 + \lambda_2) z_1 - \mu_1 z_1 + \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_1 z_2 + \mu_1\} \frac{\partial G}{\partial z_1} + \mu_2 (1 - z_2)\} \frac{\partial G}{\partial z_2}.$$

DAFTAR PUSTAKA

Bhattacharya, R.N. & Waymire, E.C. 1990. *Stochastic Processes with Application.* John Wiley and Sons.

Cinlar, E. 1975. *Introduction to Stochastic Processes.* Prentice-Hall, Inc. New Jersey.

Cox, D.R. & Miller, H.D. 1987. *The Theory of Stochastic Processes.* Chapman and Hall. London.

Goodman, L.A. 1953a. *Population Growth of The Sexes.* Biometrics,9,212-215.

Ngudiantoro. 1996. *Proses Stokastik Kelahiran-Kematian yang Terjadi Secara Cluster pada Proses Yule-Furry.* Skripsi, Jurusan Matematika, FMIPA. Universitas Sriwijaya

Parzen, E. 1964. *Stochastic Processes.* Holden-Day Inc. San Francisco.

Praptono, M.A. 1986. *Pengantar Proses Stokastik I.* Penerbit Karunika Jakarta. Universitas Terbuka.

Srinivasan, S.K. & Mehata, K.M. 1988. *Stochastic Processes.* Tata Mc.Graw-Hill Publishing Company Limited. New Delhi.

Taylor, H.M. 1984. *An Introduction to Stochastic Modelling.* Academic Press, Inc. Orlando. Florida.

Tuckwell, H.C. 1988. *Elementary Application of Probability Theory.* Chapman and Hall. New York.