

# Swing-up dan Stabilisasi pada Sistem Pendulum Kereta menggunakan Metode *Fuzzy* dan *Linear Quadratic Regulator*

Renditia Rachman, Trihastuti Agustinah

Jurusan Teknik Elektro, Fakultas Teknologi Industri, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)

Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111

*E-mail:* renditia.rachman10@mhs.ee.its.ac.id , trihastuti@elect-eng.its.ac.id

**Abstrak**—Sistem Pendulum Kereta merupakan sistem nonlinear dan tidak stabil yang sering digunakan untuk menguji metode-metode kontrol. Makalah ini membahas desain sistem kontrol *swing-up* menggunakan *Fuzzy Swing-up Controller* (FSC) model Mamdani dimana variabel yang dikontrol adalah sudut batang pendulum dan kecepatan sudut batang pendulum. Selain itu, juga memperhitungkan batasan panjang rel dan sinyal kontrol. Untuk stabilisasi batang pendulum pada posisi 0 radian diselesaikan menggunakan *Linear Quadratic Regulator* (LQR), disusun dari model nonlinear Sistem Pendulum Kereta yang direpresentasikan dalam model *fuzzy* Takagi-Sugeno (T-S) untuk beberapa titik kerja. Skema kontrol keseluruhan disusun dengan konsep *Parallel Distributed Compensation* (PDC) yang merupakan kontroler state-feedback yang dinamis. Hasil simulasi dan implementasi menunjukkan bahwa Sistem Pendulum Kereta dapat melakukan *swing-up* dan mempertahankan batang pendulum pada posisi terbalik.

**Kata Kunci**—*Fuzzy*, *Linear Quadratic Regulator*, Sistem Pendulum Kereta, Stabilisasi, *Swing-up*

## I. PENDAHULUAN

Dalam perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, Sistem Pendulum Kereta merupakan suatu sistem yang sangat penting dalam penelitian di bidang kontrol. Berbagai teori dan metode kontrol banyak diuji dan dibandingkan melalui pengujian terhadap Sistem Pendulum Kereta. Hal ini dikarenakan Sistem Pendulum Kereta merupakan sistem nonlinear yang kompleks dan tidak stabil, serta dapat dilinearkan di sekitar titik kesetimbangan. Sistem seperti ini, dapat ditemukan pada robot humanoid dan alat transportasi segway.

Permasalahan kontrol yang biasa terdapat pada Sistem Pendulum Kereta adalah *swing-up*, stabilisasi, dan *tracking*. *Swing-up* merupakan upaya yang dilakukan untuk mengayunkan batang pendulum dari posisi menggantung (pendan) ke posisi terbalik. Stabilisasi adalah upaya untuk mempertahankan kestabilan batang pendulum pada posisi terbalik. Sedangkan *tracking* merupakan upaya untuk mengontrol kereta agar bergerak mengikuti sinyal referensi dan tetap melakukan stabilisasi.

Pada permasalahan *swing-up*, penyelesaian dengan metode *energy control* [1] yakni dengan memasukkan energi (gaya) pada Sistem Pendulum Kereta dengan menerapkan aksi kontrol pada kereta yang tepat. Metode ini bekerja dengan baik ketika panjang lintasan (rel) kereta tidak terbatas. Lebih

jauh lagi, algoritma metode tersebut dikembangkan dengan menerapkan panjang lintasan yang terbatas [2].

Permasalahan yang akan diselesaikan dalam makalah ini adalah *swing-up* dan stabilisasi. Mengacu pada [3] yakni penyelesaiannya dilakukan dengan merancang *Fuzzy Swing-up Controller* (FSC) berbasis model *fuzzy* Mamdani. Penggunaan kontroler *fuzzy* dipilih karena memiliki perhitungan matematis yang sederhana. Selanjutnya, dilakukan stabilisasi Sistem Pendulum Kereta di sekitar titik ekuilibriumnya. Permasalahan-permasalahan tersebut dilakukan dengan menggunakan kereta dengan panjang lintasan dan aksi kontrol yang terbatas.

Karakteristik nonlinear dari Sistem Pendulum Kereta perlu direpresentasikan ke dalam model linear terlebih dahulu. Perilaku nonlinear Sistem Pendulum Kereta dapat direpresentasikan dengan menggunakan model *fuzzy*. Langkah awal yang perlu dilakukan adalah merepresentasikan plant lokal yang dinamis dari perbedaan daerah titik kerja ke model linear. Kemudian dibuat model dan aturan *fuzzy* yang sesuai untuk dapat melakukan *swing-up*. Setelah proses *swing-up* akan dilakukan stabilisasi menggunakan *Linear Quadratic Regulator* (LQR) untuk mendapatkan nilai gain state feedback sehingga batang pendulum dapat dipertahankan pada posisi terbalik.

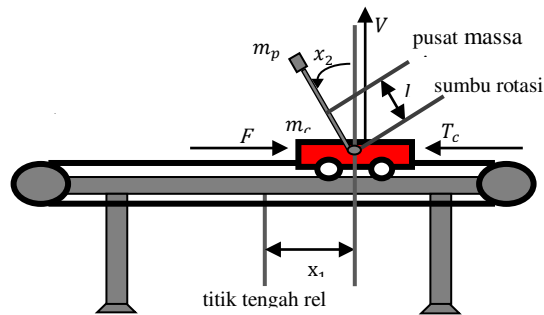
## II. TEORIDASAR

Struktur Sistem Pendulum Kereta [4] dibagi menjadi dua bagian, yaitu batang pendulum dan kereta. Batang pendulum dapat berotasi secara vertikal yang bersumbu pada sisi kereta. Sedangkan kereta mampu bergerak arah horizontal pada rel dengan panjang yang terbatas. Model fisik Sistem Pendulum Kereta ditunjukkan pada Gambar 1.

Sistem dinamik Sistem Pendulum Kereta memiliki empat elemen vektor *state* yang dinyatakan dalam  $x$ . Keempat elemen vektor *state* tersebut adalah:

- $x_1$  : Posisi kereta diukur dari titik tengah rel
- $x_2$  : Sudut pendulum terhadap garis vertikal
- $x_3$  : Kecepatan kereta
- $x_4$  : Kecepatan sudut batang pendulum

Model matematika dalam bentuk persamaan *state* dapat dituliskan sebagai berikut:



Gambar 1 Diagram fisik Sistem Pendulum Kereta

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= \frac{a(F - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\ \dot{x}_4 &= \frac{l \cos x_2 (F - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + \mu g \sin x_2 - f_p x_4}{J + \mu l \sin^2 x_2} \quad (1) \end{aligned}$$

dengan:

$$a = l^2 + \frac{J}{m_c + m_p}$$

$$\mu = (m_c + m_p)l$$

III. PERANCANGAN SISTEM KONTROL

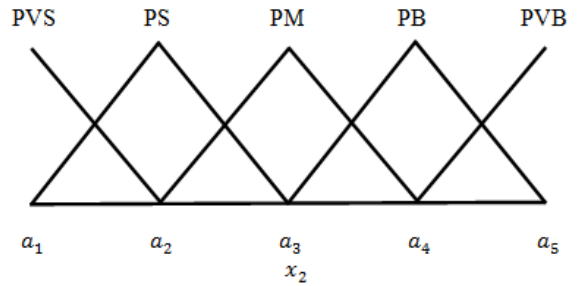
Pada bagian ini membahas perancangan algoritma *Fuzzy Swing-up Controller* (FSC) yang bertujuan untuk mengayunkan batang pendulum dari posisi menggantung (pendan) ke posisi terbalik. Kemudian, dibahas mengenai teori kontrol optimal yang digunakan untuk menstabilkan batang pendulum pada posisi terbaliknya, teori ini biasa disebut *Linear Quadratic Regulator* (LQR).

A. *Fuzzy Swing-up Controller* (FSC)

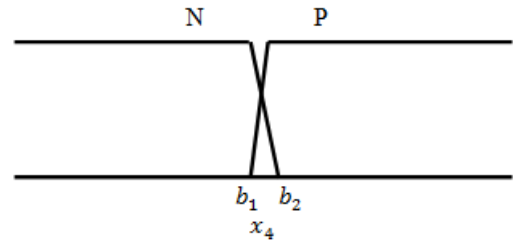
Pada Sistem Pendulum Kereta memiliki aksi kontrol yang diberikan pada kereta, apabila aksi kontrol tersebut mendorong kereta bergerak ke kiri maka akan menyebabkan batang pendulum bergerak ke kanan dan jika aksi kontrol mendorong kereta bergerak ke kanan maka akan menyebabkan batang pendulum bergerak ke kiri. Hal ini dapat diketahui bahwa aksi kontrol yang diterapkan pada kereta akan menggerakkan batang pendulum dengan arah yang berlawanan.

Dalam perancangan FSC, variabel masukan yang dikontrol adalah sudut batang pendulum  $x_2$  dan kecepatan sudut batang pendulum  $x_4$ . Sedangkan variabel keluaran adalah aksi kontrol  $F$ . Setiap variabel diklasifikasikan dalam beberapa himpunan *fuzzy*.

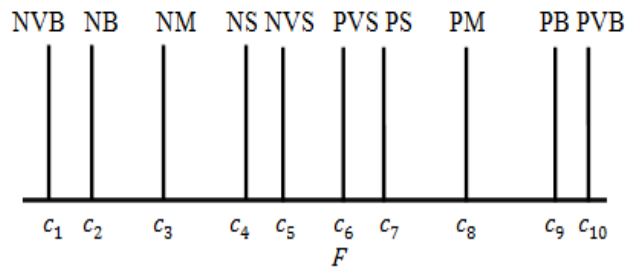
Variabel masukan  $x_2$  terdiri dari lima himpunan *fuzzy*, yaitu *Positive Very Small* (PVS), *Positive Small* (PS), *Positive Medium* (PM), *Positive Big* (PB), dan *Positive Very Big*



Gambar 2 Fungsi Keanggotaan Variabel Masukan  $x_2$



Gambar 3 Fungsi Keanggotaan Variabel Masukan  $x_4$



Gambar 4 Fungsi Keanggotaan Variabel Keluaran  $F$

Tabel 1 Aturan *Fuzzy Swing-up Controller*

$x_4$	$x_2$				
	PVS	PS	PM	PB	PVB
N	NVB	PVS	PS	PM	PB
P	NB	NM	NS	NVS	PVB

(PVB). Variabel masukan  $x_4$  dibagi menjadi dua himpunan *fuzzy*, yaitu *Negative* (N) dan *Positive* (P).

Sedangkan variabel keluaran  $F$  dibagi menjadi sepuluh himpunan *fuzzy*, yaitu *Negative Very Big* (NVB), *Negative Big* (NB), *Negative Medium* (NM), *Negative Small* (NS), *Negative Very Small* (NVS), *Positive Very Small* (PVS), *Positive Small* (PS), *Positive Medium* (PM), *Positive Big* (PB), dan *Positive Very Big* (PVB). Adapun fungsi keanggotaan untuk variabel masukan dan keluaran dapat dilihat pada Gambar 2, Gambar 3, dan Gambar 4. Sedangkan aturan *fuzzy* selengkapnya dapat dilihat pada Tabel 1.

Misal sudut batang pendulum  $x_2$  berada pada PVB dan kecepatan sudut batang pendulum  $x_4$  adalah P, maka diberikan gaya (aksi kontrol) PVB agar batang pendulum dapat secepatnya berada pada posisi terbaliknya. Kemudian, ketika batang pendulum bergerak searah jarum jam (N), maka besarnya gaya dinaikkan menjadi PB, PM, PS, PVS. Setelah sudut batang pendulum berada pada PVS, maka berikan gaya

NVB agar batang pendulum secepatnya berada pada posisi terbaliknya, begitu seterusnya. Dengan pemilihan fungsi keanggotaan yang tepat, maka batang pendulum dapat berayun ke posisi terbalik.

**B. Perancangan Kontrol Stabilisasi**

Untuk mempertahankan batang pendulum pada posisi terbalik, maka diperlukan kontrol stabilisasi. Pada makalah ini digunakan kontrol optimal atau disebut *Linear Quadratic Regulator* (LQR) [5]. Pada dasarnya LQR digunakan untuk meminimumkan persamaan indeks performansi dari

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \tag{2}$$

dengan syarat

$$\dot{x} = Ax + Bu ; u = -Kx \tag{3}$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (2) ke dalam Persamaan (3) diperoleh

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} x^T Q x + (-Kx)^T R (-Kx) dt \\ &= \int_0^{\infty} (x^T Q x + x^T K^T R K x) dt \\ &= \int_0^{\infty} x^T (Q + K^T R K) x dt \end{aligned} \tag{4}$$

Solusi kontrol optimal pada dasarnya adalah mendapatkan nilai *gain* **K** yang mampu meminimalkan indeks performansi (2). Gain tersebut didapatkan melalui perhitungan persamaan aljabar Riccati.

Pada makalah ini, proses kontrol stabilisasi dengan menggunakan LQR digunakan tiga titik kerja, yaitu  $x_2 = 0$  rad,  $x_2 = 0,175$  rad, dan  $x_2 = 0,2$  rad. Selanjutnya dengan menggunakan persamaan Aljabar Riccati diperoleh tiga nilai **K** hasil dari linearisasi dari tiga titik kerja Sistem Pendulum Kereta.

Untuk titik kerja pertama  $x_2 = 0$  rad:

$$x_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \text{ dan } u = 0$$

sehingga diperoleh

$$\dot{x} = A_1 x + B_1 u$$

dengan

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,2526 & 0 & -0,0001 \\ 0 & 15,0421 & 0 & -0,0079 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8272 \\ 1,2370 \end{bmatrix}$$

didapatkan matriks **K**<sub>1</sub>

$$K_1 = [-31,6228 \ 112,4825 \ -25,4363 \ 29,1471]$$

Untuk titik kerja kedua adalah  $x_2 = [0 \ 0,175 \ 0 \ 0]^T$  dan  $u = 0$  diperoleh

$$\dot{x} = A_2 x + B_2 u$$

dengan

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,2367 & 0 & -0,0001 \\ 0 & 14,7777 & 0 & -0,0079 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8266 \\ 1,2171 \end{bmatrix}$$

didapatkan matriks **K**<sub>2</sub>

$$K_2 = [-31,6228 \ 113,4464 \ -25,5705 \ 29,6430]$$

Adapun untuk titik kerja ketiga adalah  $x_2 = [0 \ 0,2 \ 0 \ 0]^T$  dan  $u = 0$  diperoleh

$$\dot{x} = A_3 x + B_3 u$$

dengan

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,2319 & 0 & -0,0001 \\ 0 & 14,6974 & 0 & -0,0079 \end{bmatrix}; B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8264 \\ 1,2111 \end{bmatrix}$$

didapatkan matriks **K**<sub>3</sub>

$$K_3 = [-31,6228 \ 113,7463 \ -25,6121 \ 29,7978]$$

Setelah diperoleh ketiga **K** dari tiga titik linearisasi, digunakan *fuzzy* T-S [6] untuk menentukan **K** mana yang digunakan saat proses stabilisasi berlangsung. Fungsi keanggotaan yang digunakan dalam aturan *fuzzy* hanya untuk posisi sudut pendulum. Fungsi keanggotaan yang digunakan pada makalah ini adalah jenis triangular dengan fungsi sebagai berikut

$$f(x, a, b, c) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & c \leq x \end{cases} \tag{5}$$

Makalah ini menggunakan tiga aturan, yaitu pada saat kondisi sudut 0 rad, kemudian pada saat kondisi sudut  $\pm 0,175$  rad, dan terakhir pada kondisi sudut  $\pm 0,2$  rad.

Aturan-aturan yang digunakan terdiri dari dua macam, yaitu aturan untuk plant dan aturan untuk kontroler. Adapun aturan untuk plant adalah sebagai berikut

Aturan plant ke-1:

If  $x_2$  adalah  $M_1$  (sekitar 0 rad)

Then  $\dot{x} = A_1 x + B_1 u$  (6)

Aturan plant ke-2:

If  $x_2$  adalah  $M_2$  (sekitar  $\pm 0,175$  rad)

Then  $\dot{x} = A_2x + B_2u$  (7)

Aturan plant ke-3:

If  $x_2$  adalah  $M_3$  (sekitar  $\pm 0,2$  rad)

Then  $\dot{x} = A_3x + B_3u$  (8)

Dengan menggunakan konsep Parallel Distributed Compensation (PDC), dapat disusun aturan kontroler fuzzy yang bersesuaian dengan aturan plant menjadi sebagai berikut

Aturan kontroler ke-1:

If  $x_2$  adalah  $M_1$  (sekitar 0 rad)

Then  $u = -K_1x$  (9)

Aturan kontroler ke-2:

If  $x_2$  adalah  $M_2$  (sekitar  $\pm 0,175$  rad)

Then  $u = -K_2x$  (10)

Aturan kontroler ke-3:

If  $x_2$  adalah  $M_3$  (sekitar  $\pm 0,2$  rad)

Then  $u = -K_3x$  (11)

Hasil untuk sinyal kontrol secara keseluruhan dapat ditulis sebagai berikut

$$u = -(\mu_1 K_1 + \mu_2 K_2 + \mu_3 K_3) \quad (12)$$

dengan  $\mu_1$  adalah pembobot dari aturan ke-1,  $\mu_2$  adalah pembobot dari aturan ke-2, dan  $\mu_3$  adalah pembobot dari aturan ke-3.

#### IV. HASIL SIMULASI DAN IMPLEMENTASI

##### A. Simulasi

Parameter-parameter yang digunakan FSC untuk simulasi ditunjukkan pada Tabel 2 yang mengacu pada Gambar 2, Gambar 3, dan Gambar 4 serta aturan fuzzy pada Tabel 1.

Respons posisi kereta (dalam satuan meter) menggunakan metode yang diusulkan ditunjukkan pada Gambar 5. Dari respons tersebut dapat diketahui bahwa mula-mula kereta bergerak ke kiri dan kemudian bergerak ke kanan untuk mengayunkan batang pendulum dari posisi menggantung (pendan) ke posisi terbalik (sekitar 0 radian). Untuk mengayunkan batang pendulum tersebut, kereta menyimpang sekitar  $\pm 0,4$  m dan membutuhkan waktu sekitar lima detik untuk menstabilkan batang pendulum.

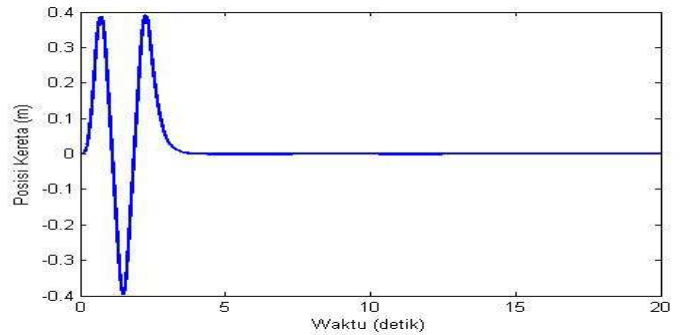
Hasil respons sudut batang pendulum direpresentasikan pada Gambar 6. Respons sudut batang pendulum diukur terhadap sumbu vertikal (dalam satuan radian). Sudut 0 radian kondisi ketika batang pendulum dalam posisi terbalik. Batang pendulum mencapai posisi terbalik setelah berayun sebanyak dua kali. Pada simulasi tersebut, batang pendulum mencapai ayunan maksimum sebesar 3,5 radian. Kemudian batang pendulum menuju 0 radian, sehingga berada pada posisi terbalik.

Tabel 2  
Parameter FSC untuk Simulasi

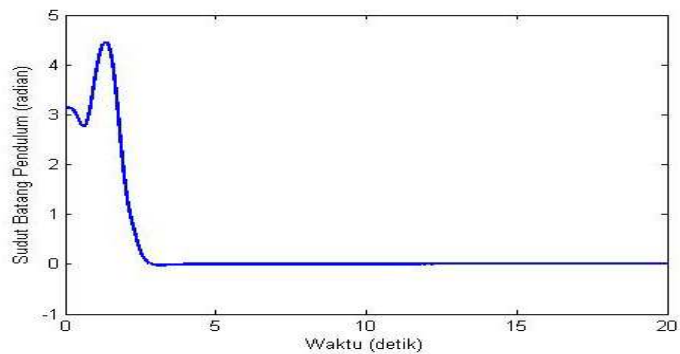
$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$b_1$	$b_2$
0	1,57	3,14	4,71	6,28	-0,08	0,08

$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$
-12	-11	-7	-4	-3

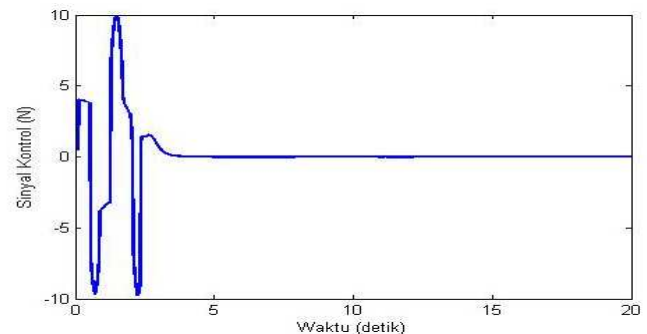
$c_6$	$c_7$	$c_8$	$c_9$	$c_{10}$
3	4	7	11	12



Gambar 5 Respons Posisi Kereta



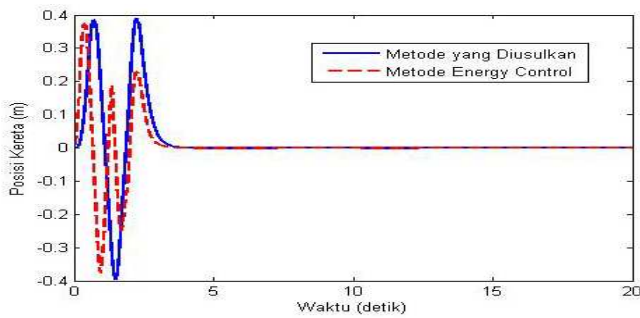
Gambar 6 Respons Sudut Batang Pendulum



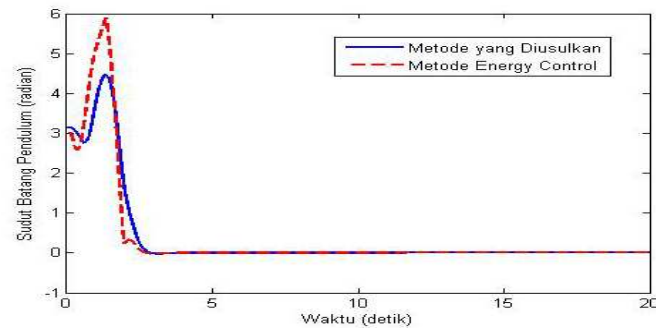
Gambar 7 Respons Sinyal Kontrol

Sedangkan sinyal kontrol yang diperlukan untuk *swing-up* dan stabilisasi ditunjukkan pada Gambar 7. Sinyal kontrol absolut maksimum pada 10 N yang terjadi saat proses *swing-up*. Sinyal kontrol tersebut berubah-ubah sesuai dengan aturan fuzzy yang telah dibuat. Setelah batang pendulum mencapai kestabilan pada sudut 0 radian, sinyal kontrol menjadi konstan

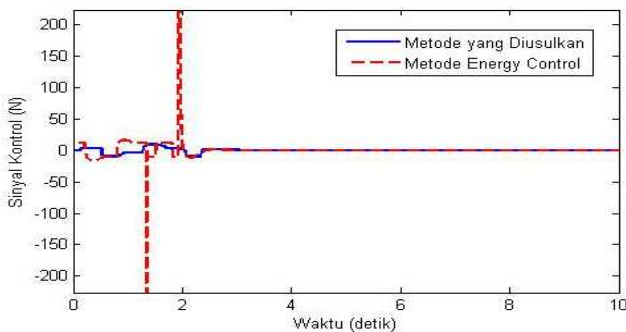
pada 0 N.



Gambar 8 Perbandingan Respons Posisi Kereta Antara Metode yang Diusulkan dengan Metode Energy Control



Gambar 9 Perbandingan Respons Sudut Batang Pendulum Antara Metode yang Diusulkan dengan Metode Energy Control



Gambar 10 Perbandingan Respons Sinyal Kontrol Antara Metode yang Diusulkan dengan Metode Energy Control

**B. Perbandingan Hasil Simulasi Metode yang diusulkan dengan Metode Energy Control**

Perbandingan respons posisi kereta (dalam satuan meter) menggunakan metode yang diusulkan dengan metode *energy control* [1] ditunjukkan pada Gambar 8.

Respons posisi kereta yang menggunakan metode *energy control*, kereta bergerak ke kanan sebanyak tiga kali dan bergerak ke kiri sebanyak dua kali, dengan gerakannya kereta tersebut dapat mengayunkan batang pendulum dari posisi menggantung (pendan) ke posisi terbalik (sekitar 0 radian). Untuk mengayunkan batang pendulum tersebut, kereta menyimpang hingga sekitar  $\pm 0,37$  m. Sedangkan respons posisi kereta pada metode yang diusulkan kereta bergerak ke kanan sebanyak dua kali dan bergerak ke kiri sebanyak satu kali.

Untuk perbandingan respons sudut batang pendulum antara metode yang diusulkan dengan metode *energy control* dapat

dilihat pada Gambar 9. Dari gambar tersebut dapat diketahui bahwa dengan menggunakan metode *energy control* terdapat *overshoot* pada posisi sudut batang pendulum sekitar  $\pm 5,64$  radian dan terdapat diskontinu ketika *switch* dari proses *swing-up* ke stabilisasi.

Untuk perbandingan respons sinyal kontrol antara metode yang diusulkan dengan metode *energy control* ditunjukkan pada Gambar 10. Dari gambar tersebut dapat diketahui bahwa pada metode *energy control* memiliki sinyal kontrol absolut maksimum yang sangat besar yaitu 200 N. Sedangkan pada metode yang diusulkan memiliki sinyal kontrol absolut maksimum sebesar 10 N.

**C. Implementasi**

Parameter-parameter yang digunakan FSC untuk implementasi sama halnya dengan yang disebutkan pada Tabel 2 yang mengacu pada Gambar 2, Gambar 3, dan Gambar 4 dengan aturan *fuzzy* pada Tabel 1.

Gambar 11-13 adalah respons posisi kereta untuk ketiga implementasi dalam satuan meter. Pada ketiga implementasi, kereta bergerak ke kanan dua kali dan ke kiri satu kali untuk mengayunkan batang pendulum ke posisi terbalik. Untuk mengayunkan batang pendulum tersebut kereta bergerak maksimum sejauh  $\pm 0,35$  m.

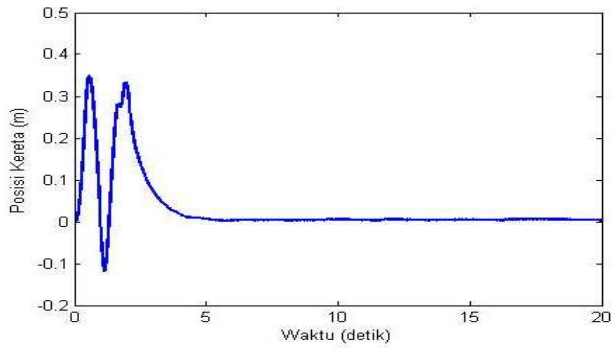
Pada implementasi pertama, terdapat diskontinu pada saat *switch* dari proses *swing-up* ke stabilisasi. Posisi kereta setelah melakukan *swing-up* kembali dengan jarak 0,005 m dari titik tengah lintasan.

Pada implementasi kedua, setelah kereta bergerak ke kanan dan ke kiri masing-masing sebanyak satu kali, kereta kembali bergerak bolak-balik sesaat berjarak 0,28 m dari titik tengah rel sebelum kembali ke titik tengah rel.

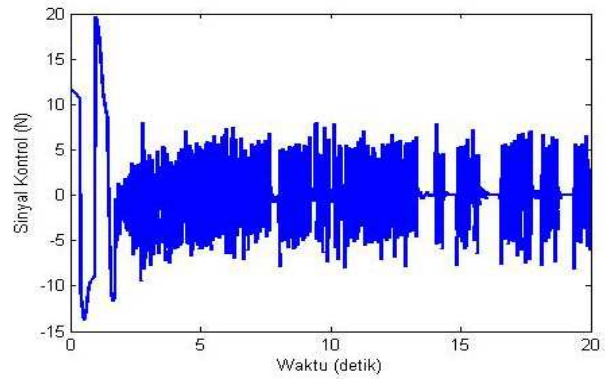
Pada implementasi ketiga, pertama-tama kereta bergerak ke kanan sejauh  $\pm 0,34$  m kemudian bergerak ke kiri pada posisi  $\pm 0,105$  m dan bergerak lagi ke kanan pada posisi  $\pm 0,295$  m dan akhirnya dapat kembali lagi ke titik tengah rel. Waktu yang dibutuhkan untuk melakukan *swing-up* adalah  $\pm 4$  detik.

Gambar 14 adalah respons sudut batang pendulum dari ketiga implementasi. Dari gambar tersebut dapat diketahui bahwa implementasi ketiga memiliki respons yang lebih baik diantara implementasi pertama dan kedua. Hal ini dikarenakan tidak adanya diskontinuitas serta batang pendulum pada implementasi ketiga lebih cepat menuju posisi terbalik.

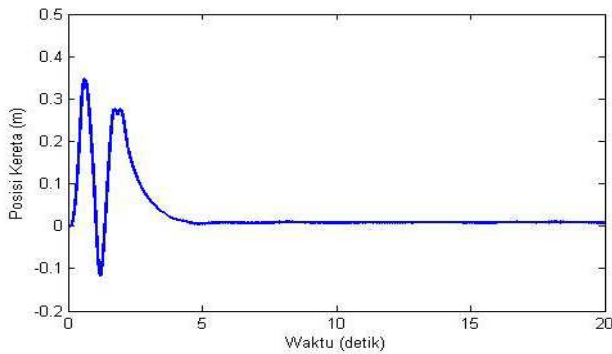
Dari ketiga implementasi tersebut, respons terbaik yaitu pada implementasi ketiga. Untuk respons sinyal kontrol pada implementasi ketiga ditunjukkan pada Gambar 15 sinyal kontrol absolut maksimum pada  $\pm 20$  N pada saat *swing-up*. Sedangkan pada saat stabilisasi sinyal kontrol absolut maksimum di sekitar  $\pm 7$  N.



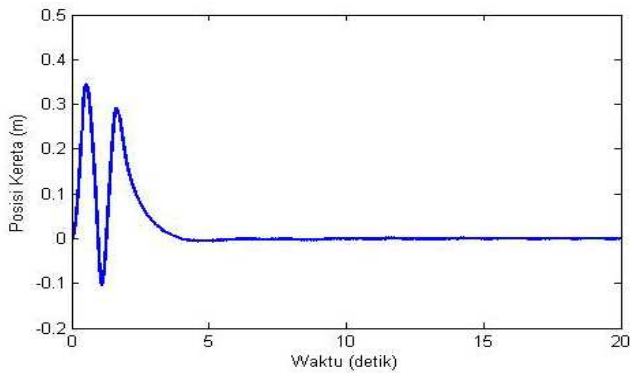
Gambar 11 Respons Posisi Kereta pada Implementasi Pertama



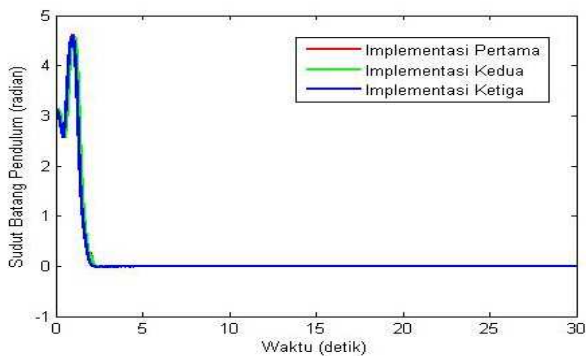
Gambar 15 Respons Sinyal Kontrol pada Implementasi Ketiga



Gambar 12 Respons Posisi Kereta pada Implementasi Kedua



Gambar 13 Respons Posisi Kereta pada Implementasi Ketiga



Gambar 14 Respons Sudut Batang Pendulum pada Implementasi

### V. KESIMPULAN

Dari hasil pengujian sistem kontrol hasil perancangan pada simulasi maupun implementasi dapat diambil kesimpulan bahwa proses *swing-up* dengan menggunakan FSC disertai aturan *fuzzy* yang sederhana mampu mengayunkan batang pendulum dari posisi menggantung (pendan) ke posisi terbalik dalam waktu yang singkat dan jumlah ayunan yang sedikit. Metode *Linear Quadratic regulator* (LQR) terbukti mampu mempertahankan kestabilan batang pendulum pada posisi terbalik.

### DAFTAR PUSTAKA

- [1] K. J. Aström and K. Furuta, "Swinging up a pendulum by energy control", *Automatica*, vol. 36, pp. 287-295, 2000.
- [2] D. Chatterjee, A. Patra, and H. K. Joglekar, "Swing-up and stabilization of a cart-pendulum system under restricted cart track length", *Systems and Control Letters*, vol. 47, pp. 355-364, 2002.
- [3] N. Muškinja dan B. Tovornik, "Swinging Up and Stabilization of a Real Inverted Pendulum," *IEEE Trans. on Ind. Electron.*, vol. 53, pp. 631-639, April, 2006.
- [4] \_\_\_\_\_, "Control in a MATLAB Environment (MATLAB 6.5 Version)", Feedback Instruments Ltd., 2004
- [5] D. S. Naidu, "*Optimal Control System*" CRC Press, Idaho, Ch.3-4, 2002
- [6] K. M. Passino, dan S. Yurkovich, "*Fuzzy Control*", Addison Wesley Longman, California, 1998.