HUBUNGAN DERET BERTINGKAT BERDASARKAN BILANGAN EULERIAN DENGAN OPERATOR BEDA

Alexander A. S. Gunawan

Jurusan Matematika dan Statistika, Fakultas Sains dan Teknologi, Binus University
Jl. KH. Syahdan No. 9, Palmerah, Jakarta Barat 11480.
aagung@binus.edu

ABSTRACT

Rank series defined as: $\sum_{i=1}^{n}{}^{m}\, i^{a} = \underbrace{\sum_{j_m}^{n} \ldots \sum_{j_1}^{j_2} \sum_{i=1}^{j_1}}_{m} i^{a}$ *is a generalization of the fixed rank series (the sum of powers), in which its closed solution has been found empirically by Jacob Bernoulli in 1731. This paper will explore the relationship between rank series and differential operator. To see this relationship, examples for the case m = 1.2 and α = 1.2. are provided.*

***Keywords**: rank series, fixed rank series, differential operator.*

ABSTRAK

Deret bertingkat yang didefinisikan sebagai: $\sum_{i=1}^{n}{}^{m}\, i^{a} = \underbrace{\sum_{j_m}^{n} \ldots \sum_{j_1}^{j_2} \sum_{i=1}^{j_1}}_{m} i^{a}$ *merupakan generalisasi dari Deret Pangkat Tetap (the sum of powers), yang solusi tertutupnya telah ditemukan secara empiris oleh Jacob Bernoulli pada tahun 1731. Makalah ini mencari hubungan antara deret bertingkat dengan operator beda. Untuk melihat hubungan ini, diberikan contoh-contoh untuk kasus m=1,2 dan α=1,2.*

***Kata kunci:** deret bertingkat, deret pangkat tetap , operator beda*

PENDAHULUAN

Permasalahan mencari solusi tertutup dari deret pangkat tetap $S_\alpha(n) = \sum_{i=1}^{n} i^a$ sudah mulai dicari sejak 1631 oleh Johan Faulhaber (1580-1635). Solusi deret pangkat tetap di atas dapat dicari dengan Fungsi Pembangkit (Gunawan, 2009).

Sedangkan solusi tertutup dari Deret bertingkat (Goenawan, 2003), yang merupakan perumuman dari deret pangkat tetap, yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^{n}{}^{1}\, i^a = \sum_{i=1}^{t} i^\beta = 1^a + 2^a + 3^a + \ldots + n^a$$

$$\sum_{i=1}^{n}{}^{2}\, i^a = \sum_{j}^{n}\sum_{i=1}^{j} i^a$$

$$= 1^a + (1^a + 2^a) + \cdots + (1^a + 2^a + \cdots + n^a)$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{n}{}^{m}\, i^a = \underbrace{\sum_{j_m}^{n}\cdots\sum_{j_1}^{j_2}\sum_{i=1}^{j_1}}_{m} i^a$$

Untuk mencari solusi tertutup tersebut, digunakan fungsi pembangkit (*generating function*) dari deret bertingkat di atas. Sebelumnya Deret bertingkat tersebut perlu diubah ke dalam bentuk persamaan beda (*difference equation*).

METODE

Persamaan Beda

Misalkan: $\sum_{i=1}^{n}{}^{m}\, i^a = S_\alpha^m(n)$ dan $\sum_{i=1}^{n-1}{}^{m}\, i^a = S_\alpha^m(n-1)$ maka deret bertingkat dalam bentuk persamaan beda (*difference equation*) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^{n}{}^{m}\, i^a = S_\alpha^m(n) = S_\alpha^m(n-1) + S_\alpha^{m-1}(n)$$

Fungsi Pembangkit

Untuk memecahkannya Persamaan Beda di atas dengan Fungsi Pembangkit (South, 1993), didefinisikan Fungsi Pembangkit $G^m(x)$ (Wilf, 1994) terlebih dahulu sebagai berikut:

$$G^m(x) = \sum_{i=0}^{\infty} S_\alpha^m(i)\, x^i \tag{1}$$

dan kemudian mencari solusi persamaan beda $S_\alpha^m(n) = S_\alpha^m(n-1) + S_\alpha^{m-1}(n)$ dengan fungsi pembangkit sebagai berikut:

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_\alpha^m(i)\, x^i = \sum_{i=0}^{\infty} S_\alpha^m(i-1)\, x^i + \sum_{i=0}^{\infty} S_\alpha^{m-1}(i)\, x^i$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_{\alpha}^{m}(i)\, x^{i} = S_{\alpha}^{m}(0) + x\sum_{i=0}^{\infty} S_{\alpha}^{m}(i-1)\, x^{i-1}$$
$$+ \sum_{i=0}^{\infty} S_{\alpha}^{m-1}(i)\, x^{i}$$

dengan $S_{\alpha}^{m}(0) = 0$

Dengan menggunakan definisi Fungsi Pembangkit (1) di atas, diperoleh $G^{m}(x) = xG^{m}(x) + G^{m-1}(x)$

Selanjutnya diketahui bahwa di antara Fungsi Pembangkit dari Deret bertingkat mempunyai hubungan sebagai berikut: $G^{m}(x)\,(1-x) = G^{m-1}(x)$

sehingga untuk menurunkan Fungsi Pembangkit dari Deret bertingkat yang lebih tinggi dapat dengan mudah dilakukan denan Fungsi Pembangkit orde 1 sebagai berikut: $G^{m}(x)\,(1-x)^{m-1} = G^{1}(x)$

dengan $G^{1}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} S_{\alpha}(i)\, x^{i}$ dan $G^{0}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} i^{a} x^{i}$ Maka dihasilkan Fungsi Pembangkit dari Deret bertingkat sebagai berikut: $G^{m}(x) = \dfrac{\sum_{i=0}^{\infty} i^{a} x^{i}}{(1-x)^{m}}$ (2)

Bentuk Tanpa Deret Tak Hingga dari Fungsi Pembangkit

Perhatikan dalam hasil (2) di atas, pada bagian numerator terdapat deret $\sum_{i=0}^{\infty} i^{a} x^{i}$ dan untuk mendapatkan bentuk Fungsi Pembangkit dari deret tak hingga ini perlu memperhatikan dulu hasil ekspansi Taylor dari deret $\sum_{i=0}^{\infty} i^{0} x^{i}$, yaitu:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^{2} + x^{3} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} i^{0} x^{i}$$

Selanjutnya, untuk mendapatkan bentuk Fungsi Pembangkit dari deret $\sum_{i=0}^{\infty} i^{a} x^{i}$, dapat dikenakan operator turunan $\dfrac{d}{dx}$ dan kemudian mengalikan hasilnya dengan variable x pada fungsi $\dfrac{1}{1-x}$ secara berulang-ulang, sehingga didapat:

$$\sum_{i=0}^{\infty} i^{a} x^{i} = \frac{b_{\alpha} x^{\alpha} + b_{\alpha-1} x^{\alpha-1} + \ldots + b_{1} x^{1}}{(1-x)^{\alpha+1}} \tag{3}$$

dengan konstanta b_i dalam persamaan (3) dapat dilihat dalam Tabel 1 untuk nilai i=1 sampai dengan i=10.

Bilangan Eulerian

Dalam Kombinatorik, bilangan Eulerian A (n, m), adalah jumlah permutasi dari angka 1 sampai n dalam m elemen yang lebih besar dari elemen sebelumnya (permutasi dengan m 'naik').

Untuk suatu nilai n>0, indeks m dalam A(n, m) dapat mengambil nilai dari 0 sampai n-1. Untuk n tertentu terdapat satu permutasi yang memiliki 0 'naik'; yaitu permutasi turun (n, n-1, n-2, ..., 1). Ada juga satu permutasi yang telah n-1 'naik'; yaitu permutasi naik (1, 2, 3, ..., n). Oleh karena itu A (n, 0) dan A (n, n-1) sama dengan 1 untuk semua nilai n. Untuk nilai n yang lain, A (n, m) dapat dihitung dengan menggunakan rumus rekursi, yaitu:

$$A(n, m) = (n-m)\, A(n-1, m-1) + (m+1)\, A(n-1, m)$$

Ternyata bilangan Eulerian ini, mempunyai hubungan dengan Fungsi Pembangkit pada persamaan (3) di atas. Hubungan ini dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\sum_{i=0}^{\infty} i^a x^i = \frac{\sum_{i=0}^{\alpha-1} A(\alpha, i)\, x^{i+1}}{(1-x)^{\alpha+1}} \tag{4}$$

dengan *A(α,i)* adalah bilangan Eulerian.
Tabel bilangan Eulerian dapat dilihat pada persamaan (3).

Mendapatkan Solusi Tertutup

Selanjutnya untuk mencari solusi tertutup dari deret bertingkat, perlu dicari konstanta dari suku ke x^n pada Fungsi Pembangkit dari deret bertingkat. Dengan menggunakan formula Binomial Umum, konstanta dari suku ke x^n;

$$\binom{k+n-1}{k-1}(1-x)^{-k} \tag{5}$$

Contoh solusi dari Deret bertingkat secara rinci dapat dilihat di persamaan (3).

Operator Beda Δ

Jika suatu barisan S={s_n}, operator beda didefinisikan (Kunin, n.d.) sebagai ΔS={s_{n+1} - s_n}. Sebagai ilustrasi dapat dilihat Tabel 1 dibawah ini.

Table 1
Ilustrasi Barisan

S	**ΔS**	**Δ^2S**	…
s_0			
s_1	$s_1 - s_0$		
s_2	$s_2 - s_1$	$s_2 - 2s_1+s_0$	
s_3	$s_3 - s_2$	$s_3 - 2s_2+s_1$	
…			

HASIL DAN PEMBAHASAN

Contoh Kasus

I. Untuk α=1 dan m=1 didapat:

$$S_1^1(n) = \sum_{i=1}^{n} i^1 = \frac{(n+1)\,n}{2!}$$

Jika hasil ini kita kenakan operator beda, didapat

$$\Delta S_1^1(n) = \left[\frac{(n+1+1)(n+1)}{2} - \frac{(n+1)n}{2}\right]$$
$$= \frac{(n+1)}{2}\big((n+2)-n\big) = (n+1)$$

Hasilnya adalah barisan S={i^1}, *i=1,…,n+1*

II. Untuk α=1 dan m=2, didapat:

$$S_1^2(n) = \sum_{i=1}^{n} {}^2 i^1 = \binom{n+2}{2+1} = \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{6}$$

Jika hasil ini kita kenakan operator beda, didapat

$$\Delta S_1^2(n) = \left[\frac{(n+2)\,(n+1)\,(n)}{6} - \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{6}\right]$$
$$= \frac{(n+1)\,n}{2}$$

Lakukan sekali lagi operasi beda pada hasil di atas, didapat $\Delta^2 S_1^2(n) = (n+1)$. Hasilnya juga barisan S={i^1}, *i=1,…,n+1*

III. Untuk α=2 dan m=1, didapat

$$S_2^1(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(2n+1)(n+1)\,n}{6}$$

Jika hasil ini kita kenakan operator beda, didapat

$$\Delta S_2^1(n) = \left[\frac{(2n+2)(n+2)(n+1)}{6} - \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}\right]$$
$$= \frac{(n+1)\,(5n+4)}{6}$$

Lakukan sekali lagi operasi beda pada hasil di atas didapat:

$$\Delta^2 S_2^1(n) = \left[\frac{(n+2)\,(5n+5)}{6} - \frac{(n+1)\,(5n+4)}{6}\right]$$
$$= (n+1)$$

Hasilnya juga barisan S={i^1}, *i=1,…,n+1.*

IV. Untuk α=2 dan m=2, didapat

$$S_2^2(n) = \sum_{i=1}^{n} {}^2 i^2 = \binom{2+n}{2+2} + \binom{2+n+1}{2+2}$$
$$= \frac{(n+2)(n+1)^2\,n}{12}$$

Jika hasil ini kita kenakan operator beda, didapat

$$\Delta S_2^2(n) = \frac{(n+2)\,(n+1)(2n+3)}{6}$$

Lakukan sekali lagi operasi beda pada hasil di atas didapat:

$$\Delta^2 S_2^2(n) = \frac{(n+2)(3n+5)}{4}$$

Ulangi lagi operasi beda pada hasil di atas didapat $\Delta^3 S_2^2(n) = (n+2)$

Hasilnya juga barisan S={i^1}, *i=1,...,n+2*

PENUTUP

Dengan mempelajari berbagai kasus, dapat dilihat hubungan yang erat antara deret bertingkat dengan operator beda berulang. Di mana jika dikenakan operator beda sebanyak (m+α-1), akan menghasilkan barisan bilangan cacah. Jika diamati dengan seksama, didapat analogi antara deret bertingkat dan Opeasi Beda dengan operasi pengintegralan dan operasi diferensial, dimana deret bertingkat analog dengan integral berganda sedangkan Operasi Beda berulang analog dengan operasi diferensial berulang.

DAFTAR PUSTAKA

Goenawan, Stephanus Ivan. (2003). Deret Bertingkat Berderajat Satu Dalam Teori Keteraturan. *Metris: Jurnal Mesin, Elektro, Industri dan Sains, 4* (01).

Gunawan, Alexander. (2009). *Solusi Deret Pangkat Tetap dengan Fungsi Pembangkit,* (jurnal tidak diterbitkan).

Gunawan, Alexander. (2010). *Solusi Deret Bertingkat Dengan Fungsi Pembangkit Dan Bilangan Eulerian.* Dipresentasikan pada Seminar Nasional Matematika 2010 UI – UNPAD, Jakarta.

Kunin, George. (n.d.) The Finite Difference Calculus and Application to the Interpolation odd Sequences. *MIT Undergraduate Journal of Mathematics*.

South, Katherine Ann. (1993). *Solving Recurrence with Generating Functions: A Tutorial.* Diakses dari *http://www.google.co.id/url?sa=t&source=web&cd=1&ved=0CBQQFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.cs.umbc.edu%2Fpub%2FREPORTS%2Fcs-93-05.ps.Z&rct=j&q=South%2C%20Katherine%20Ann.%20(1993).%20Solving%20Recurrence%20with%20Generating%20Function.%20University%20of%20Maryland%20Baltimore%20County%2C%20Baltimore.&ei=WvsoTo6YGsvprQeLn_XHBg&usg=AFQjCNFATMRswLVcnS813scHlvao4T5QTA&sig2=tO0bwfTeEh17Zjkd-pcDHA&cad=rja.* Baltimore: University of Maryland Baltimore County.

Wilf, Herbert. (1994). *Generatingfunctionology.* New York: Academic Press.