Analisis Sifat Ruang Vektor yang Tidak Berlaku pada Modul

Novi Rustiana Dewi
Jurusan Matematika FMIPA, Universitas Sriwijaya, Sumatera Selatan, Indonesia

Intisari: Modul atas ring R merupakan generalisasi dari ruang vektor atas suatu lapangan. Jika gelanggang R di dalam modul adalah suatu lapangan, maka ada beberapa perbedaan terminologi untuk sifat-sifat modul, sehingga berdasarkan hal tersebut dapat dikaji sifat-sifat ruang vektor yang tidak berlaku pada modul. Di antara sifat-sifat yang berhasil dikaji adalah jika S himpunan unsur-unsur pada modul M yang bergantung linier maka belum tentu terdapat satu unsur dari S yang merupakan kombinasi linier dari unsur-unsur yang lain di dalam S, jika S himpunan yang membangun suatu modul M maka belum tentu S memuat suatu basis untuk M, jika S modul bagian dari suatu modul M atas gelanggang R maka tidak ada modul bagian T dari M sehingga berlaku $M = S \oplus T$, terdapat modul-M atas R yang tidak mempunyai basis dan jika M suatu modul atas R yang dibangun secara hingga maka belum tentu semua modul bagiannya juga dibangun secara hingga.

Kata kunci: modul, ruang vektor, bergantung linier, kombinasi linier, basis

Mei 2010

1 PENDAHULUAN

Modul atas ring R merupakan generalisasi dari ruang vektor atas suatu lapangan. Sifat-sifat yang memenuhi struktur ruang vektor lebih luas cakupannya dibanding sifat-sifat yang memenuhi struktur modul. Hal ini dikarenakan dasar pembentukan struktur ruang vektor berbeda dengan modul, yaitu jika gelanggang R di dalam modul adalah suatu lapangan, maka menurut Dummit[1] terdapat terminologi yang berbeda untuk beberapa sifat-sifat modul yang didefinisikan pada Tabel 1.

Berdasarkan terminologi tersebut, beberapa sifat yang berlaku pada ruang vektor belum tentu berlaku pada modul. Namun mengingat bahwa cakupan struktur ruang vektor lebih luas dibanding modul, tentu ada beberapa sifat yang berlaku pada ruang vektor, tetapi tidak berlaku pada modul. Sehingga berdasarkan hal tersebut, penulis tertarik untuk mengkaji sifat-sifat tersebut, dengan cara mencari contoh-contoh penyangkal.

2 KAJIAN PUSTAKA

Pada bagian ini diberikan beberapa definisi serta sifat-sifat ruang vektor atas suatu lapangan yang akan dikaji keberlakuannya pada modul atas suatu ring.

Definisi 1 *Diberikan suatu lapangan F. Suatu grup abelian aditif V dengan operasi perkalian skalar adalah suatu ruang vektor atas lapangan F, jika terdapat suatu aksi dari F di V yaitu $F \times V \mapsto V$, di mana $(\alpha, v) \mapsto \alpha v$ untuk $\alpha \in F, \vec{v} \in V$ sehingga untuk sebarang $\alpha, \beta \in F$ dan $\vec{v}, \vec{w} \in V$ sejumlah kondisi berikut dipenuhi[2]:*

i) $1v = v$

ii) $\alpha(\vec{v} + \vec{w}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{w}$

iii) $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$

iv) $(\alpha\beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v})$

Definisi 2 *Diberikan V suatu ruang vektor atas lapangan F. Vektor-vektor di dalam suatu himpunan bagian $S = \{a_i | i \in I\}$ dari V dikatakan membangun V jika untuk setiap $\vec{b} \in V$ dapat dinyatakan sebagai[2]*

$$\vec{b} = \alpha_1 a_{i_1} + \alpha_2 a_{i_2} + \cdots + \alpha_n a_{i_n}$$

Untuk $a_j \in F$ dan $a_{i_j} \in S$, dengan $j = 1, 2, \ldots, n$. Suatu vektor $\sum_{j=1}^{n} a_j a_{i_j}$ adalah suatu kombinasi linier dari a_{i_j}.

Definisi 3 *Vektor-vektor di dalam suatu himpunan bagian $S = \{a_i | i \in I\}$ dari suatu ruang vektor V atas lapangan F adalah bebas linier atas F jika $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = 0$ berakibat $a_i = 0$ untuk semua $i = 1, 2, \ldots, n$[2].*

Vektor-vektor yang tidak bebas linier atas F disebut bergantung linier atas F. Jika vektor-vektor bergantung linier atas F, maka terdapat $\alpha_i \in F$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ yang tidak semuanya nol sehingga $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = 0$.

TABEL 1: terminologi yang berbeda untuk beberapa sifat-sifat modul

Terminologi untuk R sebarang ring	**Terminologi untuk R suatu lapangan**
M suatu modul-R	M suatu ruang vektor atas R
m suatu unsur dari M	m suatu vektor di dalam M
a suatu elemen ring	a suatu skalar
N suatu modul bagian dari M	N suatu ruang bagian dari M
M/N suatu modul pembagi	M/N suatu ruang pembagi
M suatu modul bebas dengan rank n	M suatu ruang vektor berdimensi n
M suatu modul yang dibangun secara hingga	M suatu ruang vektor berdimensi hingga
M suatu modul siklik tak nol	M suatu ruang vektor berdimensi-1
$\phi : M \to N$ suatu homomorfisma modul	$\phi : M \to N$ suatu transformasi linier
M dan N modul-R yang isomorfik	M dan N ruang vektor yang isomorfik
Himpunan bagian A dari M membangun M	Himpunan bagian A dari M merentang M
$M = RA$	Setiap elemen dari M adalah suatu kombinasi linier dari elemen-elemen A

Teorema 4 *Diberikan himpunan vektor-vektor S dari ruang vektor V atas lapangan F. Jika S bergantung linier, maka terdapat sekurang-kurangnya satu vektor dari S yang merupakan kombinasi linier dari vektor-vektor yang lain di dalam S*[3].

Definisi 5 *Jika V adalah suatu ruang vektor atas lapangan F, vektor-vektor di dalam suatu himpunan bagian $B = \{b_i | i \in I\}$ dari V membentuk suatu basis untuk V atas F jika vektor-vektor tersebut membangun V dan bebas linier*[3].

Preposisi 6 *Jika himpunan $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ membangun ruang vektor V tetapi tidak ada himpunan bagian sejati dari A yang membangun V, maka A adalah suatu basis untuk V*[3].

Akibat 7 *Diasumsikan bahwa himpunan berhingga A membangun ruang vektor V maka A memuat suatu basis untuk ruang vektor V*[3].

Teorema 8 *Jika V ruang vektor atas F dan M ruang bagian dari V maka ada N ruang bagian dari V sehingga*[1].

$$V = M \oplus N \; .$$

Teorema 9 *Setiap ruang vektor yang tidak nol senantiasa mempunyai basis, yaitu himpunan yang membangun ruang vektor dan bebas linier*[3].

Teorema 10 *Jika V suatu ruang vektor atas F yang dibangun secara hingga maka setiap ruang bagian dari V juga dibangun secara hingga*[2].

3 HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut ini diberikan suatu pengitlakan dari pengertian ruang vektor atas suatu lapangan, yang dinamakan modul atas suatu ring.

Definisi 11 *Diberikan R suatu ring dengan atau tanpa elemen satuan (unity). Suatu grup abelian aditif M dengan operasi penjumlahan adalah suatu modul-R kanan jika terdapat suatu fungsi $M \times R \to M$, di mana $(m, r) \mapsto mr$, untuk $m \in M$ dan $r \in R$ sehingga untuk sebarang $x, y \in M$ dan $a, b \in R$ kondisi-kondisi berikut dipenuhi:*

i) $(x + y)a = xa + ya$
   $x(a + b) = xa + xb$

ii) $x(ab) = (xa)b$.

Notasi $M = M_R$ akan diartikan bahwa R adalah suatu ring dan M adalah suatu Modul-R kanan. (Sejalan pula bahwa $V = {}_RV$ untuk modul kiri). Modul nol dapat dinotasikan dengan salah satu dari tiga notasi berikut, $\{0\}$, (0), atau 0[4].

Definisi 12 *$M = M_R$ adalah unital jika*[4]

i) *$1 \in R$, yaitu ring mempunyai elemen identitas 1*

ii) *$x \cdot 1 = x$ untuk semua $x \in M$*

Pengertian membangun, kombinasi linier dan kebebasan linier sejalan dengan pengertian yang diberikan pada ruang vektor.

Seperti pada ruang vektor, dipenuhi $0v = 0$ untuk setiap $v \in M$. (Catatan bahwa 0 di dalam $0v$ adalah elemen 0 di R, di mana 0 pada sisi lain persamaan adalah elemen 0 pada grup aditif M. Bagaimanapun, tidak ada suatu perbedaan dalam penggunaan simbol yang sama 0 untuk semua elemen-elemen nol dimanapun). Juga dipenuhi $(-e)v = -v$, dengan pembuktian yang sama seperti pada ruang vektor.

Diberikan M modul atas R dan N suatu subgroup dari M. Dikatakan bahwa N adalah suatu submodul dari M jika pada saat $v \in N$ dan $x \in R$ maka $xv \in N$. Ini berarti bahwa N selanjutnya adalah suatu modul itu sendiri.

Pada Teorema 4 dalam bahasan ruang vektor, terlihat bahwa himpunan vektor-vektor yang bergantung linier, selalu memuat satu vektor yang merupakan kombinasi linier dari vektor-vektor yang lain di dalamnya. Apakah sifat ini berlaku juga pada modul? Pandang contoh berikut.

Contoh 1 Diberikan $\mathbb{Z}$ sebagai modul atas $\mathbb{Z}$. Himpunan $S = \{3, 4\}$ adalah himpunan yang bergantung linier, karena ada unsur $-4, 3 \in \mathbb{Z}$ sehingga $3(-4) + 4(3) = 0$. Tetapi tidak terdapat suatu unsur di S yang merupakan kelipatan dari unsur yang lain. Dengan kata lain tidak ada $\alpha \in Z$ sehingga $3 = \alpha \cdot 4$ atau $4 = \alpha \cdot 3$.

Dari contoh 1 terlihat bahwa jika S himpunan yang bergantung linier pada modul $\mathbb{Z}$ atas $\mathbb{Z}$, maka belum tentu ada unsur yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari unsur-unsur yang lain di dalam S.

Berikut ini akan diberikan contoh penyangkal tidak berlakunya Akibat 7 pada modul.

Contoh 2 Diberikan $\mathbb{Z}$ sebagai modul atas $\mathbb{Z}$. Himpunan $S = \{3, 4\}$ membangun $\mathbb{Z}$, karena untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, terdapat $\alpha_1 = -a$ dan $\alpha_2 = a$ sehingga $a = \alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 4$. Akan tetapi S tidak memuat basis untuk M, yaitu $\{1\}$.

Dari contoh 2 terlihat bahwa jika S himpunan yang membangun modul $\mathbb{Z}$ atas $\mathbb{Z}$, maka belum tentu S memuat suatu basis untuk $\mathbb{Z}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bukti bahwa Teorema 8 tidak berlaku pada modul, dengan contoh berikut.

Contoh 3 Diberikan suatu modul $\mathbb{Z}$ atas $\mathbb{Z}$. Misalkan S modul bagian dari $\mathbb{Z}$ dengan $S \neq \{0\}$ dan $S \neq \mathbb{Z}$, maka S juga merupakan ideal di $\mathbb{Z}$. Tetapi karena semua ideal di $\mathbb{Z}$ merupakan ideal utama dan $S \neq \{0\}$, $S \neq \mathbb{Z}$, maka terdapat bilangan $a > 0$ sehingga $S = \langle a \rangle$. Andaikan ada T modul bagian dari $\mathbb{Z}$ sehingga $\mathbb{Z} = S \oplus T$ maka T juga ideal di $\mathbb{Z}$. Karena $S \neq \{0\}$ maka $T \neq \mathbb{Z}$, demikian pula karena $S \neq \mathbb{Z}$ maka $T \neq \{0\}$, maka terdapat $b > 0$ sehingga $T = \langle b \rangle$. Karena $\mathbb{Z} = S \oplus T$ maka $S \cap T = \{0\}$, sehingga $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{0\}$. Tetapi, $ab \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{0\}$, jadi diperoleh $ab = 0$, padahal $ab > 0$, suatu kontradiksi. Jadi pengandaian salah, yang benar adalah jika S modul bagian dari $\mathbb{Z}$ maka tidak ada modul bagian T dari $\mathbb{Z}$ sehingga berlaku $\mathbb{Z} = S \oplus T$.

Contoh berikut menyatakan ketidak berlakuan Teorema 9 pada modul.

Contoh 4 Diberikan suatu modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$. Ambil sebarang $\bar{x} \in \mathbb{Z}_n$ dengan $n \neq 0$.

$$\begin{aligned} n \cdot \bar{x} &= \underbrace{\bar{x} + \bar{x} + \cdots + \bar{x}}_{n-\text{faktor}} = (\underbrace{\bar{1} + \bar{1} + \cdots + \bar{1}}_{n-\text{faktor}})\bar{x} \\ &= (\underbrace{\overline{1 + 1 + \cdots + 1}}_{n-\text{faktor}})\bar{x} = \bar{n} \cdot \bar{x} = \bar{0} \cdot \bar{x} \end{aligned}$$

Karena ada $n \neq 0$ sehingga $n \cdot \bar{x} = \bar{0}$ maka $\{\bar{x}\}$ bergantung linier, sehingga terbukti bahwa setiap himpunan bagian dari $\mathbb{Z}_n$ bergantung linier, atau $\mathbb{Z}_n$ tidak mempunyai basis.

Contoh berikut menyatakan ketidak berlakuan Teorema 10, yaitu bahwa jika suatu modul dibangun secara hingga maka belum tentu semua modul bagiannya juga dibangun secara hingga.

Contoh 5 Diberikan $f : \Re \to \Re$ dengan aturan $\{f_1 | f_1 : x \mapsto 1\}$, $\Re^{\Re} = M = \{f | f : \Re \to \Re\}$ adalah modul dengan pembangunnya adalah $\{f_1 | f_1 : x \mapsto 1\}$. Akan ditunjukkan bahwa M mempunyai modul bagian yang dibangun secara hingga.

Ambil N himpunan semua $f \in \Re$ yang menghilangkan sisi luar suatu interval berhingga. Jadi, $f \in N$ jika dan hanya jika terdapat bilangan bulat $n \geq 0$ yang tergantung f sehingga $f(x) = 0$ jika $|x| > n$.

Misalkan

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ untuk } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, \text{ untuk } x < 0 \text{ atau } x > 1. \end{cases}$$

$f \in N$, karena untuk $n = 1$ berlaku $f(x) = 0$ untuk $|x| > n = 1$. N modul bagian dari M, disebabkan jika $f, g \in N$ maka terdapat bilangan bulat n_1, n_2 dengan $n_1, n_2 \geq 0$ sehingga $f(x) = 0$ untuk $|x| > n_1$ dan $g(x) = 0$ untuk $|x| > n_2$.

Ambil $n = \text{maks}\{n_1, n_2\}$, maka $f(x) = 0 = g(x)$ untuk $|x| > n$, sehingga $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = 0$ untuk $|x| > n$, atau diperoleh $f - g \in N$. Jika $h \in R$, berlaku $(hf)x = h(x) \cdot f(x) = h(x) \cdot 0 = 0$, untuk $|x| > n_1$. Artinya $(h \cdot f)(x) = 0$ untuk $|x| > n_1$, sehingga $h \cdot f \in N$. Pemetaan nol $0^* \in N$ sebab untuk $|x| > 0$ berlaku $0^*(x) = 0$.

Ambil sebarang $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\} \subseteq N$ dengan k berhingga, maka untuk setiap i terdapat $n_i > 0$ sehingga $f_i(x) = 0$ untuk $|x| > n_1$. Diambil $n = \text{maks}\{n_1 | 1 \leq i \leq k\}$, maka $f_i(x) = 0$ jika $|X| > N$ untuk $1 \leq i \leq k$. Hal ini berakibat setiap kombinasi linier berbentuk $\sum_{i=1}^{k} h_i f_i$ dengan $h_i \in R$ berlaku

$$\sum_{i=1}^{k} (h_i f_i)(x) = \sum_{i=1}^{k} h_i(x) \cdot 0 = 0,$$

untuk $|x| > n$, yang berarti

$$\left(\sum_{i=1}^{k} h_i f_i\right)(x) = \sum_{i=1}^{k}(h_i f_i)(x) = 0.$$

Tetapi $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ tidak membangun N, sebagai contoh, ambil $q \in N$ dengan

$$q(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq (n+1) \\ 0, & |x| \geq (n+1). \end{cases}$$

Karena $\left(\sum_{i=1}^{k} h_i f_i\right)(x) =$ untuk $(n+1) \geq |x| > n$. Padahal $q(x) = 1$ untuk $(n+1) \geq |x| > n$, jadi q bukan kombinasi linier $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$, sehingga sebarang N modul bagian dari M tidak dibangun secara hingga.

4 PENUTUP

Dari hasil dan pembahasan, secara umum dapat disimpulkan bahwa sifat-sifat ruang vektor yang tidak berlaku pada modul adalah sebagai berikut:

1. Jika S himpunan unsur-unsur yang bergantung linier pada modul M, maka S selalu memuat satu unsur yang merupakan kombinasi linier dari unsur-unsur yang lain di dalamnya.

2. Jika S himpunan yang membangun suatu modul M maka belum tentu S memuat suatu basis untuk M.

3. Jika S modul bagian dari suatu modul M atas gelanggang R maka tidak ada modul bagian T dari M sehingga berlaku $M = S \oplus T$.

4. Terdapat modul-M atas R yang tidak mempunyai basis.

5. Jika M suatu modul atas R yang dibangun secara hingga maka belum tentu semua modul bagiannya juga dibangun secara hingga.

Sebagai saran, lebih lanjut dianalisis sifat-sifat lain yang berlaku pada ruang vektor atas suatu lapangan yang tidak berlaku pada modul atas ring. Atau dapat pula dikaji sifat-sifat yang berlaku pada keduanya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Dummit, D.S. and R.M. Foote, 1991, *Abstract Algebra*, Hal.335, Prentice-Hall, Inc, New Jersey

[2] Fraleigh, J.B., 1993, *A First Course In Abstract Algebra*, Fifth Edition, Addison-Wesley Publishing Company, USA

[3] Anton, H. dan C. Rorres, 2004, *Aljabar Linear Elementer*, Edisi 8, Erlangga, Jakarta

[4] Dauns, J., 1994, *Modules and Rings*, Cambridge University Press, USA