KETIADAAN RUANG FOCK BAGI NEUTRINO FLAVOR

Erika Rani[1]

Abstrak : Telah dikaji bahwa tidak ada kemungkinan untuk membangun ruang Fock bagi keadaan flavor. Suatu ruang Fock tak berhingga dari neutrino flavor bergantung pada parameter massa yang tidak fisis. Ini menunjukkan konstruksi matematis yang cerdas tanpa relevansi fisis apapun.

Kata Kunci : Ruang Fock, Keadaan Flavor

PENDAHULUAN

Neutrino merupakan salah satu topik yang paling menarik dalam fisika partikel. Dalam kajian model standar (MS), neutrino hadir diantara unsur-unsur fundamental bersamaan dengan lepton bermuatan dan kuark. Oleh karena massanya belum terukur secara langsung, neutrino dalam MS hadir sebagai fermion tak bermassa yang dideskripsikan dengan spinor Weyl. Kajian MS ini tidak sesuai dengan hasil eksperimen yang menyatakan bahwa neutrino memiliki massa yang sangat kecil dan memiliki muatan yang netral.

Dilain hal bauran Kobayasi-Maskawa tiga flavor merupakan komponen penting dalam model standar (MS)yang mana telah menunjukkan bahwa neutrino memiliki massa. Keberadaan bauran neutrino memberikan implikasi bahwa medan neutrino flavor $(\nu_{\alpha L})$ merupakan kobinasi linier dari neutrino masif (ν_{kL}) dan memungkinkan neutrino mengalami transisi dari satu keadaan ke keadaan lain

$$\nu_{\alpha L} = \sum_{k=1}^{3} U_{\alpha k} \nu_{kL} \quad (\alpha = e, \mu, \tau) \tag{1}$$

dimana U adalah matrik bauran dan k adalah indek massa $k = 1,2,3$.

Keadaan neutrino flavor digambarkan dengan

$$|\nu_{\alpha}\rangle = \sum_{k=1}^{3} U^{*}_{\alpha k} |\nu_{k}\rangle \quad (\alpha = e, \mu, \tau) \tag{2}$$

dimana $|\nu_k\rangle$ merupakan keadaan neutrino dengan massa m_k yang memiliki ruang Fock dari kuantisasi medan neutrino masif. Transformasi bauran neutrino ini diyakini merupakan perangkat dasar untuk memahami lebih lanjut fenomena neutrino. Akan tetapi muncul ketidaksesuaian antara neutrino flavor dan masif dalam formulasi ini apabila ditelisik secara langsung.

[1] Fisika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang

Formulasi Umum Ruang Fock

Ruang Fock adalah sistem aljabar yang digunakan dalam mekanika kuantum untuk menggambarkan suatu keadaan kuantum dengan satu variabel atau sejumlah partikel yang tak dikenal.

Secara teknik, Ruang Fock merupakan ruang Hilbert yang dibangkitkan dari penjumlahan langsung tensor produk.

$$F_\upsilon(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_\upsilon H^{\otimes n}$$

Dengan S_υ adalah operator simetri atau antisimetri, υ = + untuk partikel yang memenuhi statistik boson dan υ = - untuk partikel yang memenuhi statistik fermion. H adalah ruang Hilbert.

Suatu keadaan fermion didefinisikan dengan

$$S_\pm\left|i_1, i_2, \cdots, i_N\right\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_P (\pm 1)^P P\left|i_1, i_2, \cdots, i_N\right\rangle \tag{3}$$

dimana P adalah operator permutasi. Pers(3) dapat juga direpresentasikan dalam bentuk determinan

$$S_-\left|i_1, i_2, \cdots, i_N\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}}\begin{vmatrix} \left|i_1\right\rangle_1 & \left|i_1\right\rangle_2 & \cdots & \left|i_1\right\rangle_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left|i_N\right\rangle_1 & \left|i_N\right\rangle_2 & \cdots & \left|i_N\right\rangle_N \end{vmatrix} \tag{4}$$

Bentuk determinan ini dikenal dengan determinan Slater. Jika beberapa keadaan partikel tunggal adalah sama, harga determinannya nol. Apabila semua i_α berbeda, keadaan antisimetri akan ternormalisasi.

Berikut ini kita akan mengkarakterisasi suatu keadaan dengan mengklasifikasikan bilangan penempatannya, misalnya kita mengambil harga 0 dan 1. Suatu keadaan dengan partikel n_1 pada keadaan 1 dan partikel n_2 pada keadaan 2 dan seterusnya adalah

$$\left|n_1, n_2, \cdots\right\rangle \tag{5}$$

Suatu keadaan dimana tidak ada partikel dalam vakum di representasikan dengan

$$\left|0\right\rangle = \left|0,0,\cdots\right\rangle \tag{6}$$

Kita mengkombinasikan keadaan vakum, keadaan partikel tunggal, dan keadaan lainnya untuk membangun suatu ruang. Untuk fermion, ruang ini dikenal dengan ruang Fock. Produk skalar dari keadaan ini dinyatakan sebagai berikut

$$\left\langle n_1, n_2, \cdots \mid n_{1'}, n_{2'}, \cdots\right\rangle = \delta_{n_1 n_{1'}}\delta_{n_2 n_{2'}}\cdots \tag{7}$$

Untuk keadaan dengan jumlah partikelnya sama (dari subruang tunggal), produk skalarnya identik dengan produk skalar pada umumnya. Sedangkan keadaan dari subruang yang berbeda produk skalarnya selalu nol. Oleh karena itu kita memiliki hubungan kelengkapan

$$\sum_{n_1=0}^{1}\sum_{n=0}^{1}\cdots\left|n_1,n_2,\cdots\right\rangle\left\langle n_1,n_2,\cdots\right| = \mathbf{1}. \tag{8}$$

Selanjutnya kita mendefinisikan operator kreasi dengan

$$S_-\left|i_1,i_2,\cdots i_N\right\rangle = a_{i_2}^\dagger a_{i_1}^\dagger\cdots a_{i_N}^\dagger\left|0\right\rangle \tag{9}$$

Karena keadaan di atas adalah sama kecuali hanya dibedakan dengan indeksnya, antikomutatornya adalah

$$\left\{a_i^\dagger,a_j^\dagger\right\} = 0 \tag{10}$$

Untuk itu keadaan partikel direpresentasikan dengan

$$\left|n_1,n_2,\cdots\right\rangle = (a_1^\dagger)^{n_1}(a_2^\dagger)^{n_2}\cdots\left|0\right\rangle,\ n_i = 0,1 \tag{11}$$

Efek dari operator $a_i^\dagger$ adalah

$$a_i^\dagger\left|\cdots,n_i,\cdots\right\rangle = (1-n_i)(-1)^{\sum_{j<i} n_j}\left|\cdots,n_i+1,\cdots\right\rangle \tag{12}$$

Sedangkan untuk operator anihilasi a_i

$$a_i\left|\cdots,n_i,\cdots\right\rangle = n_i(-1)^{\sum_{j<i} n_j}\left|\cdots,n_i-1,\cdots\right\rangle \tag{13}$$

Operator a_i dan $a^\dagger{}_i$ berturut-turut dioperasikan dari sebelah kiri ke pers. (12) dan (13) diperoleh

$$\begin{aligned} a_i a_i^\dagger\left|\cdots,n_i,\cdots\right\rangle &= (1-n_i)(-1)^{2\sum_{j<i} n_j}(n_i+1)\left|\cdots,n_i,\cdots\right\rangle \\ &= (1-n_i)\left|\cdots,n_i,\cdots\right\rangle \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} a_i^\dagger a_i\left|\cdots,n_i,\cdots\right\rangle &= n_i(-1)^{2\sum_{j<i} n_j}(1-n_i+1)\left|\cdots,n_i,\cdots\right\rangle \\ &= n_i\left|\cdots,n_i,\cdots\right\rangle \end{aligned} \tag{15}$$

Karena $n_i \in 0,1$ maka $n_i^2 = n_i$ dan $(-1)^{2\sum_{j<i} n_j} = 1$. Pers. (14)-(15) dijumlahkan dan didapatkan hubungan antikomutasi

$$\left\{a_i,a_i^\dagger\right\} = 1. \tag{16}$$

Dalam antikomutator $\left\{a_i,a_j^\dagger\right\}$ dengan $i \neq j$, faktor fase dua suku adalah berbeda. Dengan demikian Kaidah antikomutasi untuk fermion adalah

$$\left\{a_i,a_j^\dagger\right\} = \delta_{ij}, \qquad \left\{a_i,a_j{}^\dagger\right\} = \left\{a_i^\dagger,a_j^\dagger\right\} = 0 \tag{18}$$

Ruang Fock Untuk Medan Flavor

Hubungan bauran neutrino yang menggambarkan medan neutrino flavor ν_α relatif terhadap medan neutrino masif ν_k diberikan

$$\nu_{\alpha}(x) = \sum kU_{\alpha \mathbf{k}} \nu_{\mathbf{k}}(x) \quad (19)$$

dimana $\alpha = e, \mu, \tau$ adalah indek flavor sedangkan k = 1, 2, 3 adalah indek massa dan U adalah matrik bauran 3×3.

Didefinisikan medan neutrino masif

$$\nu_{\mathbf{k}}(x) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \times \sum_{h=\pm 1} \left[a_{\nu_{\mathbf{k}}}(\mathbf{p},h) u_{\nu_{\mathbf{k}}}(\mathbf{p},h) e^{-iE_{\nu_{\mathbf{k}}} t + i\mathbf{px}} + b^{\dagger}_{\nu_{\mathbf{k}}}(\mathbf{p},h) v_{\nu_{\mathbf{k}}}(\mathbf{p},h) e^{iE_{\nu_{\mathbf{k}}} t - i\mathbf{px}} \right] \quad (20)$$

dengan $E_{\nu_{\mathbf{k}}} = \sqrt{p^2 + m^2_{\nu_{\mathbf{k}}}}$, h adalah helisitas, $u_{\nu_{\mathbf{k}}}(\mathbf{p},h)$ dan $v_{\nu_{\mathbf{k}}}(\mathbf{p},h)$ adalah spinor-4 dalam ruang momentum. Medan neutrino masif ini memenuhi hubungan antikomutasi kanonik bergantung waktu berikut

$$\{\nu_{\mathbf{k}\xi}(t,\mathbf{x}), \nu^{\dagger}_{\mathbf{j}\eta}(t,\mathbf{x})\} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta_{kj}\delta_{\xi\eta} \quad (21)$$

dimana ξ dan η adalah indek Dirac $(\xi, \eta = 1, \cdots, 4)$ dan

$$\{\nu_{\mathbf{k}\xi}(t,\mathbf{x}), \nu_{\mathbf{j}\eta}(t,\mathbf{x})\} = \{\nu^{\dagger}_{\mathbf{k}\xi}(t,\mathbf{x}), \nu^{\dagger}_{\mathbf{j}\eta}(t,\mathbf{x})\} = 0. \quad (22)$$

Dengan menggunakan normalsasi Blasone-Vitello (BV)

$$u^{\dagger}_{\nu_{\mathbf{k}}}(\mathbf{p},h) u_{\nu_{\mathbf{k}}}(\mathbf{p},h') = v^{\dagger}_{\nu_{\mathbf{k}}}(\mathbf{p},h) v_{\nu_{\mathbf{k}}}(\mathbf{p},h') = \delta_{hh'}, \quad (23)$$

dan hubungan ortogonalitas dan kelengkapan

$$u^{\dagger}_{\nu_{\mathbf{k}}}(\mathbf{p},h) v_{\nu_{\mathbf{k}}}(-\mathbf{p},h') = 0 \quad (24)$$

$$\sum_h \left(u_{\nu_{\mathbf{k}}}(\mathbf{p},h) u^{\dagger}_{\nu_{\mathbf{k}}}(\mathbf{p},h) + v_{\nu_{\mathbf{k}}}(-\mathbf{p},h) v^{\dagger}_{\nu_{\mathbf{k}}}(-\mathbf{p},h) \right) = 1, \quad (25)$$

maka operator pada pers. (20) dapat diekspresikan dengan

$$a_{\nu_{\mathbf{k}}}(\mathbf{p},h) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} \times u^{\dagger}_{\nu_{\mathbf{k}}}(\mathbf{p},h) \nu_{\mathbf{k}}(x) e^{iE_{\nu_{\mathbf{k}}} t - ipx} \quad (26)$$

$$b_{\nu_{\mathbf{k}}}(\mathbf{p},h) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} \times \nu^{\dagger}_{\mathbf{k}}(x) V_{\nu_k}(\mathbf{p},h) e^{iE_{\nu_{\mathbf{k}}} + i\mathbf{px}} \quad (27)$$

Hubungan antikomutasi kanonik medan neutrino masif dari operator (26) dan (27) diperoleh

$$\left\{ a_{\nu_k}(\mathbf{p}',h'), a^{\dagger}_{\nu_j}(\mathbf{p},h) \right\} = \left\{ b_{\nu_k}(\mathbf{p}',h'), b^{\dagger}_{\nu_j}(\mathbf{p},h) \right\} = \delta(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\delta_{kj}\delta_{hh'} \quad (28)$$

dan selain hubungan antikomutasi di atas berharga nol. Oleh karena operator ini memenuhi hubungan antikomutasi maka operator $a^{\dagger}_{\nu_k}(\mathbf{p},h)$ dan $b^{\dagger}_{\nu_k}(\mathbf{p},h)$ secara berurutan dapat dintepretasikan sebagai operator kreasi partikel dan antipartikel. Operator kreasi mengijinkan kita untuk membangun ruang Fock untuk keadaan neutrino masif dari keadaan vakum $|0\rangle$.

Selanjutnya akan dikaji medan flavor ν_α. Untuk membangkitkan ruang Fock keadaan flavor, ekspansi Fourier-nya harus dinyatakan dengan

$$\nu_\alpha = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \times \sum_{h=\pm1} \left[a_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h) u_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h) e^{-iE_{\nu_\alpha} t + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + b^\dagger_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h) v_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h) e^{iE_{\nu_\alpha} t - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right] \tag{29}$$

dimana

$$E_{\nu_k} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + \tilde{m}^2_{\nu_\alpha}} \tag{30}$$

dengan parameter massa sembarang $\tilde{m}^2_{\nu_\alpha}$ dan spinor $u_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h)$ dan $v_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h)$ dalam ruang momentum. Spinor-spinor ini memenuhi hubungan ortonormalitas dan kelengkapan

$$u^\dagger_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h) u_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h') = \quad v^\dagger_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h) v_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h') = \delta_{hh'} \tag{31}$$

$$u^\dagger_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h) v_{\nu_\alpha}(-\mathbf{p},h') = 0 \tag{32}$$

$$\sum_h \left(u_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h) u^\dagger_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h') \quad + v_{\nu_\alpha}(-\mathbf{p},h) v^\dagger_{\nu_\alpha}(-\mathbf{p},h') \right) = 1 \tag{33}$$

Dengan menggunakan hubungan bauran (19), medan flavor (29) dapat diekspresikan dengan

$$\nu_\alpha(x) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{h=\pm1} \sum_k U_{\alpha k} \left[a_{\nu_k}(\mathbf{p},h) U_{\nu_k}(\mathbf{p},h) e^{-iE_{\nu_k} t + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + b^\dagger_{\nu_k}(\mathbf{p},h) V_{\nu_k}(\mathbf{p},h) e^{iE_{\nu_k} t + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right] \tag{34}$$

Diasumsikan bahwa yang menjadi operator anihilasi (kreasi) dari keadaan flavor hanya merupakan kombinasi linier operator anihilasi (kreasi) keadaan masif. Untuk menyikapi hal ini, pers. (29) dibandingkan dengan pers. (34) dan diperoleh

$$a_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h) u_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h) e^{-iE_{\nu_\alpha} t} \quad = \sum_k U_{\alpha k} a_{\nu_k} u_{\alpha_k}(\mathbf{p},h) e^{-iE_{\nu_{\alpha_k}} t} \tag{35}$$

Dengan menggunakan (31), operator anihilasi keadaan flavor diperoleh

$$a_{\nu_\alpha} = \sum_k U_{\alpha k} a_{\nu_k}(\mathbf{p},h) \left(u^\dagger_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h') u_{\alpha_k}(\mathbf{p},h) \right) e^{-i(E_{\nu_\alpha} - E_{\nu_k})t} \tag{36}$$

Hubungan ortonormalitas dan kelengkapan (31) membantu untuk menentukan hubungan antikomutasi operator (35)

$$\left\{ a_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h), a^\dagger_{\nu_\beta}(\mathbf{p}',h') \right\} = \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \delta_{hh'} \sum_k U_{\alpha k} U^*_{\beta j} u^\dagger_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h) u_{\nu_k}(\mathbf{p},h) u^\dagger_{\nu_j}(\mathbf{p}',h') u_{\nu_\beta}(\mathbf{p}',h') e^{i(E_{\nu_\alpha} - E_{\nu_\beta})t} \tag{37}$$

Pemunculan suku terakhir (37) menunjukkan bahwa operator (31) tidak memenuhi hubungan antikomutasi secara umum. Hasil yang sama akan diperoleh untuk operator $b_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h)$.

Oleh karena tidak memenuhi hubungan antikomutasi secara umum, operator $a_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h)$ dan $b_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h)$ tidak memiliki sifat-sifat operator tangga. Implikasi lebih lanjut adalah operator tersebut tidak mungkin untuk membangun ruang Fock.

$$a_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h) = \int \frac{d\mathbf{x}}{(2\pi)^{3/2}} \times e^{iE_{\nu_\alpha} t - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} u^\dagger_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h)\nu_\alpha(x)$$

$$b_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h) = \int \frac{d\mathbf{x}}{(2\pi)^{3/2}} \times \nu^\dagger_\alpha(x) v^\dagger_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h) e^{iE_{\nu_\alpha} t - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \tag{38}$$

Dengan menggunakan hubungan bauran (19) dan ekspansi Fourier (22) didapatkan

$$a_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h) = \sum_k U_{\alpha k} \Big[a_{\nu_k}(\mathbf{p},h) u^\dagger_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h) u_{\nu_k}(\mathbf{p},h) e^{-i(E_{\nu_k} - E\nu_\alpha)t} + b^\dagger_{\nu_k}(\mathbf{p},h) u^\dagger_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h) v_{\nu_k}(-\mathbf{p},h) e^{i(E_{\nu_k} + E\nu_\alpha)t} \Big] \tag{39}$$

$$b_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h) = e^{iE_{\nu_\alpha} t} \sum_k U^*_{\alpha k} \Big[a^\dagger_{\nu_k}(-\mathbf{p},h) \big(u^\dagger_{\nu_k}(-\mathbf{p},h) v_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h)\big) e^{iE_{\nu_k} t} + b_{\nu_k}(\mathbf{p},h) \big(v^\dagger_{\nu_k}(\mathbf{p},h) v_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h)\big) e^{-iE_{\nu_k} t} \Big] \tag{40}$$

dan hubungan antikomutasinya

$$\{a_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h), a^\dagger_{\nu_\beta}(\mathbf{p},h)\} = \{b_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h), b^\dagger_{\nu_\beta}(\mathbf{p},h)\} = \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta_{hh'}\delta_{\alpha\beta} \tag{41}$$

Selain operator di atas bernilai nol. Operator $a^\dagger_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h)$ dan $b^\dagger_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h)$ diintepretasikan secara berturut-turut sebagai operator kreasi partikel dan antipartikel. Melalui operator kreasi ini ruang Fock neutrino flavor dapat dibangun dari keadaan dasarnya. Apabila operator anihilasi (40) dan (41) dioperasikan terhadap vakum $|0\rangle$ diperoleh

$$a_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h)|0\rangle = e^{iE_{\nu_\alpha}} \sum_{\mathbf{k}} U_{\alpha k} \times \big(u^\dagger_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h) v_{\nu_k}(-\mathbf{p},h)\big) e^{iE_{\nu_k}} |\bar{\nu}_k(-\mathbf{p},h)\rangle \tag{42}$$

$$b_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h)|0\rangle = e^{iE_{\nu_\alpha}} \sum_{\mathbf{k}} U^*_{\alpha k} \times \big(u^\dagger_{\nu_\alpha}(-\mathbf{p},h) v_{\nu_k}(\mathbf{p},h)\big) e^{iE_{\nu_k}} |\nu_k(-\mathbf{p},h)\rangle$$

Hasil ini memperlihatkan bahwa operator $a_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h)$ dan $b_{\nu_\alpha}(\mathbf{p},h)$ tidak teranihilasi oleh $|0\rangle$, ini sekaligus menggambarkan bahwa ruang Fock keadaan vakum dari neutrino flavor berbeda dengan ruang Fock keadaan dasar neutrino masif. Dilain hal muncul suku dimana ruang Fock tak berhingga untuk neutrino flavor bergantung terhadap parameter massa sembarang $\tilde{m}_{\nu_\alpha}$.

KESIMPULAN

Kalkulasi secara langsung terhadap keadaan neutrino telah menunjukkan bahwa kemungkinan untuk mengkonstruksi ruang Fock bagi neutrino flavor adalah tidak mungkin. Sedangkan hipotesis terhadap neutrino flavor real telah digambarkan oleh keadaan ruang Fock dengan munculnya fase parameter massa sembarang $\tilde{m}_{\nu_\alpha}$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] C. Giunti, Eur. Phys. J, **C 39** (2005).

[2] C.Giunti, C.W. Kim *Fundamental Of Neutrino Physics And Astrophysics*, Oxford University Press. Inc, New York, 2007.

[3] R.N. Mohapatra, P.B.Pal *Massive Neutrino In Physics And Astrophysics*, World Scientific, Singapore, 2004.

[4] F. Schwabl, *Advanced Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, Belin, 1999