Interaksi Antara Predator-Prey dengan Faktor Pemanen Prey

Suzyanna[1]

[1]*Fakultas Sains dan Teknologi,*
Universitas Airlangga

Abstrak— Dalam makalah ini akan dibahas tentang interaksi antara *predator-prey* dengan faktor pemanenan predator. Akan ditunjukkan analisa kestabilan dari titik setimbang model *predator-prey* tipe Holling. Pada teori ekologi terdapat dua tipe kecepatan perkapita, yaitu: tipe pertama diasumsikan kecepatan perkapita predator bergantung pada banyaknya predator, sedang predator bergantung pada *prey,* misalnya terlihat pada tipe Holling, hal ini berarti bahwa fungsi predator bergantung pada prey, sedangkan pada tipe kedua diasumsikan bahwa kecepatan perkapita predator bergantung pada banyaknya predator dan prey.

Kata Kunci— Model *predator-prey*, Fungsi Holling, Titik setimbang, Stabil Asimtotis.

1 PENDAHULUAN

Ekologi adalah ilmu yang mempelajari interaksi antara organisme dengan lingkungannya dan yang lainnya. Berasal dari kata Yunani *oikos* ("habitat") dan *logos* ("ilmu"). Ekologi diartikan sebagai ilmu yang mempelajari baik interaksi antar makhluk hidup maupun interaksi antara makhluk hidup dan lingkungannya. Istilah ekologi pertama kali dikemukakan oleh Ernst Haeckel. Dalam ekologi, makhluk hidup dipelajari sebagai kesatuan atau sistem dengan lingkungannya.

Pembahasan ekologi tidak lepas dari pembahasan ekosistem dengan berbagai komponen penyusunnya, yaitu faktor abiotik dan biotik. Faktor abiotik antara lain suhu, air, kelembaban, cahaya, dan topografi, sedangkan faktor biotik adalah makhluk hidup yang terdiri dari manusia, hewan, tumbuhan, dan mikroba. Ekologi juga berhubungan erat dengan tingkatan-tingkatan organisasi makhluk hidup, yaitu populasi, komunitas, dan ekosistem yang saling memengaruhi dan merupakan suatu sistem yang menunjukkan kesatuan [2].

Ekologi merupakan cabang ilmu yang masih relatif baru, yang baru muncul pada tahun 70-an. Akan tetapi, ekologi mempunyai pengaruh yang besar terhadap cabang biologinya. Ekologi mempelajari bagaimana makhluk hidup dapat mempertahankan kehidupannya dengan mengadakan hubungan antar makhluk hidup dan dengan benda tak hidup di dalam tempat hidupnya atau lingkungannya. Dengan model matematika para ilmuwan juga dapat memprediksi kestabilan interaksi kedua spesies. Kestabilan yang dimaksud adalah jumlah populasi tidak habis sehingga interaksi tetap ada [5].

Predator adalah hewan yang memburu dan memakan mangsanya, sedangkan mangsa adalah sebaliknya. *Prey* adalah organisme hidup yang diberi makan oleh pemangsa.

Titik setimbang benda yaitu suatu titik dimana tanpa ada kecenderungan untuk bergerak. Titik setimbang sering diidentifikasikan sebagai titik dimana seluruh benda terpusat pada kondisi setimbang sama dengan nol [8].

Selanjutnya menentukan apakah titik setimbang tersebut stabil atau tidak.

Salah satu ilmuwan yang meneliti model interaksi mangsa dan pemangsa ini adalah Chakraborty [3] dalam artikelnya "*Predator-prey Interaction with Harvesting: Mathematical Study with Biological Ramifications*". Chakraborty menurunkan model pertumbuhan kedua spesies ini dengan memasukkan model Holling dan faktor pemanenan pada *predator*. Faktor pemanenan pada *predator* ditandai dengan adanya interaksi dengan manusia, manusia sebagai pihak pemanen yang mengambil atau membunuh sejumlah populasi *predator* persatuan waktu.

Model *predator-prey* tipe Holling ditandai dengan adanya laju predasi yang mengikuti asumsi *predator*

ISSN 2303-0135

dibatasi kapasitasnya untuk memproses makanan**.** Sebagai contoh interaksi yang menggambarkan tipe Holling adalah interaksi *predator-prey* antara bakteri bersel satu yaitu *Didinium* dan *Paramecium*. *Didinium* berperan sebagai pemangsa dan *Paramecium* sebagai mangsa. Meningkatnya jumlah *Paramecium* mengakibatkan meningkatnya jumlah *Paramecium* yang dimangsa oleh *Didinium*. Semakin tinggi kepadatan populasi *Paramecium* maka jumlah *Paramecium* yang dimangsa per *Didinium* juga meningkat. Pada kepadatan populasi *Paramecium* yang besar sekali, *Didinium* membutuhkan waktu yang lebih sedikit dalam menemukan mangsa dan menghabiskan hampir seluruh waktunya untuk penanganan mangsa. Akhirnya *Didinium* mencapai titik jenuh dan jumlah *Paramecium* yang dimangsa per *Didinium* mencapai batasnya.

Berdasarkan uraian di atas, penulis tertarik untuk mengkaji titik setimbang dan sifat kestabilan dari titik setimbang yang berlaku pada model *predator – prey* tipe Holling II dengan faktor pemanenan pada *prey*. Materi yang dibahas dalam makalah ini bukanlah sesuatu yang baru tetapi diambil dari sebagian artikel "*Predator-prey Interaction with Harvesting: Mathematical Study with Biological Ramifications*", yang ditulis oleh Chakraborty [3].

Rusandi [8] telah menulis skripsi dengan judul Analisis Kestabilan Model Predator-Prey Tipe Holling dengan Faktor Pemanenan pada Predator.

2 Teori yang digunakan

Definisi 2.1. *Diberikan persamaan diferensial orde satu,* $\frac{dx}{dt} = f(x)$. *Titik* $\bar{x}$ *disebut titik setimbang jika memenuhi [6]*

$$f(\bar{x}) = 0 \tag{2.1}$$

Teorema 2.2. *Sistem* $\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$ *stabil asimtotis jika hanya jika semua nilai eigen dari A, yakni* $\lambda_i(A)$ *mempunyai bagian real negatif dan dinotasikan sebagai [7][9][10]*

$$Re(\lambda_i(A)) < 0 \tag{2.2}$$

Model seperti ini dinamakan model logistik yang dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{dP}{dt} = rP(1 - \frac{P}{K}) \tag{2.3}$$

dengan $P = P(t)$ adalah jumlah populasi pada saat *t, r* adalah laju pertumbuhan intrisik, yaitu nilai yang menggambarkan daya tumbuh suatu populasi. Dalam hal ini, diasumsikan $r > 0$ karena setiap populasi memiliki potensi untuk berkembang biak, dan *K* menyatakan kapasitas tampung yaitu ukuran maksimum dari suatu populasi yang dapat disokong oleh suatu lingkungan.

2.1 Model Holling

Holling (1959) menurunkan model yang membatasi laju *predator* menangkap mangsa atau laju predasi dari *predator*. Dalam model ini diasumsikan bahwa *predator* menghabiskan waktunya untuk dua aktivitas yaitu:

1. Mencari mangsa
2. Menangani mangsa yang terdiri dari: mengejar, memangsa dan mencerna.

Laju konsumsi *predator* dalam model ini dibatasi waktu. Hal ini terjadi karena walaupun jumlah mangsa berlimpah sehingga tidak perlu waktu untuk mencari, *predator* tetap menghabiskan waktu untuk menangani mangsa.

3 Hasil dan Pembahasan

3.1 Model matematika yang digunakan

- *x(t)* adalah populasi *prey* saat *t*
- *y(t)* adalah populasi *predator* saat *t*
- $\frac{dx}{dt}$ adalah laju perubahan populasi *prey* pada saat *t*

ISSN 2303-0135

- $\frac{dy}{dt}$ adalah laju perubahan populasi *predator* pada saat *t*
- Populasi *prey* bertumbuh secara logistik
- K adalah kapasitas daya tampung *prey*
- *r* adalah laju pertumbuhan interinstik *prey* pada saat tidak ada *predator*
- d adalah laju kematian *predator* saat tidak ada prey
- b adalah laju konversi *predator*
- α adalah laju maksimum konsumsi *prey*
- a adalah half-saturation constant
- E adalah laju pemanenan *predator*
- g diasumsikan bergantung pada ratio dari populasi *predator* dan *prey*
- *ratio* bergantung pada Holling type II yang memenuhi fungsi:

$$g\,(x,y) = g\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\alpha\frac{x}{y}}{a+\frac{x}{y}} = \frac{\alpha x}{ay+x}, \forall(x,y) \in [\,0,\infty)^2 \;\; (0,0)$$

Karena jumlah spesies dalam populasi selalu bernilai tidak negatif maka diasumsikan:

$$x, y \geq 0 \tag{3.1}$$

Berikutnya besaran-besaran dalam model juga diasumsikan positif

$$r, d, b, \alpha, E, K, a > 0 \tag{3.2}$$

Berdasarkan notasi yang di berikan, maka dapat dibentuk suatu model *predator-prey* tipe Holling dengan faktor pemanenan pada *prey* sebagai berikut:

$$f(x,y) = \frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{ay+x} - Ex \tag{3.3}$$

$$g(x,y) = \frac{dy}{dt} = \frac{\alpha bxy}{ay+x} - dy \tag{3.4}$$

Pada Persamaan 3.3 laju perubahan *prey* akan meningkat karena dipengaruhi oleh laju pertumbuhan *prey* mengikuti model logistik dan akan menurun karena adanya laju predasi yang mengikuti model Holling dan adanya faktor pemanenan. Pada Persamaan 3.4 laju perubahan *predator* akan meningkat karena laju pertumbuhan *predator* akibat laju predasi dan menurun saat tidak ada *prey*. Berikut akan ditentukan titik setimbang dari model dan analisis kestabilan dari titik tersebut.

3.2 Model Titik Setimbang

Berdasarkan Definisi 2.1, model *predator-prey* tipe Holling dengan faktor pemanenan pada *prey* akan memiliki titik setimbang jika memenuhi $f(x,y) = g(x,y) = 0$. Pada model ini terdapat dua titik setimbang, yaitu titik setimbang kepunahan *prey* dan titik setimbang kedua spesies, yaitu *predator* dan *prey* hidup berdampingan.

Titik setimbang kepunahan *predator* adalah suatu kondisi saat *predator* tidak ada, yaitu pada saat $y = 0$ dan $x \neq 0$. Misalkan titik setimbang kepunahan *predator* ini dinotasikan dengan $A = (x,y) = (x_1, 0)$.

Dengan menggunakan syarat $f(x,y) = g(x,y) = 0$, $y = 0$ dan $x \neq 0$ diperoleh kondisi berikut.

Dari Persamaan 3.3 diperoleh

- $$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{ay+x} - Ex = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad x = \frac{K}{r}\,(r - E) \tag{3.5}$$

Berdasarkan (3.5), maka didapatkan titik setimbang kepunahan *predator* $A = (\frac{K}{r}\,(r-E), 0)$.

ISSN 2303-0135

Titik setimbang kedua spesies hidup berdampingan adalah suatu kondisi saat *predator* dan *prey* hidup bersama atau keduanya tidak punah, yaitu pada saat $x \neq 0$ dan $y \neq 0$. Titik setimbang kedua spesies hidup berdampingan ini dinotasikan dengan $B = (x, y) = (x_2, y_2)$.

Dengan menggunakan syarat $f(x, y) = g(x, y) = 0$, $x_2 \neq 0$ dan $y_2 \neq 0$ diperoleh kondisi berikut:

Dari Persamaan 3.3 diperoleh

- $\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{ay + x} - Ex = 0$

$$\Leftrightarrow \quad r\left(1 - \frac{x}{K}\right) - E = \frac{\alpha y}{ay+x} \tag{3.6}$$

Dari Persamaan 3.4 diperoleh

- $\frac{dy}{dt} = \frac{\alpha bxy}{ay + x} - dy = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\alpha bxy}{ay+x} = dy$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\alpha y}{ay+x} = \frac{dy}{bx} \tag{3.7}$$

- $\frac{dy}{dt} = \frac{\alpha bxy}{ay + x} - dy = 0$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{(\alpha b - d)x}{(d)a} \tag{3.8}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y}{x} = \frac{(\alpha b - d)}{(d)a}. \tag{3.9}$$

Selanjutnya substitusikan (3.9) ke (3.7) diperoleh

- $\frac{\alpha y}{ay+x} = \frac{(d)}{b}\frac{(\alpha b - d)}{(d)a} = \frac{(\alpha b - d)}{ab}. \qquad (3.10)$

Kemudian subtitusi (3.10) ke (3.6) sehingga diperoleh

$$\Leftrightarrow \quad r\left(1 - \frac{x}{K}\right) - E = \frac{(\alpha b - d)}{ab}.$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{K(abr - \alpha b + d - abE)}{abr} \tag{3.11}$$

Substitusi (3.11) ke (3.8) diperoleh:

$$y = \frac{(\alpha b - d)}{(d)a} \cdot \frac{K(abr - \alpha b + d - abE)}{abr}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{K(\alpha b - d)(abr - \alpha b + d - abE)}{a^2 brd} \tag{3.12}$$

Berdasarkan (3.11) dan (3.12) didapat titik setimbang kedua spesies hidup berdampinga, yaitu

$$B = \left(\frac{K(abr - \alpha b + d - abE)}{abr}, \frac{K(\alpha b - d)(abr - \alpha b + d - abE)}{a^2 brd}\right).$$

Karena $x \neq 0$ dan $y \neq 0$ dan $x > 0$ maupun $y > 0$, maka titik setimbang ada jika

$$\frac{K(abr - \alpha b + d - abE)}{abr} > 0$$

$$\Leftrightarrow E < \frac{abr - \alpha b + d}{ab}$$

Diasumsikan

$$\frac{abr-\alpha b+d}{ab} > 0$$

$$\Leftrightarrow abr - \alpha b + d > 0$$

dan

$$\frac{K(\alpha b-d)(abr-\alpha b+d-abE)}{a^2 brd} > 0$$

Karena $(\alpha b - d)(abr - \alpha b + d - abE) > 0$, maka $\alpha b - d > 0$

$$\Leftrightarrow E < \frac{\alpha(ab^2 r - \alpha b^2 + 2bd) - abdr - d^2}{\alpha ab^2 - abd}$$

Misalkan $\alpha_1 = \frac{abr+d}{b}$; $E_1 = \frac{abr-\alpha b+d}{ab}$ dan $E_2 = \frac{\alpha(ab^2 r-\alpha b^2+2bd)-abdr-d^2}{\alpha ab^2-abd}$, maka titik setimbang B dijamin ada jika

- $\alpha < \alpha_1$
- $E_1 < E < E_2$

Setelah didapat titik setimbang A dan B selanjutnya akan dianalisis kestabilan lokal dari masing-masing titik setimbang.

3.3 Analisis Kestabilan Asimtotis Lokal

Untuk menentukan sifat kestabilan asimtotis lokal dari titik setimbang maka perlu dicari terlebih dahulu nilai *eigen*-nya. Karena model berbentuk nonliner maka perlu dilakukan pelinieran dengan menggunakan matriks Jacobian.

Misalkan persamaan-persamaan dari model *predator-prey* tipe Holling dengan faktor pemanenan dinyatakan sebagai:

$$f(x,y) = \frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{ay+x} - Ex \qquad (3.13)$$

$$g(x,y) = \frac{dy}{dt} = \frac{\alpha bxy}{ay+x} - dy \qquad (3.14)$$

Dengan menggunakan Definisi 2.1, maka matriks Jacobian dari sistem (3.13) dan (3.14) adalah

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx}{K} - \frac{\alpha ay^2}{(ay+x)^2} - E & \frac{-\alpha x^2}{(ay+x)^2} \\ \frac{\alpha aby^2}{(ay+x)^2} & \frac{\alpha bx^2}{(ay+x)^2} - d \end{pmatrix} \qquad (3.15)$$

Selanjutnya akan dianalisis kestabilan di setiap titik setimbang dari model *predator-prey* tipe Holling dengan faktor pemanenan pada *prey.*

3.3.1 Kestabilan Lokal di Titik Setimbang Kepunahan Predator

Matriks Jacobian dari titik setimbang kepunahan *predator* $A = (K, 0)$ adalah

$$J_1 = \begin{pmatrix} -r - E & -\alpha \\ 0 & \alpha b - d \end{pmatrix} \qquad (3.16)$$

Selanjutnya berdasarkan matriks Jacobian (3.15) dapat dibentuk persamaan karakteristik matriks (3.16) dengan menggunakan $\det(\lambda I - J_1) = 0$, yaitu

$$det\begin{pmatrix} \lambda + r + E & \alpha \\ 0 & \lambda - \alpha b + d \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda + r + E)(\lambda - \alpha b + d) = 0 \qquad (3.17)$$

Dari Persamaan 3.17 diperoleh:

$$\lambda_1 = -r - E \qquad (3.18)$$

$$\lambda_2 = \alpha b - d \tag{3.19}$$

Nilai *eigen* $\lambda_1 = -r - E = -(r+E)$ bernilai negatif, karena $r > 0$. Berdasarkan Teorema 2.2, syarat agar titik setimbang kepunahan *predator* stabil asimtotis, nilai *eigen* λ harus keduanya real dan ke-duanya negatif, oleh karena hal tersebut, maka $\lambda_2 < 0$ jika dan hanya jika $\alpha b - d < 0$ dan $\alpha < \frac{d}{b}$.

Sehingga titik setimbang kepunahan *predator* $A = (K, 0)$ stabil asimtotik jika

1. $\alpha < \alpha_2$
2. $E > E_2$.

Dengan $E_2 = -r$ dan $\alpha_2 = \frac{d}{b}$.

3.3.2 Kestabilan Lokal di Titik Setimbang Kedua Spesies Hidup Berdampingan

Matriks Jacobian dari titik setimbang kedua spesies hidup bersama $B = \left(\frac{K(abr - \alpha b + d - abE)}{abr}, \frac{K(\alpha b - d)(abr - \alpha b + d - abE)}{a^2 brd}\right)$ adalah

$$J_2 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

Selanjutnya dapat dibentuk persamaan karakteristik dari matriks (3.20) dengan menggunakan $\det(\lambda I - J_2) = 0$, [1] yaitu

$$\det\begin{pmatrix} \lambda - A & -B \\ -C & \lambda - D \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda\, a_1 + a_2 = 0 \tag{3.21}$$

Dengan

$$-(A + D) = a_1 \tag{3.22}$$

Dan

$$AD - BC = a_2 \tag{3.23}$$

Dengan

$$A = r - \frac{2r\frac{K(abr - \alpha b + d - abE)}{abr}}{K} - \frac{\alpha a[\frac{K(\alpha b - d)(abr - \alpha b + d - abE)}{a^2 brd}]^2}{\left(a[\frac{K(\alpha b - d)(abr - \alpha b + d - abE)}{a^2 brd}] + \frac{K(abr - \alpha b + d - abE)}{abr}\right)^2} - E$$

$$B = \frac{-\alpha\frac{K(abr - \alpha b + d - abE)^2}{abr}}{(a[\frac{K(\alpha b - d)(abr - \alpha b + d - abE)}{a^2 brd}] + \frac{K(abr - \alpha b + d - abE)}{abr})^2}$$

$$C = \frac{\alpha ab[\frac{K(\alpha b - d)(abr - \alpha b + d - abE)}{a^2 brd}]^2}{(a[\frac{K(\alpha b - d)(abr - \alpha b + d - abE)}{a^2 brd}] + \frac{K(abr - \alpha b + d - abE)}{abr})^2}$$

$$D = \frac{\alpha b[\frac{K(abr - \alpha b + d - abE)}{abr}]^2}{(a[\frac{K(\alpha b - d)(abr - \alpha b + d - abE)}{a^2brd}] + \frac{K(abr - \alpha b + d - abE)}{abr})^2} - d$$

Dari hasil tersebut diperoleh:

$$-(A + D) = a_1 \Leftrightarrow -\left(r - \frac{2r\frac{K(abr - \alpha b + d - abE)}{abr}}{K}\right.$$

$$- \frac{\alpha a[\frac{K(\alpha b - d)(abr - \alpha b + d - abE)}{a^2brd}]^2}{\left(a\left[\frac{K(\alpha b - d)(abr - \alpha b + d - abE)}{a^2brd}\right] + \frac{K(abr - \alpha b + d - abE)}{abr}\right)^2} - E$$

$$\left. + \frac{\alpha b[\frac{K(abr - \alpha b + d - abE)}{abr}]^2}{\left(a\left[\frac{K(\alpha b - d)(abr - \alpha b + d - abE)}{a^2brd}\right] + \frac{K(abr - \alpha b + d - abE)}{abr}\right)^2} - d\right) = a_1$$

Dan

$AD - BC = a_2$

$$\Leftrightarrow \left(r - \frac{2r\frac{K(abr - \alpha b + d - abE)}{abr}}{K}\right.$$

$$- \frac{\alpha a[\frac{K(\alpha b - d)(abr - \alpha b + d - abE)}{a^2brd}]^2}{\left(a\left[\frac{K(\alpha b - d)(abr - \alpha b + d - abE)}{a^2brd}\right] + \frac{K(abr - \alpha b + d - abE)}{abr}\right)^2}$$

$$\left. - E\right)\left(\frac{\alpha b[\frac{K(abr - \alpha b + d - abE)}{abr}]^2}{\left(a\left[\frac{K(\alpha b - d)(abr - \alpha b + d - abE)}{a^2brd}\right] + \frac{K(abr - \alpha b + d - abE)}{abr}\right)^2} - d\right)$$

$$-\left(\frac{-\alpha\frac{K(abr - \alpha b + d - abE)}{abr}^2}{\left(a\left[\frac{K(\alpha b - d)(abr - \alpha b + d - abE)}{a^2brd}\right] + \frac{K(abr - \alpha b + d - abE)}{abr}\right)^2}\right)$$

$$\left(\frac{\alpha ab[\frac{K(\alpha b - d)(abr - \alpha b + d - abE)}{a^2brd}]^2}{(a[\frac{K(\alpha b - d)(abr - \alpha b + d - abE)}{a^2brd}] + \frac{K(abr - \alpha b + d - abE)}{abr})^2}\right) = a_2$$

Dari (3.21) diperoleh dua nilai *eigen* sebagai berikut:

$$\lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1{}^2 - 4a_2}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1{}^2 - 4a_2}}{2}$$

ISSN 2303-0135

Dari hasil nilai *eigen* di atas maka akan muncul dua kondisi yaitu saat nilai *eigen* berbentuk real ($a_1^2 - 4a_2 \geq 0$) dan bentuk bilangan kompleks ($a_1^2 - 4a_2 < 0$). Berdasarkan Teorema 2.2, syarat agar titik setimbang stabil asimtotis adalah kedua nilai *eigen* berbentuk real dan keduanya bernilai negatif.

1. Jika nilai *eigen* berbentuk real ($a_1^2 - 4a_2 \geq 0$) maka akan muncul syarat dan kondisi berikut:
   - Syarat jika nilai *eigen* berbentuk real

$$\blacksquare\ a_1^2 - 4a_2 \geq 0$$
$$a_1^2 \geq 4a_2 \tag{3.24}$$

   - Agar $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$ maka

$$\blacksquare\ \lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} < 0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{a_1^2 - 4a_2} < a_1. \tag{3.25}$$

   Karena $a_1^2 - 4a_2 \geq 0$ maka $\sqrt{a_1^2 - 4a_2} \geq 0$ sehingga

$$\blacksquare\ a_1 > 0 \tag{3.26}$$

   Dari (3.24) juga diperoleh

$$\blacksquare\ a_1^2 - 4a_2 < a_1^2$$
$$\Leftrightarrow\ a_2 > 0. \tag{3.27}$$

   Karena $a_1 > 0$ dan $a_1^2 - 4a_2 \geq 0$

$$\blacksquare\ \lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} < 0.$$

   Dari (3.26) dan (3.27) diperoleh kondisi kedua nilai *eigen* berbentuk real dan negatif sebagai berikut:
   - $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$.
2. Jika ($a_1^2 - 4a_2 \leq 0$) maka nilai *eigen* berbentuk bilangan kompleks akan muncul syarat dan kondisi berikut:
   - Syarat jika nilai *eigen* berbentuk bilangan kompleks

$$\blacksquare\ a_1^2 - 4a_2 < 0$$
$$a_1^2 < 4a_2 \tag{3.28}$$

   - Agar $Re(\lambda_1) < 0$ dan $Re(\lambda_2) < 0$ maka

$$\blacksquare\ Re(\lambda_{1,2}) = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} < 0$$

   Karena $-a_1$ adalah bagian real dan harus bernilai negatif maka

$$\blacksquare\ -a_1 < 0$$
$$\Leftrightarrow a_1 > 0 \tag{3.29}$$

   Dari persamaan (3.28) diperoleh

$$\blacksquare\ 0 < a_1^2 < 4a_2$$
$$\Leftrightarrow\ a_2 > 0. \tag{3.30}$$

   Dari (3.29) dan (3.30) diperoleh kondisi nilai *eigen* berbentuk real dan negatif sebagai berikut:

- $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$.

  Dari kedua kondisi di atas yaitu jika nilai eigen berbentuk real ataupun berbentuk bilangan kompleks diperoleh $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$ jika dan hanya jika:

  1. $a_1 > 0$
  2. $a_2 > 0$.

4 KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan model *predator-prey* tipe Holling dengan faktor pemanenan pada *prey* maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Model *predator-prey* tipe Holling dengan faktor pemanenan pada *prey* mempunyai dua titik setimbang, yaitu
   - Titik setimbang kepunahan *predator*$A = (K, 0)$ yaitu pada saat populasi predator habis atau $y = 0$ dan jumlah prey mencapai maksimum atau $x = K$.
   - Titik setimbang kedua spesies hidup berdampingan

   $$B = \left(\frac{K(abr - \alpha b + d - abE)}{abr}, \frac{K(\alpha b - d)(abr - \alpha b + d - abE)}{a^2 brd}\right).$$

   Yaitu pada saat kedua spesies tidak punah atau $y > 0$ dan $x > 0$. Karena $\frac{K(abr- \alpha b+d-abE)}{abr} > 0$ dan $\frac{K(\alpha b-d)(abr- \alpha b+d-abE)}{a^2 brd} > 0$, maka titik setimbang B dijamin ada.
2. Titik setimbang $A = (K, 0)$ stabil asimtotis lokal jika
   1. $\alpha < \alpha_2$
   2. $E > E_2$.

   dengan $E_2 = -r$ dan $\alpha_2 = \frac{d}{b}$.

5 DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H. and Rorres, C., “Elementary Linear Algebra”, John Wiley and Son Inc, New York, 2004.
[2] Bacaer, N., “A Short History of Mathematical Population Dynamics”, Ninth Edition,.SpringerLondon Dordrecht Heidelberg, New York, 2011.
[3] Chakraborty, S., Pal, S. and Bairagi, N., “Predator-Prey Interaction With Harvesting: Mathematical Study With Biological Ramifications”, Applied Mathematical Modelling 36, hal 4044-4059, 2012.
[4] Haberman, R., “Mathematical Models Mechanical Vibrations”, *Population Dynamics and Traffic Flow*, Prentice Hall Inc, New Jersey, 1977.
[5] Hofbauer, J. and Sigmund, K.,” Evolutionary Games and Population Dynamics*”,* Cambridge University Press, New York, 1998.
[6] Olsder, G.J., “Mathematical System Theory”, Delft, The Netherland, 1992.
[7] Ross, S.L., “Differential Equations, Third Edition. John Wiley and Son Inc,New York, 1984.
[8] Rusandi Duin., “Analisis Kestabilan Model Predator-Prey Tipe Holling Dengan Faktor Pemanen Pada Predator”, Surabaya, 2013.
[9] Verhulst Ferdinand, “Nonlinear Differential Equations and Dynamical System”, Springer Verlag, New York, 1990.
[10] Zill, D.G. and Cullen, M. R., “Differential Equation with Boundary-Value problem”, fourth edition, An International Tomsons Publishing Company, USA, 1997.