Penggunaan Metode Bagi Dua Terboboti untuk Mencari Akar-akar Suatu Persamaan

EVI YULIZA
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Sriwijaya, Indonesia

Intisari: Penelitian ini merupakan modifikasi dari Metode Bagi Dua dalam mencari akar persamaan. Dengan Metode Bagi Dua Terboboti dibutuhkan suatu nilai terboboti ω yang diharapkan meminimumkan banyaknya iterasi sehingga laju kekonvergenan semakin lebih cepat. Hasil penelitian menunjukkan bahwa dengan menggunakan Metode Bagi Dua Terboboti dapat mempercepat laju kekonvergenan yang ditentukan oleh nilai terboboti ω. Namun, nilai terboboti ω tidak ditentukan sebelumnya.

Kata-kunci: metode bagi dua, konsep pengapitan akar

Abstract: This research is modification from bisection method in look for similarity root. Weighted bisection method wanted a value weighted supposed by minimizing iteration quantity so that rapid convergence more quicker. The result of this research show that by using weighted bisection method can speed up rapid convergence be determined by value the weight. But value the weight is not defined previous.

Keywords: bisection method, bracketing concept.

1 PENDAHULUAN

Penelitian ini merupakan lanjutan penelitian sebelumnya (khususnya skripsi yang telah dilakukan oleh Yuliza[1] yang berkaitan dengan bagaimana menyelesaikan persamaan dengan menggunakan metode Bagi Dua. Penelitian sebelumnya terbatas hanya pada persamaan polinom. Untuk persamaan polinom yang derajat $n \geq 4$ sketsa grafik fungsi sulit untuk digambarkan. Pengembangan berikutnya yang akan dilakukan pada penelitian ini adalah dengan membuat sketsa kasar grafik fungsi sehingga lebih mempermudah dalam menentukan dua taksiran awal dimana grafik fungsi tersebut memotong sumbu x. Dan tidak terbatas hanya pada fungsi polinom saja tetapi diperluas dengan fungsi eksponen, trigonometri dan logaritma. Dalam hal ini, sketsa grafik fungsi dapat menggunakan software graph. Graph dirancang untuk grafik program gambar fungsi matematis di sistem koordinat. Program windows standar program dengan menu dan dialog. Program mampu menggambar fungsi normal, fungsi parametrik, fungsi kutub, garis singgung, serangkaian titik dan hubungan-hubungannya. Dauhoo dan Soobhug[2] mengembangkan metode Bagi Dua Terboboti yang merupakan modifikasi metode Bagi Dua untuk mencari akar-akar suatu persamaan. Dalam mencari penyelesaian suatu persamaan dengan menggunakan metode Bagi Dua Terboboti dibutuhkan suatu nilai terboboti ω yang akan meminimumkan banyaknya iterasi. Namun Dauhoo dan Soobhug[2] tidak menjelaskan secara rinci batasan nilai terboboti ω sehingga peneliti mencoba mengkaji hal tersebut.

Sebuah fungsi f adalah suatu aturan padanan yang menghubungkan tiap obyek x dalam satu himpunan, yang disebut daerah asal dengan sebuah nilai unik $f(x)$ dari himpunan kedua. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut daerah hasil fungsi terse-but[3]. Berdasarkan sifatnya fungsi dapat dibedakan menjadi dua yaitu, fungsi transenden dan fungsi aljabar. Fungsi yang bersifat transenden antara lain adalah fungsi trigonometri, eksponen dan logaritma. Contoh: $f(x) = e^{-x} - x$, $f(x) = \sin x$ dan $f(x) = \ln x^2 - 1$. Sedangkan fungsi yang bersifat aljabar antara lain adalah fungsi polinom yang secara umum berbentuk:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

dengan a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, …, a_1, a_0 berupa bilangan–bilangan riil dan n adalah bilangan bulat tak negatif. Di antara semua fungsi, polinom merupakan fungsi yang mudah dievaluasi karena hanya menyangkut tiga operasi yaitu, pengurangan, penjumlahan dan perkalian. Beberapa contoh fungsi polinom: $f(x) = 1 - 2{,}37x + 7{,}5x^2$ dan $f(x) = 5x^2 - x^3 + 7x^6$.

Untuk mencari harga nol dari fungsi atau mencari akar–akar (penyelesaian) persamaan

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

dapat dilakukan secara numerik.

Metode numerik menyediakan teknik–teknik untuk menyelesaikan suatu persamaan, diantaranya adalah Metode Grafik, Metode Bagi Dua, Metode Posisi Palsu, Metode Iterasi Titik Tetap, Metode Newton Raphson dan Metode Secant. Masing–masing metode mem-punyai teknik atau prosedur yang berbeda dalam mencari akar–akar suatu persamaan. Namun, metode numerik yang digunakan dalam penelitian ini adalah Metode Bagi Dua.

Dalam matematika dan teknik, persamaan non-linear dapat diselesaikan dengan mengggunakan metode-metode iterasi. Di antara banyak metode-metode iterasi, metode Bagi Dua adalah salah satu dari metode iterasi yang menjamin kekonvergenan. Kekurangan dari metode Bagi Dua ini dalam menemukan harga nol dari fungsi mempunyai tingkat linear kekonvergenan dengan jumlah iterasi yang banyak. Hal ini disebabkan karena kekonvergensian pada metode Bagi Dua bersifat lambat. Tetapi tingkat akurasi metode Bagi Dua cukup bagus.

Metode Bagi Dua dalam menentukan akar–akar persamaan memerlukan dua taksiran awal, misalkan a dan b dimana di dalam taksiran tersebut diharapkan mengandung penyelesaian persamaan[4]. $f(x)$ disyarat-kan memenuhi $f(a).f(b)<0$ pada $[a, b]$ sehingga terdapat paling sedikit satu penyelesaian diantara a dan b. Jika suatu fungsi berubah tanda pada pada $[a, b]$ maka nilai akar dihitung pada titik tengah interval tersebut[5]. Dalam penelitian ini, metode Bagi Dua akan dimodifikasi sehingga diperoleh kekonvergenan yang lebih cepat sehingga banyak iterasi lebih diminimumkan. Metode Bagi Dua Terboboti meru-pakan pengembangan dari metode Bagi Dua dengan mengubah proporsi dari subinterval pada metode Bagi Dua.

Saat ini Metode Bagi Dua diberikan dalam mata kuliah Metode Numerik. Akan tetapi Metode Bagi Dua Terboboti belum diperkenalkan dalam mata kuliah Matode Numerik. Keluaran penelitian ini diharapkan dapat meningkatkan materi mata kuliah Metode Numerik dan tambahan referensi sebagai bahan ajar mata kuliah tersebut, dan juga diperoleh artikel ilmiah yang akan dipublikasikan pada Jurnal Nasional.

Permasalahan yang akan diteliti adalah bagaimana membandingkan penyelesaian suatu persamaan dengan menggunakan Metode Bagi Dua dan Metode Bagi Dua Terboboti.

2 TINJAUAN PUSTAKA

Masalah di dalam matematika dan teknik yang sering dijumpai adalah mencari akar suatu persamaan, yakni jika diketahui fungsi $f(x) = 0$ maka akan dicari nilai-nilai x yang memenuhi $f(x) = 0$.

Definisi 2.1 (Akar Suatu Persamaan, Pembuat Nol Fungsi)

Misalkan $f(x)$ adalah suatu fungsi kontinu. Setiap bilangan r pada domain f yang memenuhi $f(r) = 0$ disebut akar persamaan $f(x) = 0$ atau juga disebut pembuat nol fungsi $f(x)$. Secara singkat r sering disebut akar fungsi $f(x)$[6].

Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan masalah matematika agar dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan[7].

2.1 Metode Bagi Dua

Metode Bagi Dua merupakan metode yang dirancang untuk menentukan akar–akar persamaan $f(x) = 0$ pada interval $[a, b]$. Jika f suatu fungsi kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ sedemikian hingga $f(a).f(b)<0$ sehingga terdapat paling sedikit satu akar dari f pada (a, b). Beberapa kasus dimana akar-akar berada pada interval $[a, b]$.

Jika $f(a)$ dan $f(b)$ bertanda sama diantara nilai-nilai tersebut maka tidak terdapat akar atau penyelesaian diantara a dan b (Gambar (a)). Jika $f(a)$ dan $f(b)$ bertanda sama diantara nilai-nilai tersebut maka terdapat akar sebanyak bilangan genap. Kondisi $f(a).\ f(b) < 0$ tidak dipenuhi sehingga tidak dapat diguna-kan metode Bagi Dua (Gambar (b)). Jika $f(a)$ dan $f(b)$ berbeda tanda diantara nilai-nilai tersebut maka terdapat akar sebanyak bilangan ganjil. Kondisi $f(a).\ f(b) < 0$ dipenuhi sehingga dapat diselesaikan dengan menggunakan metode Bagi Dua(Gambar (c)).

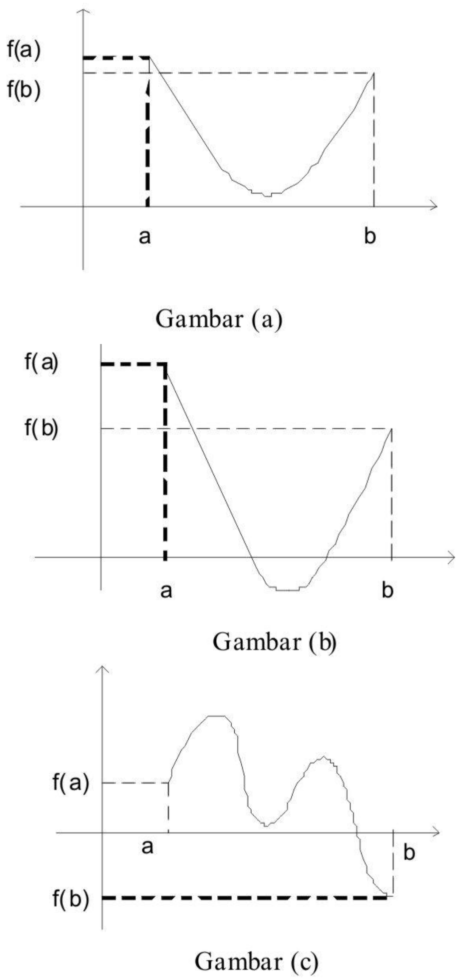
Teorema Nilai Antara merupakan salah satu teorema yang mendasari proses iterasi dari algoritma Bagi Dua. Dan teorema lain yang menunjang proses iterasi adalah Teorema Nilai Rata-Rata.

Teorema 2.1 (Teorema Nilai Antara)

Jika f kontinu pada interval $[a, b]$ dan c suatu bilangan antara $f(a)$ dan $f(b)$ maka terdapat paling sedikit satu bilangan x diantara interval $[a, b]$ sedemikian hingga[3] $f(x) = c$.

Teorema 2.2 (Teorema Bolzano)

Jika f kontinu pada interval $[a, b]$ dan $f(a).f(b)<0$ maka terdapat paling sedikit satu titik c di (a, b) sedemikian hingga $f(c)=0$. Dengan kata lain, persamaan $f(x)=0$ memiliki paling sedikit satu akar persamaan di antara $x = a$ dan $x = b$[8].



Gambar 1. Fungsi $f(x)$ pada $[a, b]$.

Teorema 2.3 (Teorema Nilai Rata–Rata)

Jika f kontinu pada $[a, b]$ dan terdifferensialkan pada (a, b) maka terdapat (paling sedikit satu) x pada (a, b) sedemikian hingga[9]

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Metode Bagi Dua dinamakan juga pemenggalan biner, pemaruh selang (interval) atau metode Bolzano merupakan salah satu jenis metode pencarian inkre-mental dimana interval selalu dibagi dua. Jika suatu fungsi berubah tanda pada suatu interval maka nilai yang dihitung pada titik tengah interval tersebut. Menurut DauHoo dan Soobhug[2], jika f fungsi kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ sedemikian sehingga $f(a).\ f(b) < 0$ maka terdapat paling sedikit akar dari f pada (a, b). Jika $[a, b] = [a_0, b_0]$ adalah interval awal maka dengan algoritma metode Bagi Dua dibangun oleh barisan $\{[a_k, b_k]\}$ di mana terdapat akar dari f. Didefinisikan

$$c_k = \frac{a_k + b_k}{2} \tag{1}$$

Jika $f(c_k) = 0$ maka $c_k = r$ dan algoritma berakhir. Jika $f(a_k).\ f(b_k) < 0$ maka r terdapat pada (a_k, b_k) sehingga $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, c_k]$ atau $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [c_k, b_k]$. Algoritma metode Bagi Dua mempunyai kekonver-genan hingga $|b_k - a_k| = 2^{-k}|b_o - a_o|$ sehingga akar f pada $[a, b]$. Kekonvergensi dicapai apabila $|b_k - a_k|$ lebih kecil dari suatu nilai toleransi, katakan ε.

2.2. Metode Bagi Dua Terboboti

Algoritma Metode Bagi Dua Terboboti secara umum sama dengan Metode Bagi Dua. Untuk mencari akar persamaan $f(x) = 0$, algoritma Metode Bagi Dua menunjukkan bahwa inteval dibagi dua dimana terdapat akar dari f. Dari (1) dapat ditulis:

$$c_k = \left(\frac{1}{2}\right)(a_k) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)(b_k) \tag{2}$$

atau

$$c_k = \left(1 - \frac{1}{2}\right)(a_k) + \left(\frac{1}{2}\right)(b_k) \tag{3}$$

Secara umum subinterval pada (2) dapat ditulis:

$$c_k = (\omega)(a_k) + (1 - \omega)(b_k) \tag{4}$$

atau dari (3) dapat ditulis:

$$c_k = (1 - \omega)(a_k) + (\omega)(b_k) \tag{5}$$

dengan ω adalah suatu nilai terboboti. Algoritma Metode Bagi Dua Terboboti sama dengan Metode Bagi Dua hanya saja berbeda pada perhitungan subinterval (c_k). Metode Bagi Dua merupakan kejadian khusus dari Metode Bagi Dua.

3 METODE PENELITIAN

Langkah-langkah yang akan dilakukan dalam penelitian ini adalah:

1. Menentukan suatu persamaan $f(x) = 0$ yang akan dicari akar-akar penyelesaiannnya. Fungsi $f(x)$ dapat berupa fungsi transenden dan fungsi aljabar seperti pada Bab Tinjauan Pustaka.
2. Menyelesaikan persamaan $f(x) = 0$ dengan meng-gunakan Metode Bagi Dua.
   a. Menentukan taksiran awal a_k dan b_k.
   b. Menghitung nilai $f(a_k)$, $f(b_k)$. Kemudian selidiki apakah memenuhi $f(a_k).\ f(b_k) < 0$.

c. Apabila memenuhi $f(a_k)$. $f(b_k)$ < 0 maka lanjutkan ke langkah 2.e.
d. Apabila tidak memenuhi $f(a_k)$. $f(b_k)$ < 0 maka ulangi langkah ke 2.a.
e. Menghitung $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$
f. Menghitung nilai $f(c_k)$.
g. Menyelidiki apakah memenuhi $f(a_k)$. $f(c_k)$ < 0 dan $f(c_k)$. $f(b_k)$ < 0.
h. Apabila memenuhi $f(a_k)$. $f(c_k)$ < 0 maka kembali ke langkah e dan $f(c_k)$. $f(b_k)$ < 0 maka kembali ke langkah 2.e.
i. $|b_k - a_k| \le \varepsilon$, iterasi berhenti.

3. Menyelesaikan persamaan $f(x)$ = 0 dengan menggunakan Metode Bagi Dua Terboboti.
   a. Melakukan langkah yang sama seperti pada langkah 2.a hingga langkah 2.d.
   b. Mengambil nilai ω dan 0 < ω < 1.
   c. Menghitung $c_k = (\omega)(a_k) + (1-\omega)(b_k)$
   d. Menghitung nilai $f(c_k)$.
   e. Menyelidiki apakah memenuhi $f(a_k)$. $f(c_k)$ < 0 dan $f(c_k)$. $f(b_k)$ < 0.
   f. Apabila memenuhi $f(a_k)$. $f(c_k)$ < 0 maka kembali ke langkah 3.c dan $f(c_k)$. $f(b_k)$ < 0 maka kembali ke langkah 3.e.
   g. $|b_k - a_k| \le \varepsilon$, iterasi berhenti.
4. Interpretasi hasil iterasi dengan menggunakan Metode Bagi Dua dan Metode Bagi Dua Terboboti.

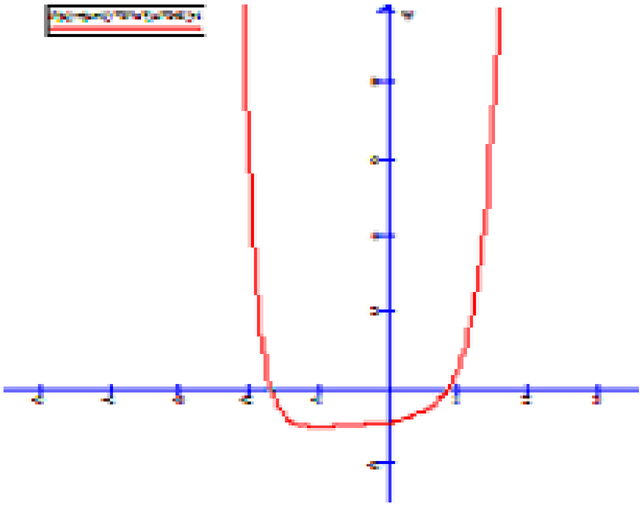
Penggunaan sofware graph untuk menentukan taksiran awal secara kasar.

4 HASIL DAN PEMBAHASAN

Misalkan akan dicari akar-akar persamaan

$$(x+1)^2 e^{x^2-2} - 1 = 0$$

yang tidak dapat ditentukan secara eksplisit pembuat nol fungsi tersebut. Di sinilah peranan metode nume-rik untuk mencari nilai hampiran suatu penyelesaian permasalahan matematis. Dengan menggunakan *software graph*, diperoleh sketsa gambar grafik fungsi $f(x) = (x+1)^2 e^{x^2-2} - 1$ sebagaimana Gambar 2.



Gambar 2. Fungsi $f(x) = (x+1)^2 e^{x^2-2} - 1$

Dari sketsa grafik dapat ditentukan taksiran awal akar *a* = 0,4 dan *b* =1,2.

Hasil Iterasi dengan menggunakan Metode Bagi Dua untuk $f(x) = (x+1)^2 e^{x^2-2} - 1$. Ambil nilai toleransi ε = 0,00001.

Tabel 1. Hasil iterasi dengan menggunakan Metode Bagi Dua untuk $f(x) = (x+1)^2 e^{x^2-2} - 1$.

Iterasi	*a*	B	*x*	$f(x)$
1	0,4	1,2	0,8	−0,1684191
2	0,8	1,2	1	0,4715178
3	0,8	1	0,9	0,0982388
4	0,8	0,9	0,85	−0,0460354
5	0,85	0,9	0,875	0,0231052
6	0,85	0,875	0,8625	−0,0121796
7	0,8625	0,875	0,86875	0,0052800
8	0,8625	0,86875	0,865625	−0,0034950
9	0,865625	0,86875	0,8671875	0,0008811
10	0,865625	0,8671875	0,8664063	−0,0013098
11	0,8664063	0,8671875	0,8667969	−0,0002150
12	0,8667969	0,8671875	0,8669922	0,0003329
13	0,8667969	0,8669922	0,8668945	0,0000589
14	0,8667969	0,8668945	0,8668457	−0,0000781
15	0,8668457	0,8668945	0,8668701	−0,0000096
16	0,8668701	0,8668945	0,8668823	−0,000024562
17	0,8668701	0,8668823	0,8668762	0,000007449

Iterasi berhenti pada iterasi ke-17 dengan hasil hampiran akar *x* = 0,8668762 dan lebar interval pengapit akar adalah 0,0000122.

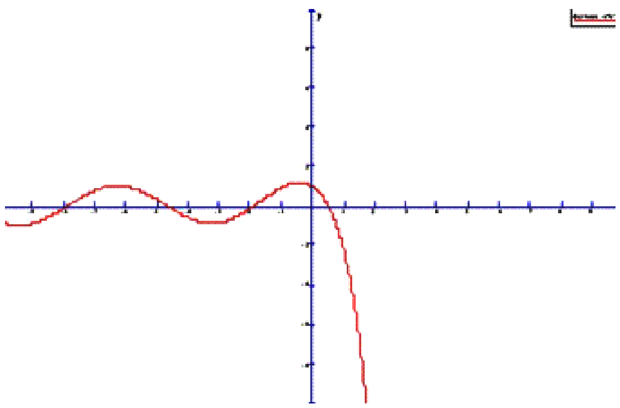
Ambil nilai terboboti ω = 0,51547734 dan ε = 0,00001.

Tabel 2. Hasil Iterasi untuk $f(x)=(x+1)^2 e^{x^2-2}-1$ dengan menggunakan Metode Bagi Dua terboboti dan nilai terboboti ω = 0,51547734.

Iterasi	***a***	***B***	***x***	$f(x)$
1	0,4	1,2	0,787618	−0,1957858
2	0,787618	1,2	0,9874265	0,4172130
3	0.787618	0,9874265	0,8844298	0,0507105
4	0,787618	0,8844298	0,8345256	−0,0860644
5	0,8345256	0,8844298	0,8587053	−0,0226054
6	0,8587053	0,8844298	0,8711694	0,0121363
7	0,8587053	0,8711694	0,8647444	−0,0059514
8	0,8647444	0,8711694	0,8678575	0,0027646
9	0,8647444	0,8678575	0,8662528	−0,0017394
10	0,8662528	0,8678575	0,8670303	0,0004398
11	0,8662528	0,8670303	0,8666295	−0,0006843
12	0,8666295	0,8670303	0,8668237	−0,0001398
13	0,8668237	0,8670303	0,8669238	0,0001410
14	0,8668237	0,8669238	0,8668722	−0,0000038

Iterasi berhenti pada iterasi ke-14 dengan hasil hampiran akar *x* = 0,8668722 dan lebar interval pengapit akar adalah 0,00005. Interval pengapit ini masih terlalu besar dari pada nilai toleransi yang diberikan.

Permasalahan lainnya, misalkan akan dicari akar dari $\cos x - xe^x = 0$. Dengan menggunakan software graph, maka sketsa grafik fungsi sebagai berikut:



Gambar 3. Fungsi $f(x)=\cos x - xe^x$.

Hasil Iterasi dengan Menggunakan Metode Bagi Dua untuk $f(x)=\cos x - xe^x$. Ambil nilai toleransi ε = 0,0000000001.

Tabel 3. Hasil Iterasi untuk $f(x)=\cos x - xe^x$ dengan Menggunakan Metode Bagi Dua.

Iterasi	***a***	***B***	***x***	$f(x)$
1	0	1	0,5	0,053221927
2	0,5	1	0,75	−0,856061144
3	0,5	0,75	0,625	−0,356690604
4	0,5	0,625	0,5625	−0,141293745
5	0,5	0,5625	0,53125	−0,041512212
6	0,5	0,53125	0,515625	0,006475341
7	0,515625	0,53125	0,5234375	−0,017362025
8	0,515625	0,5234375	0,51953125	−0,005404402
9	0,515625	0,51953125	0,517578125	0,000545184
10	0,517578125	0,51953125	0,518554688	−0,002427179
11	0,517578125	0,518554688	0,518066407	−0,000940391
12	0,517578125	0,518066407	0,517022266	−0,000197452
13	0,517578125	0,517022266	0,517700196	0,000173903
14	0,517700196	0,517022266	0,517761231	−0,0000117649
15	0,517700196	0,517761231	0,517730714	0,0000810698
16	0,517730714	0,517761231	0,517745973	0,0000346515
17	0,517745973	0,517761231	0,517753602	0,000011435
18	0,517753602	0,517761231	0,517757417	−0,000000162199
19	0,517753602	0,517757417	0,51775551	0,00000563912
20	0,51775551	0,517757417	0,517756464	0,0000027369
21	0,517756464	0,517757417	0,517756464	0,00000128585
22	0,517756941	0,517757417	0,517756941	0,000000561827
23	0,517757179	0,517757417	0,517757179	0,000000199814
24	0,517757298	0,517757417	0,517757298	0,0000000172867
25	0,517757358	0,517757417	0,517757388	0,000000073977

Iterasi berhenti pada iterasi ke-25 dengan hasil hampiran akar *x* = 0,51757388 dan lebar interval pengapit akar adalah 0,00000003. Hasil interval pengapit ini masih lebih besar dari nilai toleransi yang diberikan.

Hasil Iterasi untuk $f(x)=\cos x - xe^x$ dengan Meng-gunakan Metode Bagi Dua Terboboti. Ambil nilai terboboti ω = 0,4876534 dan ε = 0,00001.

Tabel 4. Hasil Iterasi untuk $f(x)=\cos x - xe^x$ dengan Menggunakan Metode Bagi Dua Terboboti dan nilai terboboti ω = 0,4876534.

Iterasi	***a***	***B***	***x***	$f(x)$
1	0	1	0,51234666	0,016385783
2	0,51234666	1	0,7621942	−0,910039091
3	0,51234666	0,7621942	0,6403552	−0,412969248
4	0,51234666	0,6403552	0,5779314	−0,192480171
5	0,51234666	0,5779314	0,5459487	−0,08806292
6	0,51234666	0,5459487	0,5295625	−0,036269153
7	0,51234666	0,5295625	0,5211671	−0,01040249
8	0,51234666	0,5211671	0,5168658	0,002710223
9	0,5168658	0,5211671	0,5190696	−0,002996373
10	0,5168658	0,5190696	0,5179949	−0,000722759
11	0,5168658	0,5179949	0,5174443	0,000952129
12	0,5174443	0,5179949	0,5177264	0,0000941929
13	0,5177264	0,5179949	0,5178640	−0,00032443
14	0,5177264	0,5178640	0,5177969	−0,000120278

Iterasi berhenti pada iterasi ke-14 dengan hasil hampiran akar *x* = 0,5177969 dan lebar interval pengapit akar adalah 0,00068. Hasil interval pengapit ini masih lebih besar dari nilai toleransi yang diberikan.

5 KESIMPULAN

Dari hasil penelitian diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

a. Metode Bagi Dua Terboboti merupakan metode pencarian akar yang diperoleh dari memodifikasi Metode Bagi Dua. Dengan kata lain, Metode Bagi Dua Terboboti merupakan generalisasi dari Metode Bagi Dua.

b. Perlunya memperhatikan angka signifikan dalam menentukan nilai terboboti ω.

REFERENSI

[1] Yuliza E, 2000, *Penyelesain Persamaan Dengan Menggunakan Metode Bagi Dua*, Skripsi Jurusan Matematika (Tidak dipublikasikan)

[2] Dauhoo, Soobhug, 2003, An Adaptive Weighted Bi-section Method For For Finding Roots Of Non-Linier Equations. Alamat Web : http://web.ebscohost.com/ehost/pdfviewer/pdfviewer?vid=18&hid=105&sid=97eade1b-ea77-4ced-9b92-eefbcff35c4c%40sessionmgr112. Diakses tanggal: 6 Desember 2010

[3] Purcell dan Varberg, 1995, *Calculus with Analytic Geometry*, Edisi keempat, Penerbit Erlangga

[4] Penna M, 2005, The Bisection Method, Alamt web : http://www.brookscole.com/math_d/special_features/stewart_ shared/mathematica_labs/01-limits/p09.pdf Diakses tanggal : 23 Februari 2012

[5] McKinney, 2012, Bisection Method. Alamat Web: http://www.ce.utexas.edu/prof/mckinney/ce311k/Lab/Lab9.pdf Diakses tanggal: 23 Februari 2012

[6] Sahid, 2005, Pengantar Komputasi Numerik dengan MATLAB, Penerbit Andi Offset, Yogyakarta

[7] Chapra, Canale, 1996, *Metode Numerik*, Jilid 1, Edisi kedua, Penerbit Erlangga

[8] Boyce, Prima De, 1988, *Calculus*, John Willey and Sons.

[9] Ross, 1980, *Elementary Analysis The Theory Calculus*, Springer-Verlag, New York Inc.