APROKSIMASI DISTRIBUSI PANAS DENGAN MENGGUNAKAN METODE *FORWARD-BACKWARD DIFFERENCE*

Indriyani Rebet, Noorbaity

JurusanTeknikMesinPoliteknikNegeri Jakarta KampusBaru – UI Depok

Abstract

Distribution of heat occurs from a place that has a high temperature to elsewhere a low temperature. In a work process in industry revenue or expenditure necessary to achieve and maintain hot temperature conditions specified as needed. On the distribution of the one-dimensional heat conduction heat only propagate in a single direction, for example, only on-axis direction. Equation of one-dimensional conduction heat distribution modeled by the diffusion equation, which is a form of parabolic partial differential equations. Parabolic partial differential equations is one of the two order partial differential equations. Solution heat distribution equation can be determined by the analytical method called exact solution and numerical method called solution approximation. This research will be determined exact solution and the solution distribution approximation one-dimensional heat. Solution approximation using the method of forward difference and backward difference methods. After analysis turns backward difference method yield solutions a better approximation than the results approximating solution with forward difference method.
Keywords:

Keywords : *heat distribution, exact solution, the solution approximation, forward method.*

Abstrak

Distribusi panas terjadi dari suatu tempat yang memiliki temperatur tinggi ke tempat lain yang bertemperatur rendah. Pada suatu proses pekerjaan di bidang industri dibutuhkan pemasukan ataupun pengeluaran panas untuk mencapai dan mempertahankan keadaan suhu tertentu sesuai kebutuhan. Pada proses distribusi panas konduksi satu dimensi maka panas hanya merambat dalam satu arah, misalnya hanya pada arah sumbu - x*. Persamaan distribusi panas konduksi satu dimensi dimodelkan dengan persamaan difusi yang merupakan suatu bentuk persamaan diferensial parsial parabolik. Persamaan diferensial parsial parabolik adalah salah satu jenis persamaan diferensial parsial order dua. Solusi persamaan distribusi panas dapat ditentukan dengan metode analitik yang disebut solusi eksak dan metode numerik yang disebut solusi aproksimasi. Pada penelitian ini akan ditentukan solusi eksak dan solusi aproksimasi distribusi panas satu dimensi. Solusi aproksimasi dilakukan dengan menggunakan metode forward difference dan metode backward difference. Setelah dianalisa ternyata metode backward difference memberikan hasil solusi aproksimasi yang lebih baik dibandingkan dengan hasil solusi aproksimasi dengan metode forward difference.*

Kata kunci : *distribusi panas, solusi eksak, solusi aproksimasi, metode forward difference, metode backward difference.*

I. PENDAHULUAN

Distribusi panas terjadi dari suatu tempat yang memiliki temperatur tinggi ke tempat lain yang bertemperatur rendah. Pada suatu proses pekerjaan di bidang industri dibutuhkan pemasukan ataupun pengeluaran panas untuk mencapai dan mempertahankan keadaan suhu tertentu sesuai kebutuhan.

Distribusi panas terjadi karena adanya gaya dorong yaitu perbedaan temperatur. Jika suatu benda ingin dipanaskan maka harus ada benda lain yang memiliki temperatur lebih panas. Demikian pula sebaliknya jika ingin mendinginkan suatu benda maka diperlukan juga benda lain yang bertemperatur lebih rendah.

Distribusi panas dapat terjadi melalui tiga macam cara :

1. Pancaran (radiasi) yaitu distribusi panas melalui pancaran panas atau gelombang elektromagnet dari suatu benda ke benda lain.
2. Hantaran (konduksi) yaitu perpindahan panas yang terjadi pada suatu benda.
3. Aliran (konveksi) yaitu perpindahan panas oleh gerak partikel-partkel zat yang dipanaskan.

Pada proses distribusi panas konduksi satu dimensi maka panas hanya merambat dalam satu arah, misalnya hanya pada arahsumbu -x. Persamaan distribusi panas konduksi satu dimensi dimodelkan dengan persamaan difusi yang merupakan suatu bentuk persamaan diferensial parsial parabolik.

Persamaan diferensial parsial parabolik adalah salah satu jenis persamaan diferensial parsial order dua yang solusinya dapat ditentukan dengan metode analitik yang disebut solusi eksak. Yang dimaksud dengan metode analitik adalah metode penyelesaian model matematika dengan rumus-rumus aljabar. Selain itu persamaan diferensial dapat juga diselesaikan dengan menggunakan metode numerik. Metode numerik adalah teknik dimana masalah matematika diformulasikan sedemikian sehingga dapat diselesaikan dengan operasi aritmatika.

Untuk menentukan aproksimasi distribusi panas pada penelitian ini digunakan metode forwarddifference dan metodebackward difference. Meskipun konsepnya lebih sederhana dibanding dengan metode beda hingga dan Crank Nicholson, namun kekonvergenan hasil kedua metode ini dalam mengaproksimasi distribusi panas cukup dapat diandalkan. Sehingga dengan menggunakan metode forwarddifference dan metodebackward differencediharapkan akan memberikan manfaat sebagai berikut :

1. Metode alternatif untuk menentukan solusi aproksimasi persamaan diferensial parsial parabolik, khususnya untuk menentukan solusi aproksimasi distribusi panas satu dimensi.
2. Dengan metode ini diharapkan solusi aproksimasi yang didapat akan mendekati solusi analitik sehingga hasil program dari penelitian ini dapat digunakan untuk menentukan kondisi panas pada keadaan nyata.

Tinjauan Pustaka

Persamaan Diferensial Parsial Parabolik

Salah satu jenis PDP parabolik adalah persamaan difusi atau persamaan aliran panas yang berbentuk sebagai berikut : [Jamrud Aminuddin, 2008]

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial T^2(x,t)}{\partial x^2}, 0 < x < L, t > 0$$

[Per.1]

dimana

κ menyatakan koefisien konduktivitas.

T menyatakan temperatur merupakan fungsi dari x dan t,

x dan t menyatakan jarak dan waktu.

Solusi persamaan (1) menyatakan nilai temperatur T pada posisi x tertentu dan waktu t.

Solusi persamaan (1) dapat ditentukan jika sebelumnya ditentukan syarat awal dan syarat batas. Penyelesaian persamaan akan memberikan nilai T untuk $x=0$ sampai $x=l$ dan waktu $t=0$ sampai $t=\infty$.

Syarat batas untuk persamaan (1) adalah

$T(x,0)=f(x)$, $0\le x\le l$.

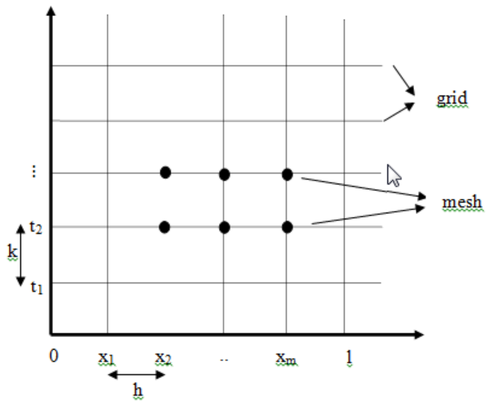
$T(0,t)=g_0(x)$, $0\le t\le \tau$.

$T(L,t)=g_1(x)$, $0\le t\le \tau$.

Persamaan distribusi panas yang akan diteliti memenuhi persamaan difusi (1). Solusi aproksimasi (1) dapat ditentukan dengan metode *forward difference.* Sehingga pembahasan pada sub bab selanjutnya adalah mengenai proses penurunan persamaan metode *forward difference.*

Metode Forward Difference

Untuk mengaproksimasi persamaan (1) buat grid lines dan mesh points sepeti yang ditunjukkan pada gambar (1).



Gambar. 1Grid lines dan mesh points pada metode forward difference.

Tahapan untuk menentukan solusi aproksimasi persamaan (1) dengan menggunakan metode forward difference adalah :[R.L. Burden, 2001]

Pilih suatu bilangan bulat $m>0$, yang merupakan jumlah grid dalam arah x lalu hitung *step sizes* $h=\dfrac{l}{m}$.

1. Pilih *time-step sizes* k, $k>0$.
2. Partisi interval $[0,l]$ pada x dalam m sub interval yang sama dengan lebar masing-masing sub interval adalah h dan interval $[0,\infty]$ pada t dalam sub interval yang sama dengan lebar masing-masing sub interval adalah k (lihatgambar 1).
3. Tentukan mesh point (x_i,t_j), dimana $x_i=ih$, $i=0,1,2,\ldots,m$ dan $t_j=jk$, $j=0,1,2,\ldots$.

Turunan pertama terhadap t dari persamaan (1) didapatkan dengan menggunakan. deret Taylor adalah

$$\frac{\partial T(x_i,t_j)}{\partial t}=\frac{T(x_i,t_j+k)-T(x_i,t_j)}{k}-\frac{k}{2}\frac{\partial^2 T(x_i,\mu_j)}{\partial t^2}$$
[Pers.2]

Pendekatan *forward difference* selalu mengabaikan suku terakhir, sehingga persamaan (2) menjadi

$$\frac{\partial T(x_i,t_j)}{\partial t}=\frac{T(x_i,t_j+k)-T(x_i,t_j)}{k}$$ [Pers.3]

Turunankeduaterhadap x daripersamaan (1) dengan menggunakan deret Taylor adalah

$$\frac{\partial^2 T(x_i,t_j)}{\partial x^2}=\frac{T(x_i+h,t_j)-2T(x_i,t_j)+T(x_i-h,t_j)}{h^2}-\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 T(\xi_i,t_j)}{\partial x^4}$$
[Pers.4]

Abaikan suku terakhir pada persamaan (4) sehingga persamaan menjadi

$$\frac{\partial^2 T(x_i,t_j)}{\partial x^2}=\frac{T(x_i+h,t_j)-2T(x_i,t_j)+T(x_i-h,t_j)}{h^2}$$
[Pers.5]

Substitusikan persamaan (3) dan persamaan (5) pada persamaan (1) maka dihasilkan persamaan berikut :

$$\frac{T(x_i,t_j+k)-T(x_i,t_j)}{k}-\frac{1}{\kappa}\frac{T(x_i+h,t_j)-2T(x_i,t_j)+T(x_i-h,t_j)}{h^2}=0$$
[Pers.6]

Nyatakan persamaan (6) dalamnotasi w, yaitu

$$\frac{w_{i,j+1}-w_{i,j}}{k}-\frac{1}{\kappa}\frac{w_{i+1,j}-2w_{i,j}+w_{i-1,j}}{h^2}=0$$ [Pers. 7]

dimana $w_{i,j}$ mengaproksimasi $T(x_i, t_j)$.

Dari persamaan (7) diperolehsolusi $w_{i,j+1}$, yaitu:

$$w_{i,j+1} = (1 - \frac{2k}{\kappa h^2}) w_{i,j} + \frac{k}{\kappa h^2}(w_{i+1,j} + w_{i-1,j})$$
[Pers.8]

Jika $\lambda = \frac{k}{\kappa h^2}$ [Pers.9]

maka persamaan (8) dapat ditulis kembali menjadi

$$w_{i,j+1} = (1 - 2\lambda) w_{i,j} + \lambda w_{i+1,j} + \lambda w_{i-1,j}$$
[Pers.10]

dengan $i = 1, 2, ..., m-1$ dan $j = 0, 1, ...$.

Solusi aproksimasi persamaan diferensial parabolik yang juga akan diteliti yaitu solusiaproksimasi dengan menggunakan metode backward difference. Proses penurunan persamaan metode backward difference akan dijelaskan pada sub bab berikut ini.

Metode Backward Difference

Metode backward differencedidapat dengan melakukan modifikasi persamaan (7) sehingga menjadi [R.L. Burden, 1992]

$$\frac{w_{i,j} - w_{i,j-1}}{k} - \frac{1}{\kappa} \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0$$
[Pers.11]

Substitusi (9) pada (11) sehingga dari persamaan (11) didapatsolusi $w_{i,j-1}$ adalahsebagaiberikut:

$$w_{i,j-1} = (1 + 2\lambda) w_{i,j} - \lambda w_{i+1,j} - \lambda w_{i-1,j}$$
[Pers.12]

dengan $i = 1, 2, ..., m-1$ dan $j = 1, 2, ...$.

II. METODE PENELITIAN

Obyek penelitian adalahdomain simulasi berupa sebatang logam dengan panjang l dengan temperatur padaujung-ujungnyadipertahankan 0^0 C. x adalah arah distribusi panas.

Pengamatan distribusi panas dilakukan dengan menggunakan perhitungan melalui solusi eksak dan solusi numerik.

Tahapan Penelitian

Penelitian dilakukan dengan penelusuran literatur dan jurnal yang terkait. Kemudian solusi aproksimasi didapat dengan eksekusi program komputer MATLAB R2007a .

Tahapan metode penelitian yang akan dilakukan adalah :

1. Menentukan solusi eksak persamaan distribusi panas satu dimensi
2. Menurunkan persamaan metode *forward difference* untuk menentukan solusi aproksimasi distribusi panas satu dimensi.
3. Menurunkan persamaan metode *backward difference* untuk menentukan solusi aproksimasi distribusi panas satu dimensi.
4. Membuat program komputer untuk menentukan solusi eksak distribusi panas satu dimensi.
5. Membuat program komputer untuk menentukan solusi aproksimasi distribusi panas satu dimensi dengan menggunakan metode *forward difference* dan *backward difference.*
6. Melakukan analisa numerik hasil solusi eksak dan solusi aproksimasi dari metode *forward difference* dan *backward difference.*

III. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Solusi eksak persamaan (1) adalah $T(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$.

Menurunkan persamaan metode forward difference untuk menentukan solusi aproksimasi distribusi panas satu dimensi.

Untuk menentukan solusi aproksimasi persamaan (1) dengan menggunakan metode forward difference pertama-tama tentukan panjang batang logam yang akanditeliti, yaitu l. Pilih suatu bilangan bulat $n > 0$, yang merupakan jumlah grid dalam arah x lalu hitung step sizes $h = \frac{l}{n}$. Misalnya untuk penelitian ini dipilih step sizes $h = 0.1$ lalu pilih time-step sizes $k = 0.0005$.

Sumbu horisontal interval $0 \le x \le 1$ dibuat 10 grid sehingga step sizes $h = 0.1$ dan pada sumbu vertikal menunjukkan perubahan waktu dengan time-step sizes $k = 0.0005$.

Perhatikan persamaan (1). Pada penelitian ini diasumsikan $\kappa = 1$. Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (9) didapat $\lambda = \frac{0.0005}{(0.1)^2} = 0.05$. Substitusikan secara bertahap $i = 1, i = 2, ..., i = 9$ pada persamaan (10) sehingga didapat perkalian matriks berikut :

$Aw^{(j)} = w^{(j+1)}$ [Pers.13]

Jalankan program untuk n = 10 dan k = 0.01. Hasil yang didapat dapat dilihat pada Gambar.2:

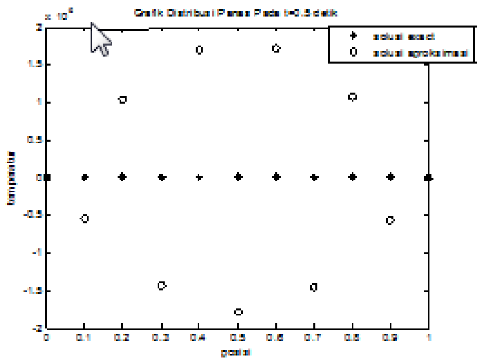
Simulasi tersebut merupakan simulasi aproksimasi distribusi panas dengan waktu maksimum 0.5 detik. Pada hasil simulasi ini metode *forward difference* untuk aproksimasi distribusi panas gagal mencapai konvergensi karena error yang dihasilkan sangat besar. Kegagalan ini akan diperbaiki dengan metode *backward difference*.

Menurunkan persamaan metode backward difference untuk menentukan solusi aproksimasi distribusi panas satu dimensi Menurunkan persamaan metode backward difference untuk menentukan solusi aproksimasi distribusi panas satu dimensi.

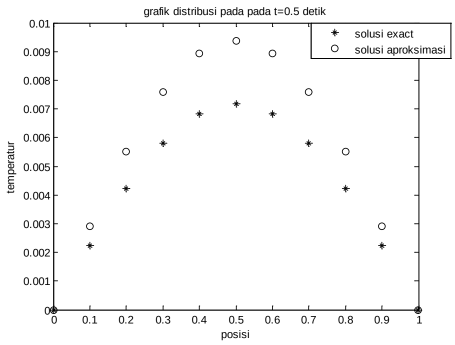
Untuk menentukan solusi aproksimasi distribusi panas dengan metode *backward difference*, substitusikan secara bertahap $i = 1, i = 2, ..., i = 9$ padapersamaan (12) sehingga didapat perkalian matriks berikut :

$Aw^{(j)} = w^{(j-1)}$ [Pers.14]

Jalankan program untuk n = 10 dan k = 0.01. Hasil yang didapat menunjukkan bahwa hasil aproksimasi distribusi panas dengan menggunakan metode *backward difference* memberikan hasil yang lebih baik dibanding dengan hasil aproksimasi distribusi panas dengan menggunakan metode *forward difference*. Hasil simulasi tersebut juga dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar. 2 Grafik solusi eksak dan solusi aproksimasi distribusi panas padat =0.5 detik , n=10 dan k = 0.01 dengan metode *forward difference*



Gambar. 3Grafik solusi eksak dan solusi aproksimasi distribusi panas padat =0.5 detik, h = 0.1 dan k = 0.01 dengan metode *backward difference*

IV. KESIMPULAN

1. Dari hasil penelitian ini dapat ditentukan solusi eksak dan solusi aproksimasi distribusi panas pada sebatang logam satu dimensi

2. Solusi aproksimasi dapat ditentukan dengan menggunakan metode *forward difference* dan metode *backward difference*.
3. Pada metode *forward difference* kekonvergenan tidak tercapai untuk t=0.5 detik, h = 0.1 dan k = 0.01.
4. Untuk t=0.5 detik, h = 0.1 dan k = 0.01 solusi aproksimasi distribusi panas dengan menggunakan metode *backward difference* memberikan hasil yang lebih baik dibanding dengan menggunakan metode *forward difference.*

V. DAFTAR PUSTAKA

[1] Frank Ayres Jr. 1981. Differential Equations. Mc. Graw-Hill.Singapore.

[2] Gerald W. Recktenwald. 2004. Finite-Difference Approximations To The Heat Equation. Portland State University.

[3] Holma, J. P. 1992. Heat Transfer, 7th Edition. Mc. Graw-Hill. New York.

[4] JamrudAminuddin. 2008. Dasar-dasarFisikaKomputasiMenggunakan Matlab. Gava Media. Yogyakarta.

[5] Mahmod Aziz Muhammed. 2005. An Explicit Wavelet-Based Finite Difference Scheme For Solving One Dimensional Heat Equation. Teknoin, Vol 10, No.1 Maret 2005.

[6] R.L. Burden and J.D. Faires. 2001. Numerical analysis for Engineers and Scientifics, seventh edition. Mc. Graw-Hill. New York.

[7] SitiSailah. 2010. DistribusiTemperaturDenganMenggunakanMetodeCrank Nicholson. JurnalPenelitian Sains, volume 13 Nomer 2B.

[8] Sun Jie. 2010. Iterative Methods For A Forward-Backward Heat Equation In Two Dimension. Appl. Math. J. Chinese Unv 2010, 25(1) : 101-111