Jurnal Penelitian Sains ; hal 76 - 81
No 9. April 2001 ISSN: 1410-7058

MODEL PERSAMAAN DIFERENSIAL PROSES KELAHIRAN YULE-FURRY DENGAN DUA JENIS KELAMIN

Ngudiantoro
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sriwijaya

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk merumuskan model stokastik dari proses kelahiran dengan dua jenis kelamin, karena model stokastik dari proses ini belum disajikan, sementara banyak fenomena yang ditemukan di lapangan dapat menggambarkan suatu peristiwa dari proses stokastik tersebut. Perumusan model stokastik ini pada prinsipnya ditujukan untuk mendapatkan bentuk postulat dan model persamaan diferensial. Hasil dari penelitian ini adalah postulat dan model persamaan diferensial dari proses kelahiran Yule-Furry dengan dua jenis kelamin.

PENDAHULUAN

Peranan model stokastik dalam merumuskan fenomena alam sangat dominan dibandingkan dengan model deterministik, karena pada prinsipnya model stokastik lebih realistik dalam menangkap indikasi alam yang dinamis dan relatif dengan melibatkan unsur waktu dan ruang pada setiap pemodelan fenomena alam yang dibentuknya.

Pada dasarnya, fenomena alam sangat sensitif terhadap perubahan yang diakibatkan oleh waktu dan ruang, sehingga model stokastik lebih representatif dalam memanifestasikan fenomena alam dalam bentuk suatu model.

Salah satu proses yang spesifik dari proses stokastik adalah proses stokastik dengan waktu kontinu dan ruang state diskrit, proses ini disebut dengan *proses cacah*, sedangkan proses cacah yang berupa suatu model dari fenomena alam yaitu *proses Poisson*. Salah satu bentuk pengembangan dari proses Poisson adalah dengan mengijinkan suatu peristiwa yang terjadi pada selang waktu tertentu, bergantung pada banyaknya peristiwa yang telah terjadi, contoh dari fenomena ini adalah *proses kelahiran.*

Proses kelahiran yang telah banyak dibahas adalah ***proses kelahiran murni,*** yang dapat dilihat diantaranya pada **Taylor, H.M. (1984), Papoluis, A. (1984), Cox, D.R. dan Miller, H.D. (1987).** Sementara itu, di lapangan ditemukan kenyataan bahwa suatu individu (*mahluk hidup*) dapat dibedakan atas dua jenis kelamin, yaitu wanita dan laki-laki.

Pembahasan tentang ***proses kelahiran dengan dua jenis kelamin*** ini masih belum disajikan, oleh karena itu perlu kiranya untuk dikaji dan dirumuskan suatu model stokastik dari proses tersebut, melalui penurunan secara matematis sehingga model yang diperoleh dapat memanifestasikan fenomena di lapangan.

TINJAUAN PUSTAKA

Proses Kelahiran Murni (*Pure Birth Process*)

Misalkan $\{\lambda_k\}$ adalah suatu barisan bilangan positif, maka suatu ***proses kelahiran murni*** didefinisikan sebagai sebuah proses Markov yang memenuhi postulat di bawah ini, (Karlin dan Taylor, H.M.; 1975, Cox, D.R. dan Miller, H.D.;1987)

(i) $P[N(t,t+\Delta t)=1 \mid N(t)=k] = \lambda_k \Delta t + o(\Delta t),$

(ii) $P[N(t,t+\Delta t)=0 \mid N(t)=k] = 1 - \lambda_k \Delta t + o(\Delta t),$

(iii) $P[N(t,t+\Delta t)>1 \mid N(t)=k] = o(\Delta t),$

dengan $k = 0,1,2,\ldots$ **(1)**

Untuk $\Delta t > 0$, akan diperoleh persamaan diferensial

$$P'_n(t) = -\lambda_n P_n(t) + \lambda_{n-1} P_{n-1}(t);$$

dengan $n \geq 1$ **(2)**

Proses Kelahiran Yule-Furry

Proses Poisson dimana λ_n merupakan fungsi dari n disebut ***proses kelahiran murni***, sedangkan untuk $\lambda_n = n\lambda$ yang bersifat linier disebut ***proses Yule-Furry***, yaitu laju kelahiran sebanding dengan ukuran populasinya (Cox, D.R. dan Miller, H.D.;1987). Jika $N(t)$ menyatakan banyaknya populasi pada waktu t, dan jika $P_n(t)=P[N(t)=n]$, dengan mengambil $\lambda_n = n\lambda$ maka $P_n(t)$ dapat diperoleh dari persamaan

$$P_n'(t) = -n\lambda P_n(t) + (n-1)\lambda P_{n-1}(t)$$

dengan $n \geq 1$ (3)

dan

$$P_0'(t) = 0 \quad (4)$$

Jika kondisi awal diberikan, maka $P_n(t)$ dapat dinyatakan secara eksplisit.

METODOLOGI PENELITIAN

- Mengkaji teori yang berkaitan dengan proses kelahiran.
- Merumuskan postulat proses kelahiran Yule-Furry dengan dua jenis kelamin.
- Merumuskan model persamaan diferensial proses kelahiran Yule-Furry dengan dua jenis kelamin.
- Evaluasi hasil.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Proses kelahiran Yule-Furry dengan dua jenis kelamin merupakan satu bentuk pengembangan dari proses kelahiran murni.

Perhatikan populasi yang anggotanya mahluk hidup, yaitu anggota populasi yang dapat melahirkan (*memecah diri*) anggota baru yang tepat sama seperti induknya, dengan asumsi bahwa tidak ada individu yang mati atau berimigrasi.

Anggaplah sekarang $N(t)$, sebuah peubah acak, adalah banyaknya individu pada waktu t, dan $P[N(t)=n]$ dinyatakan dengan $P_n(t)$. Selanjutnya, individu-individu tersebut dibedakan menjadi dua bagian, yaitu individu wanita (dinyatakan dengan i) dan individu laki-laki (dinyatakan dengan j). Dalam selang waktu $(t,t+\Delta t)$, kemungkinan peristiwa yang terjadi pada proses kelahiran Yule-Furry dengan dua jenis kelamin adalah: akan ***terjadi kelahiran satu individu wanita,*** atau ***terjadi kelahiran satu individu laki-laki,*** atau ***tidak terjadi satupun peristiwa kelahiran*** baik wanita maupun laki-laki.

Selanjutnya, misalkan $\{\lambda_n=n\lambda\}$ adalah suatu barisan bilangan positif. Jika dalam selang waktu $(t,t+\Delta t)$ setiap anggota populasi mempunyai peluang $\lambda_1\Delta t + o(\Delta t)$ untuk lahirnya satu individu wanita yang baru, dan $\lambda_2\Delta t + o(\Delta t)$ untuk lahirnya satu individu laki-laki yang baru, maka proses kelahiran Yule-Furry dengan dua jenis kelamin didefinisikan sebagai suatu proses Markov yang juga memenuhi postulat di bawah ini,

(i) $P[N(t,t+\Delta t)=1 \mid N(t)=i-1,j] =$

$(i-1)\lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)$,

(ii) $P[N(t,t+\Delta t)=1 \mid N(t)= i,j-1] =$

$i\lambda_2 \Delta t + o(\Delta t)$,

(iii) $P[N(t,t+\Delta t)=0 \mid N(t)= i,j] =$

$1- i(\lambda_1+\lambda_2)\Delta t + o(\Delta t)$,

(iv) $P[N(t,t+\Delta t)=m \mid N(t)=i-m,j] =$

$o(\Delta t)$,

(v) $P[N(t,t+\Delta t)=m \mid N(t)=i,j-m] =$

$o(\Delta t)$,

dengan $m = 2,3,4,\ldots$ (5)

Catatan:

Banyaknya peristiwa yang terjadi dalam selang waktu $(t,t+\Delta t)$ *saling bebas dengan banyaknya peristiwa yang terjadi dalam selang waktu* $(0,t)$.

Penjelasan di atas dapat dinyatakan dalam bentuk pernyataan peluang sebagai berikut:

$$P_{i,j}(t) = P[N(t)=i,j] \quad (6)$$

atau

$$P_{i,j}(t+\Delta t) = P[N(t+\Delta t)=i,j] \quad (7)$$

Persamaan (7) dapat diuraikan menjadi

$$\begin{aligned} P_{i,j}(t+\Delta t)=P[&N(t)=i,j \text{ dan } N(t,t+\Delta t)=0 \text{ atau} \\ &N(t)=i-1,j \text{ dan } N(t,t+\Delta t)=1 \text{ atau} \\ &N(t)=i,j-1 \text{ dan } N(t,t+\Delta t)=1 \text{ atau} \\ &N(t)=i-m,j \text{ dan } N(t,t+\Delta t)=m \text{ atau} \\ &N(t)=i,j-m \text{ dan } N(t,t+\Delta t)=m] \\ &\text{dengan } m = 2,3,4,\ldots \end{aligned} \quad (8)$$

atau

$$\begin{aligned} P_{i,j}(t+\Delta t)=\ &P[N(t)=i,j \text{ dan } N(t,t+\Delta t)=0] + \\ &P[N(t)=i-1,j \text{ dan } N(t,t+\Delta t)=1] + \\ &P[N(t)=i,j-1 \text{ dan } N(t,t+\Delta t)=1] + \\ &P[N(t)=i-m,j \text{ dan } N(t,t+\Delta t)=m] + \\ &P[N(t)=i,j-m \text{ dan } N(t,t+\Delta t)=m] \\ &\text{dengan } m = 2,3,4,\ldots \end{aligned} \quad (9)$$

atau

$$\begin{aligned} P_{i,j}(t+\Delta t)=\ &P[N(t)=i,j].P[N(t,t+\Delta t)=0 \mid \\ &N(t)=i,j] + P[N(t)=i-1,j]. \\ &P[N(t,t+\Delta t)=1 \mid N(t)= i-1,j] + \\ &P[N(t)=i,j-1].P[N(t,t+\Delta t)=1 \mid \\ &N(t)=i,j-1]+P[N(t)=i-m,j]. \\ &P[N(t,t+\Delta t)=m \mid N(t)= i-m,j] + \end{aligned}$$

$P[N(t)=i,j-m].P[N(t,t+\Delta t)=m \mid N(t)=i,j-m]$

dengan $m = 2,3,4,...$ **(10)**

Persamaan **(10)** dapat dinyatakan dalam bentuk seperti di bawah ini, lihat Persamaan **(5)** dan **(6)**,

$$P_{i,j}(t+\Delta t)=P_{i,j}(t).[1-i(\lambda_1+\lambda_2)\Delta t+o(\Delta t)] + P_{i-1,j}(t).[(i-1)\lambda_1\Delta t + o(\Delta t)] + P_{i,j-1}(t).[i\lambda_2\Delta t + o(\Delta t)] + P_{i-m,j}(t).o(\Delta t)+P_{i,j-m}(t).o(\Delta t)$$

dengan $m=2,3,4,...$ **(11)**

atau

$$P_{i,j}(t+\Delta t)-P_{i,j}(t)= -i(\lambda_1+\lambda_2)\Delta t.P_{i,j}(t)+ (i-1)\lambda_1\Delta t.P_{i-1,j}(t)+i\lambda_2\Delta t.P_{i,j-1}(t)+ [P_{i,j}(t)+P_{i-1,j}(t)+P_{i,j-1}(t)+P_{i-m,j}(t)+ P_{i,j-m}(t)]o(\Delta t)$$

dengan $m = 2,3,4,...$ **(12)**

Selanjutnya kedua ruas dibagi dengan Δt, dan untuk $\Delta t \to 0$ maka akan diperoleh

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{i,j}(t+\Delta t)-P_{i,j}(t)}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} - i(\lambda_1+\lambda_2)P_{i,j}(t)+ (i-1)\lambda_1 P_{i-1,j}(t)+i\lambda_2 P_{i,j-1}(t)+ [P_{i,j}(t)+P_{i-1,j}(t)+P_{i,j-1}(t)+ P_{i-m,j}(t)+ P_{i,j-m}(t)] \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

dengan $m=2,3,4,...$ **(13)**

Jadi, model persamaan diferensial dari proses kelahiran Yule-Furry dengan dua jenis kelamin adalah:

$$P'_{i,j}(t) = - i(\lambda_1+\lambda_2)P_{i,j}(t)+ (i-1)\lambda_1 P_{i-1,j}(t)+i\lambda_2 P_{i,j-1}(t) \quad (14)$$

Teorema:

Persamaan diferensial parsial untuk fungsi pembangkit peluang transisi dari sebuah proses kelahiran Yule-Furry dengan dua jenia kelamin dengan syarat

$$G(z_1,z_2,t) = \sum_{i,j=0}^{\infty} z_1^i z_2^j P_{i,j}(t) \quad (15)$$

yaitu

$$\frac{\partial G(z_1,z_2,t)}{\partial t} = [-(\lambda_1+\lambda_2)z_1 + \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_1 z_2] \frac{\partial G(z_1,z_2,t)}{\partial z_1} \quad (16)$$

KESIMPULAN

- Postulat proses kelahiran Yule-Furry dengan dua jenis kelamin dapat dilihat pada Persamaan **(5)**.
- Persamaan **(14)** adalah model persamaan diferensial dari proses kelahiran Yule-Furry dengan dua jenis kelamin.
- Persamaan **(16)** adalah model persamaan diferensial parsial untuk fungsi pembangkit peluang transisi dari proses kelahiran Yule-Furry dengan dua jenis kelamin.

DAFTAR PUSTAKA

Bhattacharya, R.N. and Waymire, E.C. (1990). ***Stochastic Processes with Application***. John Wiley&Sons. New York.

Cinlar, E. (1975). ***Introduction to Stochastic Processes.*** Prentice-Hall,Inc. New Jersey.

Cox, D.R. and Miller, H.D. (1987). ***The Theory of Stochastic Processes.*** Chapman and Hall. London.

Goodman, L.A. (1953). ***Population Growth of the Sexes.*** Biometrics,9,pp.212-225.

Kendall, D.G. (1949). ***Stochastic Processes and Population Growth.*** Journal of the Royal Statistical Society, Series B, Vol. II, pp.230-264.

Papoluis, A. (1984). ***Probability, Random Variables, and Stochastic Processes.*** Second Edition. Mc.Graw-Hill Book Campany. New York.

Parzen, E. (1964). ***Stochastic Processes.*** Holden-Day Inc. Sanfransisco.

Praptono. (1986). ***Pengantar Proses Stokastik I.*** Penerbit Karunika. Jakarta.

Ross, S. (1976). ***A First Course in Probability.*** MacMillan PublishingCo.,Inc. New York.

Srinivasan, S.K. and Mehata, K.M. (1988). ***Stochastic Processes.*** Tata Mc.Graw-Hill Publishing Company Limited. New Delhi.

Taylor, H.M. (1984). ***An Introduction to Stochastic Modelling.*** Academic Press,Inc. Orlando. Florida.