

# Pengkuantuman Tak Setara dan Statistika Kuantum bagi Sistem Zarah Identik Tanpa Spin

AKHMAD AMINUDDIN BAMA

Jurusan Fisika FMIPA, Universitas Sriwijaya, Sumatera Selatan, Indonesia

**INTISARI:** Telah dikaji pengkuantuman tak setara dan kaitannya dengan statistika kuantum bagi sistem zarah identik tanpa spin. Pengkuantuman tak setara bagi sistem berpadanan-(1-1) dengan wakilan uniter tak tersusutkan (WUTT) grup fundamental  $\pi_1(Q_N(\Sigma))$  bagi ruang konfigurasi sistem  $Q_N(\Sigma)$  yang isomorfis dengan grup *braid*  $B_N(\Sigma)$ . Statistika bagi sistem diberikan oleh wakilan yang berbeda bagi  $\zeta_N(\Sigma)$  yang merupakan subgrup bagi  $B_N(\Sigma)$  yang dibangkitkan oleh permutasi zarah  $\sigma$ . Dari elaborasi yang telah dilakukan tampak bahwa untuk sistem zarah identik tak berspin, statistika skalar yang berpadanan-(1-1) dengan WUTT berdimensi-1 bagi grup *braid*  $B_N(\Sigma)$  terangkum dalam statistika- $\theta$  (statistika fraksional) dengan statistika Bose dan Fermi merupakan kasus khusus bagi statistika itu. Sementara WUTT berdimensi lebih tinggi bagi  $B_N(\Sigma)$  akan memberikan berbagai jenis statistika yang lebih kaya.

**KATA KUNCI:** pengkuantuman tak setara, statistika kuantum, wakilan uniter tak tersusutkan

**ABSTRACT:** We discuss inequivalent quantizations and its relation with quantum statistics of a system of spinless identical particles. The inequivalent quantizations of the system are in (1-1)-correspondence with irreducible unitary representations (IUR's) of the fundamental group  $\pi_1(Q_N(\Sigma))$  of a configuration space of the system  $Q_N(\Sigma)$  which is isomorphic with the braid group  $B_N(\Sigma)$ . The different statistics allowed for the system are given by different representations of  $\zeta_N(\Sigma)$  which is a subgroup of  $B_N(\Sigma)$  generated by permutation of particles  $\sigma$ . Our elaboration have shown that the scalar statistics of the spinless identical particle system which are in (1-1)-correspondence with 1-dimensional IUR's of the braid group  $B_N(\Sigma)$  are summarized in the  $\theta$  statistics or fractional statistics. The Bose and Fermi statistics are special cases of these statistics. Higher dimensions of IUR's of the braid group  $B_N(\Sigma)$  yield more rich kinds of statistics.

**KEYWORDS:** inequivalent quantization, quantum statistics, irreducible unitary representation

**PACS NUMBERS:** 02.20.Nq, 03.65.-w, 04.60.Ds

E-MAIL: akhmadbama@yahoo.com

September 2009

## 1 PENDAHULUAN

Pengkuantuman adalah proses yang membawa sistem fisis dari klasik ke kuantum. Secara matematis, teori kuantum adalah teori yang mengkaji sistem fisis melalui wakilan di dalam ruang Hilbert kompleks alih-alih teori klasik yang mengkaji sistem di dalam ruang fase klasik. Secara alamiah, persoalan pengkuantuman terbagi menjadi dua tataran. Pertama, tataran *kinematik*; menyangkut pemilihan vektor-keadaan kuantum yang mewakili keadaan sistem di dalam ruang Hilbert wakilan kompleks. Dilanjutkan dengan penyeleksian himpunan entitas beranggotakan observabel klasik yang beroperasi pada vektor keadaan di atas dan siap untuk dikuantumkan menjadi struktur bangunan yang membentuk sejumlah operator swadamping (Hermitan) di ruang Hilbert yang mewakili observabel klasik padanannya masing-

masing. Beberapa operator Hermitan yang tak memiliki padanan klasik akan muncul sebagai observabel baru, di antaranya spin dan paritas zarah. Kedua, tataran *dinamik*; menyangkut keterkaitan antara evolusi keadaan klasik sistem terhadap waktu dan operator evolusi uniter pembangkit dinamika keadaan kuantum padanannya, yang memerlukan pencarian wakilan uniter tak tersusutkan (WUTT) (*irreducible unitary representations* (IUR's)) bagi grup dinamik (grup bilangan real  $\mathbb{R}$  dengan operasi biner grup berupa penjumlahan (+)) di ruang fisis<sup>[1]</sup>.

Pengkuantuman tak setara (*inequivalent quantization*) adalah pengkuantuman beberapa jenis sistem kuantum yang keadaannya diwakili oleh fungsi-keadaan yang menghuni ruang Hilbert yang berbeda, masing-masing hunian itu tidak saling terkait.

Penentuan berbagai jenis statistika yang mungkin bagi sistem zarah identik terkait dengan kaedah

pengkuantuman tak setara bagi sistem itu. Misalnya, vektor keadaan simetri bagi sistem boson menghuni ruang Hilbert yang berbeda dengan vektor keadaan antisimetri bagi sistem fermion, karena itu sistem akan memenuhi kaedah pengkuantuman yang berbeda, dengan kata lain kedua keadaan itu tak setara. Pengkuantuman terhadap sistem yang diwakili oleh vektor keadaan simetri (antisimetri) memenuhi kaedah komutasi (antikomutasi) di antara berbagai operator primer medan atau amplitudo harmoniknya. Karena itu, dengan mengetahui jenis pengkuantuman tak setara itu diharapkan dapat diketahui pula berbagai jenis statistika yang mungkin bagi sistem. Telaah awal menunjukkan bahwa dua jenis statistika yang berbeda terkait dengan dua atau lebih pengkuantuman tak setara. Meskipun demikian, tidak selalu berlaku hal sebaliknya, yaitu dua atau lebih pengkuantuman tak setara tidak selalu memberikan statistika yang berbeda. Dua pengkuantuman tak setara (dengan ruang Hilbert berbeda) namun terkait dengan statistika yang sama biasa disebut *setara statistik*<sup>[2,3]</sup>.

Secara teoretis, dalam fisika sistem banyak zarah identik dimungkinkan terdapat statistika kuantum selain jenis Bose dan Fermi, masing-masing dengan keadaan kuantum yang simetri dan antisimetri terhadap pertukaran sebarang pasangan zarah sistem, yaitu parastatistika, statistika fraksional yang melibatkan *anyon* dan *quon*, statistika Haldane dan sebagainya<sup>[4-7]</sup> yang tak memiliki simetri pada sistem boson ataupun fermion. Berbagai statistika kuantum tak konvensional itu sangat mungkin muncul, dalam mekanika kuantum zarah maupun teori medan terkuantumkan, terutama karena belum adanya bukti teoretis bahwa hanya statistika Bose dan Fermi sajalah yang diperbolehkan<sup>[8-11]</sup>.

## 2 PENGKUANTUMAN TAK SETARA DAN STATISTIKA KUANTUM BAGI SISTEM ZARAH IDENTIK

Prosedur baku dalam pengkuantuman sistem klasik dengan ruang konfigurasi  $Q$  (dianggap sistem tidak berinteraksi dengan medan luar, dan  $Q$  tersambung lintasan) dimulai dengan membangun vektor keadaan mekanika kuantum waktu tetap  $\psi$  sebagai fungsi biasa dari  $Q$  ke lapangan (*field*) kompleks  $\mathbb{C}$ . Dengan kata lain, vektor keadaan fisis  $\psi$  merupakan pemetaan dari ruang konfigurasi  $Q$  ke lapangan kompleks  $\mathbb{C}$ ,  $\psi : Q \rightarrow \mathbb{C}$ <sup>[12,13]</sup>. Umumnya berbagai vektor tersebut dapat dipilih sebagai tampang  $Q \times \mathbb{C}^K$  bundel sederhana  $\mathbb{C}^K$  di atas  $Q$  dengan  $K \geq 1$  adalah dimensi serat (*rank* bagi bundel). Limit klasik teori kuantum yang dibangun pada bundel vektor ini, katakanlah bundel  $B$ , berbeda dari sistem klasik asal dengan memperkenalkan potensial tera eksternal, misalnya koneksi alamiah  $U(K)$  pada bundel  $B$ . Agar tak mengubah

persamaan gerak klasik, diperlukan koneksi datar (*flat connection*) pada  $B$  dalam mengklasifikasi pengkuantuman tak setara sistem klasik tetap. Pada setiap bundel, holonomi koneksi datar memberikan wakilkan uniter grup fundamental  $\pi_1(Q)$  berdimensi- $K$ . Sebaliknya, jika terdapat wakilkan uniter, misalnya  $\rho$ , maka dapat dibangun bundel vektor kompleks yang holonominya mewujudkan wakilkan itu. Jika  $\rho$  dapat disusutkan, maka bundel terkait  $(B_\rho)$  pecah menjadi jumlahan Whitney untuk berbagai bundel  $B_{\rho_i}$ , dengan  $\rho_i$  adalah komponen tak tersusutkan bagi  $\rho$ .

Penguraian serupa juga terjadi pada ruang Hilbert untuk berbagai tampang bundel  $B_\rho$ . Jika  $\mathcal{R}(\pi_1(Q))$  melambangkan himpunan semua WUTT (kelas setara) berdimensi terhingga dari  $\pi_1(Q)$  maka teori kuantum yang terkait dengan berbagai bundel tak tersusutkan  $B_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathcal{R}$  mewakili *pengkuantuman utama* bagi sistem asal.  $\mathcal{R}$  selalu mengandung paling tidak satu unsur, misalnya WUTT sederhana (trivial) yang terkait dengan teori kuantum yang mempunyai fungsi bernilai kompleks biasa sebagai vektor keadaan. Meskipun demikian, umumnya himpunan semua wakilkan di atas mengandung lebih dari satu unsur, yang menunjukkan kerancuan kinematis di dalam pengkuantuman sistem klasik. Pengkuantuman dengan  $K = 1$  menghasilkan teori kuantum skalar<sup>[14]</sup>, sedangkan teori kuantum yang terkait dengan bundel tak tersusutkan  $\mathbb{C}^K$ ,  $K > 1$ , memiliki simetri internal topologis yang terkait dengan seluruh sistem<sup>[12]</sup>.

Dari uraian di atas jelas bahwa untuk menentukan pengkuantuman tak setara bagi suatu sistem harus dilakukan *pengidentifikasian*  $Q$ , *menentukan*  $\pi_1(Q)$ , *kemudian membangun* WUTT  $\mathcal{R}(\pi_1(Q))$ <sup>[2]</sup>. Pernyataan di atas juga merupakan pernyataan umum yang muncul dalam beberapa prosedur pengkuantuman, misalnya dalam pengkuantuman Borel<sup>[15]</sup>.

Sekarang, prosedur di atas diterapkan untuk sistem  $N$ -zarah identik yang menghuni manifold mulus<sup>1</sup> tersambung lintasan (*path connected*)  $\Sigma$  berdimensi- $(d \geq 2)$ . Tanpa batasan lain, ruang konfigurasi merupakan produk Cartesien  $N$ -lipat dari  $\Sigma$  dengan dirinya sendiri,  $Q = \Sigma^N$ . Meskipun demikian, ketika zarah yang ditinjau adalah zarah identik (tak terbedakan) maka harus diidentifikasi dua titik pada  $\Sigma^N$  yang dibedakan hanya oleh permutasi label zarah. Karena itu ruang konfigurasi merupakan ruang orbit tindakan  $S_N$  pada  $\Sigma^N$ , dengan  $S_N$  adalah grup  $N$ -permutasi. Dengan demikian ruang konfigurasi dapat ditulis sebagai  $Q = \Sigma^N/S_N$ , yaitu produk simetris  $N$ -lipat

<sup>1</sup>Perlu dicatat bahwa di sini digunakan istilah “mulus”, yang dalam istilah Jerman-nya *glatt* sedangkan dalam istilah Inggris lebih populer dengan *smooth*. Jika manifold, pemetaan, atau fungsi mempunyai derajat diferensiasi  $\mathbb{C}^k$  maka mereka dikatakan halus untuk  $k < \infty$  dan dikatakan mulus untuk  $k = \infty$ . Lebih jauh lagi, jika fungsi atau pemetaan di samping mulus juga dapat dinyatakan dalam bentuk deret yang konvergen maka mereka disebut analitik.

bagi  $\Sigma$ . Terdapat dua masalah berkaitan dengan pemilihan ruang konfigurasi itu, pertama tindakan  $S_N$  pada  $\Sigma^N$  mempunyai sejumlah titik tetap dan karena itu umumnya  $Q$  bukanlah manifold mulus, jadi teknik pengkuantuman biasa yang memakai bundel tangen (*tangent bundle*) pada  $Q$  tak dapat diterapkan. Kedua, meskipun seandainya prosedur pengkuantuman yang konsisten dapat diperoleh, namun hanya teori dengan statistika Bose yang akan muncul akibat hadirnya sejumlah titik yang bertumpuk bagi dua atau lebih zarah di dalam ruang konfigurasi. Untuk mengatasi masalah itu, himpunan semua titik dengan dua atau lebih koordinat zarah yang bertumpuk, dilambangkan dengan  $\Delta$  ( $\Delta \equiv \{(x_1, \dots, x_N) \in \Sigma^N \mid x_i = x_j \forall i \neq j\}$ ), tidak diperkenankan ada di dalam ruang konfigurasi. Dengan demikian, sekarang  $S_N$  bertindak secara bebas (tanpa titik tetap) pada  $\Sigma^N - \Delta$ , dan ruang konfigurasi diberikan oleh ruang orbit

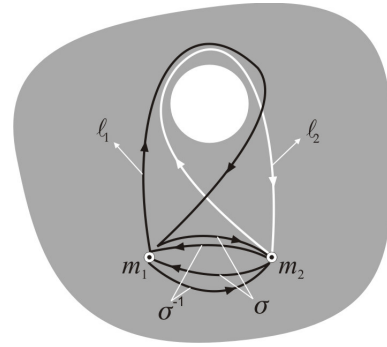
$$Q_N(\Sigma) \equiv (\Sigma^N - \Delta)/S_N, \quad (1)$$

yang merupakan manifold mulus.

Pengkuantuman tak setara terkait dengan grup fundamental bagi ruang konfigurasi sistem  $\pi_1(Q_N(\Sigma))$ . Grup  $\pi_1(Q_N(\Sigma)) \equiv B_N(\Sigma)$  disebut sebagai *grup braid*  $N$ -untai bagi  $\Sigma$ . Himpunan  $\mathcal{R}(B_N(\Sigma))$  bagi WUTT  $B_N(\Sigma)$  melabelkan pengkuantuman tak setara<sup>[2]</sup>.

Grup  $B_N(\Sigma)$  dibangkitkan oleh dua jenis pembangkit. Pertama, pembangkit jenis  $\mathcal{L}$  yang terdiri dari semua pembangkit di dalam kelas homotopi yang berkaitan dengan berbagai lingkaran (*loop*) tak terkerutkan selain permutasi zarah. Misalnya,  $\ell_1 \in \mathcal{L}$  adalah lintasan yang berawal dan berakhir di titik  $m_1$  mengitari lingkaran tak terkerutkan di dalam  $\Sigma$ , demikian juga dengan  $\ell_2$  dan seterusnya. Kedua, pembangkit jenis  $\mathcal{S}$  yang merupakan himpunan semua pembangkit permutasi zarah  $\sigma_i$  dengan  $1 \leq i \leq N - 1$  di dalam  $B_N(\Sigma)$ . Misalnya cakram terbuka berdimensi- $d$  di dalam  $\Sigma$  mengandung sejumlah titik letak zarah  $m_1, \dots, m_N$ . Untuk setiap  $i < N$  terdapat lintasan  $\sigma_i$  yang mempertukarkan zarah pada  $m_i$  dengan zarah pada  $m_{i+1}$ , sementara pada titik lainnya tak berubah. Dengan demikian, sebuah unsur dari  $B_N(\Sigma)$  dapat dianggap sebagai kelas homotopi lintasan di dalam  $\Sigma^N - \Delta$  yang semua titik awal dan akhirnya terkait dengan permutasi untuk berbagai koordinat zarah. Contoh, ditinjau sistem 2 zarah identik di dalam  $\mathbb{R}^2$  yang berlubang satu, sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 1. Kaitan  $\sigma \circ \ell_1 \circ \sigma^{-1}$  berperan mempertukarkan zarah pada  $m_2$  dengan zarah pada  $m_1$  kemudian melintaskannya (dari  $m_1$ ) mengitari lubang, dilanjutkan dengan mempertukarkan kembali zarah pada  $m_1$  dengan zarah pada  $m_2$ , hasil ini homotopis dengan  $\ell_2$ ; orientasi lintasan searah jarum jam. Hubungan antara berbagai anggota  $\mathcal{L}$  dan  $\mathcal{S}$  dapat sangat rumit dan tergantung pada  $\Sigma$ .

Untuk melihat kaitan antara statistika sistem zarah



GAMBAR 1: Lintasan yang dibangkitkan oleh kaitan  $\sigma \circ \ell_1 \circ \sigma^{-1}$ ; homotopis dengan  $\ell_2$

dan pengkuantuman tak setara, ditinjau  $\varsigma_N(\Sigma)$  yang merupakan subgrup bagi  $B_N(\Sigma)$  yang dibangkitkan oleh  $\mathcal{S}$  ( $\varsigma_N(\Sigma) \subset B_N(\Sigma)$ ). Statistika  $N$ -zarah identik pada  $\Sigma$  yang diberikan oleh WUTT  $\rho$  bagi  $B_N(\Sigma)$  ditentukan oleh  $\rho$  bagi  $\varsigma_N(\Sigma)$ , dan dilambangkan dengan  $\rho \downarrow_{\varsigma_N(\Sigma)}$  (umumnya tersusutkan). Dengan kata lain, dalam bahasa yang lebih mudah,  $\rho$  bagi  $B_N(M)$  dapat dipilah menjadi dua jenis wakilan, yaitu  $\rho(\ell)$  yang terkait dengan pembangkit jenis  $\mathcal{L}$  bagi grup  $B_N(M)$  dan  $\rho(\sigma) = \rho \downarrow_{\varsigma_N(\Sigma)}$  yang terkait dengan pembangkit jenis  $\mathcal{S}$ . Statistika bagi sistem  $N$ -zarah identik ditentukan oleh  $\rho(\sigma)$ . Terkait dengan persoalan tersebut Imbo<sup>[2]</sup> mengusulkan definisi: “Dua WUTT  $\rho_1$  dan  $\rho_2$  dikatakan setara secara statistik (ditulis  $\rho_1 \sim \rho_2$ ) jika untuk bilangan bulat positif  $s$  dan  $t$  berlaku

$$\mathbb{I}_s \otimes (\rho_1 \downarrow_{\varsigma_N(\Sigma)}) \simeq \mathbb{I}_t \otimes (\rho_2 \downarrow_{\varsigma_N(\Sigma)}) .” \quad (2)$$

Lambang “ $\simeq$ ” berarti kesetaraan antara dua wakilan dan “ $\otimes$ ” melambangkan produk tensor *inner*. Lambang  $\mathbb{I}_s$  dan  $\mathbb{I}_t$  berturut-turut adalah wakilan trivial bagi  $\varsigma_N$  berdimensi  $s$  dan  $t$ , yang kehadirannya hanya menyangkut soal kedimensian yang berbeda bagi  $\rho_1$  dan  $\rho_2$ . Dengan kata lain,  $\rho_1 \sim \rho_2$  jika  $\rho_1 \downarrow_{\varsigma_N(\Sigma)}$  dan  $\rho_2 \downarrow_{\varsigma_N(\Sigma)}$  mengandung komponen tak tersusutkan yang sama dan dalam jumlah yang sama pula<sup>[3]</sup>. Kaitan kesetaraan memecah himpunan  $\mathcal{R}(B_N(\Sigma))$  menjadi berbagai kelas setara statistik, dan setiap pecahan hanya mengandung WUTT sedemikian hingga pengkuantuman yang terkait menghasilkan statistika yang sama untuk  $N$ -zarah identik. Jika  $\Sigma$  tersambung sederhana ( $\pi_1(Q_N(\Sigma)) = \{1\}$  (identitas)) maka  $\varsigma_N(\Sigma) = B_N(\Sigma)$  dan pengkuantuman tertentu akan memberikan statistika yang tertentu pula. Definisi di atas juga memberikan perampatan alamiah untuk kasus  $\pi_1(Q_N(\Sigma)) \neq \{1\}$ .

Karena  $S_N$  bertindak secara bebas pada  $\Sigma^N - \Delta$ ,

maka berlaku penyeratan (*fibration*) berikut:

$$\begin{array}{ccc} S_N & \hookrightarrow & \Sigma^N - \Delta \\ & \downarrow & \\ & Q_N(\Sigma) & . \end{array} \quad (3)$$

Larikan homotopi eksak panjang<sup>[16,17]</sup> pada penyeratan ini menghasilkan larikan eksak pendek untuk  $B_N(\Sigma)$ :

$$\{1\} \rightarrow \pi_1(\Sigma^N - \Delta) \xrightarrow{\alpha} B_N(\Sigma) \xrightarrow{\beta} S_N \rightarrow \{1\}. \quad (4)$$

Dari sifat larikan eksak pendek, jelas bahwa untuk pers.(4),

$$\text{Ker}(\alpha) = \{1\}, \text{Img}(\alpha) = \text{Ker}(\beta), \text{ dan } \text{Img}(\beta) = S_N$$

( $\text{Ker}=\text{kernel}$ ,  $\text{Img}=\text{image}$ ). Dengan demikian, pembangkit kelas  $\mathcal{L}$  bagi  $B_N(\Sigma)$  berada di dalam *kernel* epimorfisme  $\beta$ , sedangkan pembangkit  $\sigma_i$  di dalam kelas  $\mathcal{S}$  memetakan ke perubahan yang sesuai di dalam  $S_N$ . Karena itu  $\beta \downarrow_{\varsigma_N}$  merupakan epimorfisme dari  $\varsigma_N(\Sigma)$  ke  $S_N$ .

Ditinjau sebuah WUTT  $\rho$  bagi  $S_N$ , WUTT itu dapat dinaikkan ke sebuah WUTT  $\rho'$  bagi  $B_N(M)$ , yaitu  $\rho'(b) \equiv \rho(\beta(b))$  untuk semua  $b \in B_N(M)$ . Jelasnya,  $\rho' \downarrow_{\varsigma_N}$  adalah suatu “pengangkat” bagi  $\rho$  ke  $\varsigma_N(M)$ . Jadi, paling tidak terdapat sejumlah pilihan statistik untuk  $N$ -zarah sebanyak WUTT bagi  $S_N$ .

## 2.1 Kasus pada Ruang Berdimensi- $(d \geq 3)$

Kodimensi  $\Delta$  (komplemen-dimensi  $\Delta$ ) di dalam  $\Sigma^N$  adalah  $d$ . Karena itu jika  $d \geq 3$  maka  $\pi_1(\Sigma^N - \Delta)$  isomorfis dengan  $\pi_1(\Sigma)^N$ ,  $\pi_1(\Sigma^N - \Delta) \cong \pi_1(\Sigma)^N$ <sup>[18]</sup>. Grup  $\pi_1(\Sigma)^N$  adalah produk langsung  $N$ -salinan bagi grup  $\pi_1(\Sigma)$ ,

$$\pi_1(\Sigma)^N = \underbrace{\pi_1(\Sigma) \times \pi_1(\Sigma) \times \cdots \times \pi_1(\Sigma)}_{N\text{-kali}}.$$

Jadi dengan menggunakan pers.(4),  $B_N(\Sigma) \cong S_N$  jika  $\pi_1(\Sigma)^N = \{1\}$ , dan hanya parastatistika yang mungkin (statistika Bose dan Fermi adalah kasus khusus dari parastatistika). Khususnya, hal tersebut benar untuk  $\Sigma = \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 3$ . Ditinjau  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \Sigma$  yang merupakan peta koordinat lokal. Dengan kealamiah larikan homotopi eksak panjang bagi pers.(3) diperoleh diagram komutatif berikut ( $d \geq 3$ ):

$$\begin{array}{ccccc} \{1\} & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{R}^{dN}) & \longrightarrow & B_N(\mathbb{R}^d) & \xrightarrow{\gamma} & S_N & \longrightarrow & \{1\} \\ & & \downarrow f_*^N & & \downarrow g & & \downarrow I & & \\ \{1\} & \longrightarrow & \pi_1(\Sigma)^N & \xrightarrow{\alpha} & B_N(\Sigma) & \xrightarrow{\beta} & S_N & \longrightarrow & \{1\}, \end{array} \quad (5)$$

dengan  $I$  merupakan pemetaan identitas sedangkan  $\gamma$  isomorfisme mengingat  $\pi_1(\mathbb{R}^{dN}) = \{1\}$ . Pemetaan

$\tau = g \circ \gamma^{-1} \circ I^{-1}$  merupakan homomorfisme pemilahan (*splitting homomorphism*) untuk larikan eksak pendek bagi  $B_N(\Sigma)$ , yaitu  $\beta \circ \tau$  adalah pemetaan identitas pada  $S_N$ . Jadi  $B_N(\Sigma)$  adalah produk semilangsung bagi  $\pi_1(\Sigma)^N$  dengan  $S_N$ ,

$$B_N(\Sigma) = \pi_1(\Sigma)^N \otimes_{\mu} S_N. \quad (6)$$

Definisi pemetaan  $\mu: S_N \rightarrow \text{Aut}(\pi_1(\Sigma)^N)$  diberikan oleh ( $\sigma \in S_N, \ell_i \in \pi_1(\Sigma), 1 \leq i \leq N$ )

$$\mu(\sigma)(\ell_1, \dots, \ell_N) = (\ell_{\sigma(1)}, \dots, \ell_{\sigma(N)}). \quad (7)$$

Jika kedua grup yang diproduk-semilangsungkan di dalam pers.(6) adalah grup terhingga (*finite group*) maka produk semilangsung itu juga disebut sebagai *produk wreath permutasi* (dilambangkan dengan “ $\wr$ ”)<sup>[19,20]</sup> antara  $\pi_1(\Sigma)$  dan  $S_N$ . Karena itu, untuk kasus  $\pi_1(\Sigma)$  dan  $S_N$  terhingga pers.(6) dapat ditulis sebagai

$$B_N(\Sigma) = \pi_1(\Sigma) \wr S_N \quad (8)$$

untuk  $d \geq 3$ .

## 2.2 Kasus pada Bidang (Ruang Berdimensi-2)

Berbeda dengan kasus  $d \geq 3$ , pada kasus  $d = 2$  situasinya lebih kompleks dan menghasilkan spektrum statistik yang lebih kaya. Persoalan pertama pada kasus ini adalah bahwa kodimensi bagi  $\Delta$  di dalam  $\Sigma^N$  adalah 2. Karena itu, umumnya  $\pi_1(\Sigma^N - \Delta)$  tidak isomorfis dengan  $\pi_1(\Sigma)^N$ ; yang membedakannya dengan kasus  $d \geq 3$ .

Untuk  $\Sigma = \mathbb{R}^2$  dan  $N \geq 2$ ,  $\pi_1(\mathbb{R}^{2N} - \Delta)$  tidak trivial.  $B_N(\mathbb{R}^2) = \varsigma_N(\mathbb{R}^2)$  adalah grup tak-hingga yang tak abelian untuk  $N \geq 3$  ( $B_2(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{Z}$ ), dengan  $\varsigma_N(\mathbb{R}^2)$  adalah subgrup bagi  $B_N(\mathbb{R}^2)$  yang dibangkitkan oleh  $\sigma_i$ ,  $1 \leq i \leq N-1$ , dengan kaitan (indeks berulang dengan garis atas berarti tidak ada penjumlahan meliputinya).

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i & |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & 1 \leq i \leq N-2. \end{aligned} \quad (9)$$

WUTT berdimensi-1 bagi grup ini diberikan oleh  $\sigma_i = e^{i\theta}$  untuk semua  $i$ , dengan  $0 \leq \theta < 2\pi$ . *Statistika skalar* yang terkait dengan WUTT tersebut disebut dengan statistika fraksional, atau statistika- $\theta$ <sup>[2,21]</sup>; WUTT  $\rho$  bagi  $B_N(\Sigma)$  ( $\rho(\sigma_i)$ ) adalah matriks skalar untuk semua  $i$ . Terdapat WUTT berdimensi lebih tinggi, yang menghasilkan statistika tak skalar jenis baru untuk zarah identik<sup>[2,3,22,23]</sup>. Sebagai catatan, untuk semua  $N \geq 2$ ,  $H_1(Q_N(\mathbb{R}^2)) \cong B_N(\mathbb{R}^2)_{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}$ , dan karena  $\text{Hom}(\mathbb{Z}, \text{U}(1)) \cong \text{U}(1)$  maka pengkuantuman dan statistika skalar bagi sistem dilabeli oleh sudut  $\theta$ , yang merupakan parameter bagi statistika fraksional. Indeks “ab” di dalam

$B_N(\mathbb{R}^2)_{ab}$  digunakan untuk melambangkan pengabelan grup  $B_N(\mathbb{R}^2)$ ; yaitu  $B_N(\mathbb{R}^2)_{ab}$  adalah kuosien  $B_N(\mathbb{R}^2)/[B_N(\mathbb{R}^2), B_N(\mathbb{R}^2)]$  dengan  $[B_N(\mathbb{R}^2), B_N(\mathbb{R}^2)]$  adalah subgrup komutator bagi  $B_N(\mathbb{R}^2)$ .

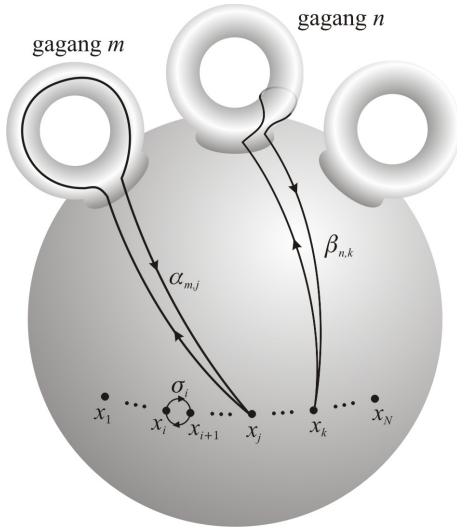
Tidak seperti pada dimensi yang lebih tinggi, tampilan bagi  $\zeta_N(\Sigma)$  yang mendefinisikan statistika tidak perlu setara dengan tampilan di atas  $\mathbb{R}$ . Di samping itu, untuk ruang topologis berdimensi-2, perluasan di dalam pers.(4) umumnya tidak akan terpilah.

Selanjutnya, dibahas kasus pengkuantuman tak setara dan statistika bagi sistem zarah identik yang menghinai ruang topologis atau manifold kompak dan tertutup<sup>[2,3,6,23-26]</sup>.

Ditinjau manifold kompak dan tertutup  $\Sigma = S^2$ .  $B_N(S^2)$  juga dibangkitkan oleh  $\sigma_i$  tetapi, di samping kaitan (9), terdapat tambahan kaitan

$$\sigma_1 \cdots \sigma_{N-2} \sigma_{N-1}^2 \sigma_{N-2} \cdots \sigma_1 = \mathbf{1}. \quad (10)$$

Kaitan (10) menghasilkan WUTT berdimensi-1 bagi  $B_N(S^2)$ , yaitu  $\sigma_i = e^{in\pi/(N-1)}$ , dengan  $1 \leq i \leq N-1$ ,  $1 \leq n \leq 2N-3$ . Jadi hanya subhimpunan terbatas bagi statistika fraksional yang diizinkan, dengan spektrum yang bergantung pada cacah zarah  $N$ . WUTT berdimensi lebih tinggi menghasilkan statistika tak fraksional jenis baru. Selanjutnya akan dihadirkan perampatan hasil di atas untuk semua manifold kompak, terorientasi, dan tertutup berdimensi-2.



GAMBAR 2: Beberapa lintasan-homotopi representatif yang mendefinisikan pembangkit grup *braid* untuk  $N$ -zarah identik tak berspin. Pembangkit pertukaran zarah  $\{\sigma_i | 1 \leq i \leq N-1\}$  didefinisikan untuk semua permukaan, sedangkan pembangkit lingkaran zarah tunggal  $\{\alpha_{m,j}, \beta_{m,j} | 1 \leq m \leq g, 1 \leq j \leq N\}$  hanya ada untuk permukaan bergenus  $g \geq 1$

Ditinjau permukaan kompak terorientasi bergenus- $g$  ( $T_g^2$ ). Permukaan ini dapat dipandang sebagai bola

bergagang  $g$ -buah (lihat Gambar 2). Di samping dibangkitkan oleh  $\sigma_i$  dengan  $i \leq N-1$  yang mempertukarkan zarah pada  $x_i$  dengan zarah pada  $x_{i+1}$ , grup *braid*  $B_N(T_g^2)$  bagi sistem  $N$ -zarah identik juga dibangkitkan oleh  $\alpha_{m,j}$ , dan  $\beta_{m,j}$  dengan  $1 \leq m \leq g$  dan  $1 \leq j \leq N$ . Pembangkit  $\alpha_{m,j}$  dan  $\beta_{m,j}$  membuat zarah pada  $x_j$  menyusuri lingkaran tak terkerutkan pada gagang ke- $m$ , sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 2. Kaitan antar berbagai pembangkit ini juga diberikan oleh pers.(9) bersama-sama dengan

$$\alpha_{m,i+1} = \sigma_i \alpha_{m,i} \sigma_i^{-1}; \quad (11a)$$

$$\beta_{m,i+1} = \sigma_i \beta_{m,i} \sigma_i^{-1}; \quad (11b)$$

$$\beta_{m,i}^{-1} \alpha_{m,i+1} \beta_{m,i} \alpha_{m,i+1}^{-1} = \sigma_i^2; \quad (11c)$$

$$\sigma_1 \cdots \sigma_{N-2} \sigma_{N-1}^2 \sigma_{N-2} \cdots \sigma_1 = \prod_{n=1}^g \beta_{n,1} \alpha_{n,1} \beta_{n,1}^{-1} \alpha_{n,1}^{-1}, \quad (11d)$$

dengan  $1 \leq i \leq N-1$ ,  $1 \leq m \leq g$ , dan produk di dalam pers.(11d) diurutkan dengan faktor  $n = 1$  ke kanan. Pers.(11a) dan (11b) menghubungkan lingkaran satu zarah menyusuri gagang ke- $m$  satu dengan lainnya. Pers.(11c) menyatakan bahwa lingkaran bagi zarah pada  $x_i$  yang melingkari titik zarah  $x_{i+1}$  adalah homotopis dengan sebuah komutator bagi lingkaran satu zarah. Persamaan terakhir, pers.(11d), adalah perampatan kaitan (10).

Ciri penting yang tercermin di dalam statistika adalah ketakterbedaan zarah, yaitu  $Q_N(\Sigma)$  adalah invarian terhadap pertukaran zarah  $\sigma_i$ . Pembangkit grup *braid* yang lain, yang muncul pada permukaan tersambung tak sederhana, adalah lingkaran-lingkaran satu zarah seperti  $\alpha_{m,i}$  dan  $\beta_{m,i}$ , dan mereka juga ada ketika zarah terbedakan. Meskipun lingkaran-lingkaran satu zarah ini mempengaruhi spektrum pengkuantuman, namun tidak menggambarkan statistika. Untuk  $\Sigma = T_g^2$  ( $g \geq 1$ ), sangat mungkin mendapatkan WUTT berdimensi- $(k \geq 1)$  dengan pembangkit statistik,  $\sigma_i$ , yang diwakili oleh faktor fase statistika fraksional kali matriks satuan

$$U^{\sigma_i} = e^{i\theta_i} \mathbf{1}_k. \quad (12)$$

Karena itu statistika untuk sistem ini digambarkan oleh wakilan berdimensi-1,  $U^{\sigma_i} = e^{i\theta_i}$ , meskipun teori kuantum adalah teori kuantum berdimensi- $k$ . Statistika jenis ini selanjutnya disebut dengan *statistika fraksional terrampatkan*.

Selanjutnya, dengan menggunakan notasi  $\sigma_i = U^{\sigma_i}$ ,  $\alpha_{m,i} = U^{\alpha_{m,i}}$ , dan  $\beta_{m,i} = U^{\beta_{m,i}}$ , jelas bahwa dari pers.(9) dan (11) dapat diperoleh:

$$\sigma_i = e^{i\theta} \mathbf{1}_k \equiv \sigma; \quad (13a)$$

$$\alpha_{m,i} = \alpha_m; \quad \beta_{m,i} = \beta_m; \quad (13b)$$

$$\alpha_m \beta_m \alpha_m^{-1} \beta_m^{-1} = \sigma^2; \quad (13c)$$

$$\sigma^{2(N+g-1)} = \mathbf{1}. \quad (13d)$$

Pers.(13d) menghasilkan  $e^{i2(N+g-1)\theta} = 1$ , yang untuk  $\theta = p\pi/q$  dapat dipandang sebagai sebuah kendala pada cacah *anyon* tak berspin,  $N = rq + 1 - g$ , dengan  $r$  adalah bilangan bulat (untuk permukaan bola  $g = 0$ ). WUTT yang terkait dengan  $\theta = p\pi/q$  juga dapat diturunkan. Untuk torus ( $g = 1$ ), WUTT-nya berdimensi- $q$ , dan matriks yang terkait, katakanlah  $\tilde{\alpha}$  dan  $\tilde{\beta}$  yang memenuhi pers.(13c) diketahui. Untuk  $g > 1$ , matriks  $\{\alpha_{\tilde{m}}, \beta_{\tilde{m}}\}$  harus berkomutasi dengan matriks  $\{\alpha_{\tilde{n}}, \beta_{\tilde{n}}\}$  untuk  $m \neq n$ . Karena itu WUTT bagi kasus ini adalah berdimensi  $k = q^g$ , dan matriksnya (di atas kesetaraan uniter) adalah

$$\alpha_n = e^{i\varphi_n} \mathbf{1}_q \otimes \cdots \otimes \tilde{\alpha} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_q, \quad (14)$$

$$\beta_n = e^{i\phi_n} \mathbf{1}_q \otimes \cdots \otimes \tilde{\beta} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_q, \quad (15)$$

dengan  $\varphi_n$  dan  $\phi_n$  adalah bilangan real sebarang,  $\otimes$  melambangkan produk *Kronecker* (produk tensor) bagi matriks, dan  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$  muncul sebagai faktor ke- $n$ . Karena itu batasan kinematiknya adalah

$$\theta = \frac{p}{q}\pi; \quad N = rq + 1 - g; \quad k = q^g. \quad (16)$$

Hasil di atas, yang merupakan perampatan hasil bola dan torus, juga dapat diturunkan dengan menggunakan tampilan grup *braid* alternatif<sup>[3]</sup>.

### 3 BEBERAPA CONTOH KONKRET

#### 3.1 Sistem Zarah Identik pada Bidang (Ruang Berdimensi-2)

**Kasus dengan  $\Sigma = \mathbb{R}^2$ .** Grup  $B_N(\mathbb{R}^2)$  dengan  $N \geq 2$  adalah grup tak-hingga yang diketahui sebagai grup *braid* Artin  $N$ -untai<sup>[24]</sup> yang berpenyajian (lihat pers.(9))

$$\begin{aligned} B_N(\mathbb{R}^2) = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{N-1} \mid & \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \\ & \text{untuk } |i - j| \geq 2; \\ & \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \\ & \text{untuk } 1 \leq i \leq N - 2 \rangle. \end{aligned} \quad (17)$$

Untuk sistem dua zarah identik, grup *braid* ini isomorfis dengan grup bilangan bulat,  $B_2(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{Z}$ , dan karena itu tidak mungkin diperoleh WUTT berdimensi- $(\geq 2)$ . Ini berarti tidak ada pengkuantuman tak skalar untuk dua zarah identik pada  $\mathbb{R}^2$ .

Untuk  $N \geq 3$ ,  $B_N(\mathbb{R}^2)$  adalah tak-hingga dan tak-abelan. Untuk lebih jelasnya, ditinjau sistem tiga zarah. Penampilan bagi  $B_3(\mathbb{R}^2)$  untuk sistem ini diberikan oleh

$$B_3(\mathbb{R}^2) = \langle \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \rangle. \quad (18)$$

Alih-alih  $\sigma_1$  dan  $\sigma_2$  didefinisikan pembangkit baru  $\tilde{\sigma}_1 \equiv \sigma_1 \sigma_2$  dan  $\tilde{\sigma}_2 \equiv \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$ , sehingga  $B_3(\mathbb{R}^2)$  sekarang berpenyajian

$$B_3(\mathbb{R}^2) = \langle \tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2 \mid \tilde{\sigma}_1^2 = \tilde{\sigma}_2^3 \rangle. \quad (19)$$

Derajat WUTT berdimensi berhingga bagi  $B_3(\mathbb{R}^2)$  adalah tak terikat. Ungkapan ini dapat dilihat melalui penjelasan berikut.

Telah diketahui bahwa<sup>[24]</sup>

$$\begin{aligned} \pi_1((\mathbb{R}^2)^3 - \Delta) &\cong F_2 \times \mathbb{Z} \\ &= \langle x, y, z \mid xz = zx, yz = zy \rangle, \end{aligned} \quad (20)$$

dengan  $F_2$  adalah grup bebas (*free group*) yang dibangkitkan oleh dua pembangkit ( $x$  dan  $y$ ).  $F_2 \times \mathbb{Z}$  mempunyai sebuah WUTT di dalam setiap dimensi positif  $m$ . Pembangkit  $x$  dipetakan ke matriks uniter  $m \times m$  yang semua swanilainya berbeda, dan  $y$  dipetakan ke matriks uniter  $m \times m$  yang semua unsur bukan diagonalnya tidak nol. Akhirnya,  $z$  dipetakan ke matriks skalar uniter. Ketiga matriks itu akan membangkitkan wakilan uniter  $\rho$  bagi  $F_2 \times \mathbb{Z}$ , dan karena hanya matriks skalar yang komut dengan ketiga matriks itu, maka  $\rho$  tak tersusutkan. Selanjutnya, dengan menggunakan kaitan (4), terlihat bahwa  $F_2 \times \mathbb{Z}$  adalah subgrup normal bagi *indeks terhingga* di dalam  $B_3(\mathbb{R}^2)$ . Di dalam teori wakilan terinduksi, jika grup  $G$  mempunyai sebuah subgrup normal bagi *indeks terhingga* dengan sebuah WUTT berderajat- $m$ , maka  $G$  harus mempunyai sebuah WUTT berderajat terhingga yang lebih besar atau sama dengan  $m$ . Dengan demikian derajat bagi WUTT berdimensi terhingga bagi  $B_3(\mathbb{R}^2)$  adalah tak terikat. Jadi terdapat sejumlah tak hingga jenis statistika tak skalar untuk 3 zarah pada  $\mathbb{R}^2$ .

Dengan menggunakan kaitan (19) dan syarat unitaritas bagi wakilan, semua WUTT berdimensi-2 bagi  $B_3(\mathbb{R}^2)$  dapat diperoleh. Mereka dilabeli oleh dua sudut  $\phi$  dan  $\theta$ , dengan  $0 \leq \phi < 2\pi$  dan  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , yaitu

$$\begin{aligned} \rho(\tilde{\sigma}_1) &= e^{2i\phi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/3} \end{pmatrix}, \\ \rho(\tilde{\sigma}_2) &= e^{3i\phi} \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (21)$$

Untuk  $\theta = 0$ , interval  $\phi$  harus dibatasi, yaitu  $0 \leq \phi < \pi$ , untuk menghindari penghitungan berulang. Kasus dengan  $\theta = 0, \phi = \pi/3$  berkaitan dengan *pengangkat (lift)* bagi WUTT berdimensi-2 untuk  $S_3$ . Sebuah famili parameter-3 bagi WUTT berdimensi-3 untuk  $B_3(\mathbb{R}^2)$  dibangkitkan oleh ( $0 \leq \phi < 2\pi$ )

$$\begin{aligned} \rho(\tilde{\sigma}_1) &= e^{2i\phi} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/3} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4\pi i/3} \end{pmatrix}, \\ \rho(\tilde{\sigma}_2) &= 2e^{3i\phi} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & -\frac{1}{2} + n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & -\frac{1}{2} + n_3^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

dengan  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$  adalah vektor satuan real positif yang semua komponennya tidak nol. Jika  $n_1 = n_2 = n_3 = 1/\sqrt{3}$  maka harus ada batasan bagi interval  $\phi$ , yaitu  $0 \leq \phi < 2\pi/3$  agar tidak terjadi pencacahan berulang.

**Kasus dengan  $\Sigma$  manifold kompak berdimensi-2.** Grup *braid*  $B_N(S^2)$  bagi  $N$ -zarah identik yang menghuni permukaan bola dibangkitkan oleh  $\sigma_i$  yang memenuhi kaitan (9) dan (10). Karena itu, secara terpadu, penyajian  $B_N(S^2)$  dapat ditulis ulang dalam bentuk

$$\begin{aligned} B_N(S^2) = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{N-1} \mid & \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \\ & \text{untuk } |i - j| \geq 2; \\ & \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \\ & \text{untuk } 1 \leq i \leq N - 2; \\ & \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{N-2} \sigma_{N-1}^2 \sigma_{N-2} \cdots \sigma_2 \sigma_1 = 1 \rangle. \end{aligned} \quad (23)$$

WUTT berdimensi-1 bagi grup ini memberikan subhimpunan terbatas bagi statistika fraksional yang diizinkan, dengan spektrum yang bergantung pada cacah zarah  $N$ . WUTT berdimensi lebih tinggi menghasilkan statistika fraksional jenis baru. Sebagai contoh sederhana, ditinjau 2-zarah pada  $S^2$ . Untuk sistem ini,  $B_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$ , yang berarti hanya ada pengkuantuman Bose dan Fermi. Untuk kasus 3-zarah, dari kaitan (23) dan dengan metode sebagaimana diterapkan pada  $\mathbb{R}^2$  diperoleh penyajian

$$B_3(S^2) = \langle \tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2 \mid \tilde{\sigma}_1^3 = \tilde{\sigma}_2^2, \tilde{\sigma}_2 = \tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2 \tilde{\sigma}_1 \rangle \quad (24)$$

dengan  $\tilde{\sigma}_1 = \sigma_1 \sigma_2$  dan  $\tilde{\sigma}_2 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$ . Grup  $B_3(S^2)$  mempunyai orde 12 karena  $\pi_1((S^2)^3 - \Delta) \cong \mathbb{Z}_2$  (lihat pers.(4)). Terdapat 6 WUTT bagi grup ini, 4 WUTT berdimensi-1 dan 2 lainnya berdimensi-2, yaitu

$$\tilde{\sigma}_1 = \lambda^2 \begin{pmatrix} e^{2\pi i/3} & 0 \\ 0 & e^{4\pi i/3} \end{pmatrix} \text{ dan } \tilde{\sigma}_2 = \lambda^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

dengan  $\lambda = 1$  dan  $i$ .

Pada kasus  $N$  zarah identik yang menghuni torus bergenus- $g$ , untuk WUTT berdimensi-1, pers.(9) mempunyai penyelesaian  $\sigma_i = e^{i\theta}$  untuk semua  $i$ , dengan  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Sementara itu, pers.(11c) mempunyai penyelesaian  $\sigma_i^2 = 1$  untuk semua  $i$  maupun  $m$ . Jadi, untuk WUTT berdimensi-1, diperoleh  $e^{2i\theta} = 1$ . Karena itu, fungsi gelombang dengan satu nilai untuk sistem ini hanya dapat menghasilkan statistika Bose (untuk  $\theta = 0$ ) sementara, misalnya, fungsi gelombang dengan dua nilai diperlukan untuk Fermi statistik (untuk  $\theta = \pi$ ). Statistika fraksional tak dapat diperoleh.

Selanjutnya, sebagai contoh, ditinjau sistem 2 zarah identik pada torus bergenus-1  $T^2$ . Grup *braid*  $B_2(T^2)$  dibangkitkan oleh  $\sigma, \alpha$ , dan  $\beta$  yang memenuhi kaitan,

lihat pers.(11),

$$(\sigma\alpha)^2 = (\alpha\sigma)^2; \quad (26a)$$

$$(\sigma\beta)^2 = (\beta\sigma)^2; \quad (26b)$$

$$\sigma^2\beta\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\beta; \quad (26c)$$

$$\sigma^{-1}\alpha\sigma\beta = \beta\sigma\alpha\sigma. \quad (26d)$$

Tanpa mengurangi perampatan, dapat dilakukan pen-diagonalan  $\sigma$  di dalam WUTT  $\rho$  bagi  $B_2(T^2)$ . Karena itu untuk WUTT berdimensi-2, kaitan (26c) menyiratkan adanya kaitan

$$\rho_{\eta,\theta}(\sigma) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & \eta e^{-i\theta} \end{pmatrix} \quad (27)$$

dengan  $0 \leq \theta < 2\pi$  dan  $\eta = \pm$  melabeli wakilan  $\rho$ . Pasangan  $(\eta, \theta) = (+, 0)$  dan  $(+, \pi)$  terlarang karena akan membuat  $\rho$  tersusutkan. Sekarang, untuk setiap pasangan  $(\eta, \theta)$  yang diperbolehkan dapat dibangun beberapa WUTT, misalnya dengan melakukan pemilihan

$$\rho_{\eta,\theta}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan } \rho_{\eta,\theta}(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Perlu dicatat bahwa spektrum statistik yang didefinisikan oleh kaitan (27) mengandung sudut sebarang, berbeda dengan statistika- $\theta$  murni yang diizinkan untuk 2-zarah pada  $T^2$ . Jika dipilih (untuk pasangan  $(\eta, \theta)$ )  $(-, \pi/2)$  maka diperoleh statistika semionik murni, sedangkan pilihan  $(-, 3\pi/2)$  menghasilkan anti-semionik. Semua pasangan yang lain menghasilkan statistika tak murni (abelan) jenis baru. Misalnya, pilihan  $(1, 0)$  dan  $(-, \pi)$  menghasilkan ambistatistika; yang juga terjadi untuk sistem 2-zarah pada dimensi yang lebih tinggi. Pilihan  $(+, \pi/2)$  menghasilkan “ambistatistika semionik” [2,3].

### 3.2 Sistem Zarah Identik di dalam Ruang Berdimensi-3

**Kasus dengan  $\Sigma$  manifold tersambung sederhana.** Sekarang, ditinjau kasus dengan  $\Sigma$  adalah manifold tersambung sederhana berdimensi- $(d \geq 3)$  (misalnya  $\mathbb{R}^d$  dan  $S^d$ , dengan  $d \geq 3$ ). Sebagaimana yang telah diuraikan pada fasal 2.1, untuk kasus ini  $B_N(\Sigma) \cong S_N$  yang wakilannya telah dikaji dengan baik. Jumlah WUTT bagi  $S_N$  sama dengan jumlah partisi bagi bilangan bulat  $N$ , dan dilambangkan dengan  $p(N)$ . Jadi terdapat  $p(N)$  pilihan statistik untuk  $N$ -zarah identik yang bergerak di dalam  $\Sigma$  tersambung sederhana berdimensi tiga atau lebih. Beberapa nilai  $p(N)$  diberikan di dalam Tabel 1 [21,24].  $p(N)$  bertambah secara cepat seiring dengan bertambahnya  $N$ . Untuk  $N$  yang cukup besar, dapat digunakan rumusan asimtot Hardy-Ramanujan [27]

$$p(N) \approx \frac{1}{4N\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{2N/3}}. \quad (29)$$

Untuk  $N \geq 2$  hanya ada dua WUTT berderajat atau berdimensi-1, yang memberikan permutasi genap +1 (terkait dengan statistika Bose) dan permutasi gasal -1 (terkait dengan statistika Fermi). Sedangkan statistika (tak skalar) yang terkait dengan WUTT berdimensi lebih tinggi mewakili perampatan bagi kedua jenis statistika itu.

TABEL 1: Nilai  $p(N)$  untuk  $N$ -zarah identik yang bergerak pada manifold (atau ruang topologis)  $\Sigma$  yang tersambung sederhana berdimensi- $(d \geq 3)$

$N$	$p(N)$	$N$	$p(N)$
2	2	10	42
3	3	20	627
4	5	50	204.266
5	7	100	190.569.292

**Kasus dengan  $\Sigma = \mathbb{RP}^3$ .** Ditinjau 2 zarah identik yang bergerak pada ruang projektif real berdimensi-3  $\mathbb{RP}^3 \equiv S^3/\mathbb{Z}_2$ . Karena  $\pi_1(\mathbb{RP}^3) \cong \mathbb{Z}_2$  maka  $B_2(\mathbb{RP}^3) = \mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_2$ . Grup ini adalah grup dihedral berorde-8,  $D_8$ , yang berpenampakan<sup>[2]</sup>

$$B_2(\mathbb{RP}^3) = \langle \ell, \sigma \mid \ell^2 = \sigma^2 = \mathbf{1}; (\ell\sigma)^2 = (\sigma\ell)^2 \rangle. \quad (30)$$

Kaitan di atas menghasilkan 4 WUTT berdimensi-1 yang diberikan oleh

$$\begin{aligned} \rho_1(\ell) &= 1, \quad \rho_1(\sigma) = 1; \\ \rho_2(\ell) &= -1, \quad \rho_2(\sigma) = 1; \end{aligned} \quad (31a)$$

$$\begin{aligned} \rho_3(\ell) &= 1, \quad \rho_3(\sigma) = -1; \\ \rho_4(\ell) &= -1, \quad \rho_4(\sigma) = -1. \end{aligned} \quad (31b)$$

Pers.(31a) menghasilkan statistika Bose, sedangkan pers.(31b) menghasilkan statistika Fermi.

WUTT berdimensi-2 diberikan oleh

$$\rho_5(\ell) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_5(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

yang memberikan statistika jenis baru, yaitu “statistika setengah Bose - setengah Fermi” (*half Bose-half Fermi statistics*), atau “ambistatistika”<sup>[2]</sup>.

**Kasus dengan  $\Sigma = S^2 \times S^1$ <sup>[28]</sup>.** Ditinjau  $N$ -zarah identik tak berspin yang menghuni alam semesta dengan satu lubang cacing<sup>2</sup> Topologi spasial bagi alam

<sup>2</sup>Formasi lubang cacing harus memenuhi invarian topologis tertentu, katakanlah, manifold spasial harus mengikat manifold-4 Lorentz kompak tersambung mulus yang mengizinkan struktur spinor  $SL(2, \mathbb{C})$ , dan manifold itu bak-ruang dengan mengacu

semesta dengan satu lubang cacing adalah  $S^2 \times S^1$ . Grup fundamental bagi ruang ini adalah  $\pi_1(S^2 \times S^1) \cong \mathbb{Z}$ . Dari pers.(6) diperoleh  $B_N(\Sigma) = \mathbb{Z}^N \otimes_{\mu} S_N$  dengan  $\mathbb{Z}^N = \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{N\text{-kali}}$ . Grup  $\mathbb{Z}^N$  dibangkitkan oleh  $\ell_j$  dan berpenyajian

$$\underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{N\text{-times}} = \langle \ell_1, \dots, \ell_N \mid \ell_j \ell_{j'} = \ell_{j'} \ell_j; j, j' = 1, \dots, N \rangle. \quad (33)$$

Sedangkan penyajian  $S_N$  adalah

$$\begin{aligned} S_N &= \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{N-1} \mid \sigma_i^2 = \mathbf{1}, \\ &\sigma_i \sigma_{i'} = \sigma_{i'} \sigma_i \text{ untuk } |i - i'| \geq 2, \\ &\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ untuk } 1 \leq i \leq N-2 \rangle. \end{aligned} \quad (34)$$

Pemetaan  $\mu : S_N \longrightarrow \text{Aut } \mathbb{Z}^N$  menentukan tindakan  $S_N$  terhadap  $\mathbb{Z}^N$ , dan menghasilkan persamaan

$$\begin{aligned} \sigma_i^{-1} \ell_i \sigma_i &= \ell_{i+1}, \quad \sigma_i^{-1} \ell_{i+1} \sigma_i \\ &= \ell_i, \quad \sigma_i^{-1} \ell_j \sigma_i = \ell_j \text{ untuk } j \neq i \text{ dan } i+1, \end{aligned} \quad (35)$$

dengan  $i \leq N-1$  dan  $j \leq N$ . Dengan menggunakan persamaan pertama, semua  $\ell_j$  ( $j = 2, 3, \dots, N$ ) dapat dinyatakan dalam  $\ell_1$ , atau, untuk penulisan lebih ringkas, dengan mendefinisikan  $\ell_1 \equiv \sigma_0 \ell \sigma_0$  dengan  $\sigma_0 \equiv \mathbf{1}$ ,  $\ell_j$  dapat dinyatakan dalam  $\ell$ , sebagai

$$\ell_j = \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \cdots \sigma_1 \sigma_0 \ell \sigma_0 \sigma_1 \cdots \sigma_{j-2} \sigma_{j-1}, \quad (36)$$

dengan  $j = 1, \dots, N$ . Jadi (dari pers.(33), (34) dan (36)) diperoleh penyajian  $B_N(\Sigma)$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} B_N(\Sigma) &= \langle \ell; \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{N-1} \mid \\ &(\sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \cdots \sigma_1 \sigma_0 \ell \sigma_0 \sigma_1 \cdots \sigma_{j-2} \sigma_{j-1}) \\ &(\sigma_{j'-1} \sigma_{j'-2} \cdots \sigma_1 \sigma_0 \ell \sigma_0 \sigma_1 \cdots \sigma_{j'-2} \sigma_{j'-1}) = \\ &(\sigma_{j'-1} \sigma_{j'-2} \cdots \sigma_1 \sigma_0 \ell \sigma_0 \sigma_1 \cdots \sigma_{j'-2} \sigma_{j'-1}) \\ &(\sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \cdots \sigma_1 \sigma_0 \ell \sigma_0 \sigma_1 \cdots \sigma_{j-2} \sigma_{j-1}) \\ &\text{untuk } j, j' = 1, \dots, N; \\ &\sigma_i^2 = \mathbf{1}; \quad \sigma_i \sigma_{i'} = \sigma_{i'} \sigma_i \text{ untuk } |i - i'| \geq 2; \\ &\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \\ &\text{untuk } 1 \leq i \leq N-2 \rangle. \end{aligned} \quad (37)$$

Untuk sistem dua zarah, dari pers.(37), penyajian  $B_2(\Sigma)$  adalah

$$B_2(\Sigma) = \langle \ell, \sigma \mid \ell \sigma \ell \sigma = \sigma \ell \sigma \ell, \sigma^2 = \mathbf{1} \rangle, \quad (38)$$

dengan  $\sigma$  menggantikan  $\sigma_1$ . WUTT berdimensi-1 dapat diperoleh dengan mendefinisikan  $\ell = e^{i\alpha}$  dan  $\sigma =$

metrik Lorentz. Persyaratan itu hanya dipenuhi oleh sejumlah genap lubang cacing. Meskipun demikian, dimungkinkan untuk menciptakan satu atau sejumlah gasal lubang cacing dengan melibatkan “*kink*” gravitasi sedemikian hingga jumlah lubang cacing ditambah jumlah “*kink*” adalah genap (modulo-2)<sup>[29–31]</sup>.



$e^{i\beta}$ . Dari batasan  $\sigma^2 = \mathbf{1}$  diperoleh  $\beta = m\pi$  dengan  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Untuk  $m$  sama dengan 0 atau genap dihasilkan  $\sigma = 1$ , sedangkan untuk  $m$  ganjil dihasilkan  $\sigma = -1$ . Sementara itu, tidak ada batasan nilai yang diizinkan bagi  $\alpha$ . Karena itu, WUTT berdimensi-1 bagi  $B_2(\Sigma)$  diberikan oleh

$$\rho_1(\ell) = e^{i\alpha}, \quad \rho_1(\sigma) = 1; \quad \rho_2(\ell) = e^{i\alpha}, \quad \rho_2(\sigma) = -1. \quad (39)$$

Jadi terdapat tak hingga WUTT berdimensi-1 bagi  $B_2(\Sigma)$  yang terkait dengan sejumlah tak hingga kemungkinan nilai  $\alpha$ . Meskipun demikian hanya terdapat dua macam statistika yang mungkin, yaitu statistika Bose yang dicirikan oleh  $\rho_1(\sigma) = 1$  dan statistika Fermi yang dicirikan oleh  $\rho_2(\sigma) = -1$ .

Selanjutnya, WUTT berdimensi-2 bagi  $B_2(\Sigma)$  dapat dicari dengan menggunakan matriks  $2 \times 2$  sebarang. Dengan menerapkan syarat uniteritas yang tak tersusutkan dan syarat sebagaimana dinyatakan dalam pers.(38) diperoleh

$$\rho_3(\ell) = \begin{pmatrix} \pm i\lambda e^{\frac{1}{2}(\gamma+\gamma')} & \pm \sqrt{1-\lambda^2}e^{i\gamma} \\ \pm \sqrt{1-\lambda^2}e^{i\gamma'} & \pm i\lambda e^{\frac{1}{2}(\gamma+\gamma')} \end{pmatrix},$$

$$\rho_3(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (40)$$

dengan  $\lambda$ ,  $\gamma$  dan  $\gamma'$  adalah bilangan real sebarang dan  $\lambda^2 < 1$  (jika  $\lambda^2 = 1$  maka pers.(40) dapat disusutkan menjadi WUTT berdimensi-1.) WUTT di atas memberikan statistika eksotik setengah Bose - setengah Fermi (ambistatistika) sebagaimana pada kasus sebelumnya (kasus dengan  $\Sigma = \mathbb{RP}^3$ ).

Untuk sistem 3 zarah identik tak berspin ( $N = 3$ ), penyajian  $B_3(\Sigma)$  (dari pers.(37)) adalah

$$B_3(\Sigma) = \langle \ell, \sigma_1, \sigma_2 | \ell [\sigma_1 \ell \sigma_1, \sigma_2 \sigma_1 \ell \sigma_1 \sigma_2] = \sigma_1 \ell \sigma_1 [\sigma_2 \sigma_1 \ell \sigma_1 \sigma_2, \ell] = \sigma_2 \sigma_1 \ell \sigma_1 \sigma_2 [\ell, \sigma_1 \ell \sigma_1]; \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \mathbf{1}, \quad \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \rangle. \quad (41)$$

Serupa dengan kasus 2 zarah, WUTT berdimensi-1 untuk sistem ini dapat diperoleh dengan mendefinisikan  $\sigma_1^2 = e^{i\beta_1}$  dan  $\sigma_2^2 = e^{i\beta_2}$ . Batasan  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$  menentukan pilihan  $\rho_1$  dan  $\rho_2$  bagi kedua  $\sigma$ , yaitu  $\rho(\sigma_1) = \rho(\sigma_2)$ . Karena itu diperoleh

$$\rho_1(\ell) = e^{i\alpha}, \quad \rho_1(\sigma_1) = \rho_1(\sigma_2) = 1; \\ \rho_2(\ell) = e^{i\alpha}, \quad \rho_2(\sigma_1) = \rho_2(\sigma_2) = -1, \quad (42)$$

yang hanya memberikan statistika Bose dan Fermi.

Untuk WUTT berdimensi-2, diperoleh

$$\rho_3(\ell) = \begin{pmatrix} \pm \sqrt{1-\lambda^2}e^{i\gamma'} & \pm \lambda e^{i(\gamma'+\gamma)} \\ \mp \lambda e^{i(\gamma'-\gamma)} & \pm \sqrt{1-\lambda^2}e^{i\gamma'} \end{pmatrix},$$

$$\rho_3(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (43)$$

$$\rho_3(\sigma_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \pm \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\gamma} \\ \pm \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\gamma} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

dengan  $\gamma$ ,  $\gamma'$  dan  $\lambda$  adalah bilangan real sebarang dan  $\lambda^2 \leq 1$ . Terdapat tak terhingga jenis baru statistika yang muncul akibat sejumlah tak terhingga kemungkinan nilai bagi  $\gamma$ . Ketika  $\gamma = 0$ , pers.(43) merupakan WUTT berdimensi-2 bagi  $S_N$  di dalam teori parastatistika, sehingga statistika jenis baru ini dapat disebut sebagai “statistika parakontinu” (*paracontinuous-statistics*)<sup>[28,32]</sup>.

TABEL 2: Berbagai nilai  $\theta$  yang mencirikan statistika untuk sistem  $N$ -zarah identik yang hidup di dalam manifold  $\Sigma$

$\Sigma$	$\theta$
$\dim \Sigma \geq 3$	$0, \pi$
Manifol-2 kompak	
tertutup $\not\cong S^2$	$0, \pi$
$S^2$	$j\pi/(N-1);$ $j = 0, 1, \dots, 2N-3$
$\Sigma \subseteq \mathbb{R}^2$	$0 \leq \theta < 2\pi$

#### 4 KESIMPULAN

Pengkuantuman tak setara bagi sistem  $N$ -zarah identik berpadanan-(1-1) dengan WUTT grup fundamental bagi ruang konfigurasi kanonik sistem, yang isomorfis dengan grup *braid*  $N$ -untai bagi ruang spasial yang dihuni oleh sistem zarah itu. Jenis statistika yang mungkin ditentukan oleh WUTT bagi grup *braid* yang terkait dengan pembangkit permutasi zarah.

Statistika skalar yang berpadanan-(1-1) dengan WUTT berdimensi-1 bagi grup *braid* sistem terangkum dalam statistika- $\theta$ . Untuk sistem zarah identik di dalam manifold  $\Sigma$  berdimensi-2 yang homeomorfis dengan  $\mathbb{R}^2$ , statistika skalar yang mungkin adalah statistika- $\theta$  atau fraksional yang nilainya berada pada jangkauan  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Untuk manifold yang homeomorfis dengan  $S^2$ , hanya ada subhimpunan terbatas bagi statistika fraksional yang diizinkan, dengan spektrum yang bergantung pada cacah zarah  $N$ , sedangkan untuk manifold kompak tertutup berdimensi-2 yang tidak homeomorfis dengan  $S^2$  statistika skalar yang mungkin hanyalah statistika Bose dan Fermi. WUTT

berdimensi-1 bagi sistem di dalam manifold berdimensi- $(d \geq 3)$  hanya memberikan statistika Bose dan Fermi.

WUTT berdimensi lebih tinggi akan memberikan berbagai jenis statistika yang lebih kaya. Untuk sistem dua zarah di dalam ruang yang homeomorfis dengan  $S^2$  hanya ada statistika Bose dan Fermi, sedangkan yang homeomorfis dengan  $T^2$  akan diperoleh jenis statistika yang tergantung pada dua parameter berpasangan, yaitu  $\eta$  dan  $\theta$ . Berbagai pasangan yang diizinkan itu akan memberikan statistika semionik murni, anti-semionik, dan statistika tak murni jenis baru, misalnya, ambistatistika dan ambistatistika semionik. Di dalam ruang  $\mathbb{R}^2$ , meskipun tidak diperoleh statistika tak skalar untuk sistem 2-zarah, namun terdapat sejumlah tak hingga jenis statistika tak skalar untuk sistem 3-zarah. Untuk sistem 2-zarah identik di dalam ruang  $S^2 \times S^1$ , WUTT berdimensi-2 bagi grup *braid* sistem memberikan ambistatistika atau statistika setengah Bose - setengah Fermi. Hasil serupa juga diperoleh untuk sistem 2-zarah identik di dalam  $\mathbb{RP}^3$ . Sedangkan WUTT berdimensi-2 untuk sistem 3-zarah di dalam ruang  $S^2 \times S^1$  memberikan statistika parakontinu. Untuk  $N$ -zarah identik di dalam ruang tersambung sederhana berdimensi-3, seperti  $S^3$  dan  $\mathbb{R}^3$ , grup *braid* bagi sistem isomorfis dengan grup simetrik (grup permutasi), karena itu statistika sistem dapat diperoleh melalui WUTT bagi grup simetrik ini, dan itu memberikan parastatistika; statistika Bose dan Fermi adalah juga merupakan kasus khusus bagi parastatistika.

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1] Isham, C.J., 1984, Topological and Global Aspects of Quantum Theory, Elsevier Science Publisher B.V., Amsterdam
- [2] Imbo, T.D. dan J.M. Russell, 1990, Exotic Statistics on Surfaces, Lyman Lab. of Physics, Harvard University, Cambridge, MA 02138
- [3] Imbo, T.D., C.S. Imbo, dan E.C.G. Sudarshan, 1990, Identical Particles, Exotic Statistics and Braid Groups, Phys. Lett. B, vol. 234, hal. 103-107
- [4] Gervais, J.L. dan J.F. Russel, 1994, Solving the Strongly Coupled 2D Gravity: 2, Fractional-spin Operator, and Topological Three-point, Nucl. Phys. B, vol. 426, hal. 140-186
- [5] Gervais, J.L. dan Schnittger, 1994, Continuous Spin in 2D Gravity: Chiral Vertex Operator and Local Field, Nucl. Phys. B, vol. 431, hal. 273-312
- [6] Haldane, F.D.M., 1991, "Fractional Statistics" in Arbitrary Dimensions: A Generalization of the Pauli Principle, Phys. Rev. Lett, vol. 67, no. 8, hal. 837-940
- [7] Satriawan, M., 2004, Grand Canonical Partition Function for Parastatistical Systems, Phys. J. IPS, vol. C8, hal. 0515
- [8] Golterman, M. dan Y. Shamir, 2003, Fermion-number Violation in Regularizations that Preserve Fermion-number Symmetry, Phys. Rev. D, vol. 67, hal. 014501
- [9] Green, H.S., 1953, A Generalized Method of Field Quantization, Phys. Rev., vol. 90, hal. 270-273
- [10] Messiah, A.M.L. dan O.W. Greenberg, 1964, Symmetrization Postulate and Its Eksperimental Foundation, Phys. Rev., vol. 136B, hal. 248-267
- [11] Okayama, T., 1952, Generalization of Statistics, Prog. Theor. Phys., vol. 7, hal. 517-534
- [12] Sudarshan, E.C.G., T.D. Imbo, dan T.R. Govindarajan, 1988a, Configuration Space Topology and Quantum Internal Symmetries, Phys. Lett. B, vol. 213, no. 4, hal. 471-476
- [13] Imbo, T.D. dan E.C.G. Sudarshan, 1988, Inequivalent Quantizations and Fundamentally Perfect Space, Phys. Rev. Lett., vol. 60, no. 6, hal. 481-483
- [14] Laidlaw, M.G.G. dan C.M. DeWitt, 1971, Feynman Functional Integrals for Systems of Indistinguishable Particles, Phys. Rev. D, vol. 3, no. 6, hal. 1375-1378
- [15] Nattermann, P., 1997, Dynamics in Borel-Quantization: Nonlinear Schro-dinger Equations vs. Master Equations, Dissertation, Mathematisch-Natur-wissenschaftlichen Fakultat, Technischen Universitat Clausthal, Germany
- [16] Hatcher, A., 2002, Algebraic Topology, Cambridge Univ. Press, New York
- [17] Spanier, E.H., 1971, Algebraic Topology, edisi Tmh, Tata McGraw-Hill Pub. Co. Ltd., New Delhi
- [18] Birman, J.S., 1969, On Braid Groups, Comm. Pure Appl. Math., vol. 22, hal. 41-72
- [19] Humphreys, J.F., 1996, A Course in Group Theory, hal. 163-173, Oxford University Press, Oxford
- [20] Wang, W., 2002, Algebraic Structures behind Hilbert Schemes and Wreath Product, arXiv:math.QA/0011103
- [21] Balachandran, A.P., T.D. Imbo, dan C.S. Imbo, 1988, Topological and Algebraic Aspect of Quantization: Symmetries and Statistics, Ann. Inst. Henri Poincare, vol. 49, no. 3, hal. 387-396
- [22] Hatsugai, Y., M. Kohmoto, dan Y.S. Wu, 1991a, Braid Groups, Anyons and Gauge Invariance (On Topologically Nontrivial Surfaces), Technical Report of ISSP, vol. Ser.A, no. 2489
- [23] Hatsugai, Y., M. Kohmoto, dan Y.S. Wu, 1991b, Multi-Sheet Configuration Space and Fractional Quantum Statistics, Technical Report of ISSP, vol. Ser.A, no. 2456
- [24] Sudarshan, E.C.G., T.D. Imbo, dan C.S. Imbo, 1988b, Topological and Algebraic Aspects of Quantizations: Symmetries and Statistics, Ann. Inst. Henri Poincare, vol. 49, no. 3, hal. 387-396
- [25] Balachandran, A.P., T. Einarsson, T.R. Govindarajan, dan R. Ramachandran, 1991, Statistics and Spin on Two-Dimensional Surfaces, Goteborg ITP 91-8 (Subm. to Mod. Phys. Lett. A)
- [26] Einarsson, T., 1991, Fractional Statistics on Compact Surfaces, Goteborg ITP 91-1 (Invited Brief Review for Mod. Phys. Lett. B)
- [27] Lomont, J.S., 1959, Application of Finite Groups, Academic Press, New York
- [28] Bama, A.A., M. Satriawan, M.F. Rosyid, dan Muslim, 2004, Inequivalent Quantizations of Identical Particle System in a Universe with a Wormhole, dalam Proceeding of the First Jogja Regional Physics Conference 2004, Section D, Yogyakarta, Indonesia, 11 September 2004, hal. 65-71, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta, Indonesia
- [29] Gibbons, G.W. dan S.W. Hawking, 1992, Kinks and Topology Change, Phys. Rev. Lett, vol. 69, no. 12, hal. 1719-1721
- [30] Gibbons, G.W., 1993a, Skyrmions and topology change, Class. Quantum Grav., vol. 10, hal. L89-L91
- [31] Gibbons, G.W., 1993b, Topology and topology change in general relativity, Class. Quantum Grav., vol. 10, hal. S75-S78
- [32] Bama, A.A., 2007, Statistika Kuantum Sistem Zarah Identik yang Digelar di dalam Ruang dengan Topologi Berubah, Disertasi, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta, Indonesia