ISSN 2303-0135

Relasi Inklusi Klas Barisan *p*-Supremum Bounded Variation Sequences

Moch. Aruman Imron[1], Ch. Rini Indrati[2], Widodo[3]

[1] *Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Brawijaya*
e-mail : maimr@ub.ac.id

[1,2,3] *Sekolah Pasca Sarjana, Matematika, Universitas Gadjah Mada*

Abstrak— Pada paper ini dibahas konstruksi klas barisan *p*-Supremum Bounded Variation Sequences yang merupakan generalisasi dari klas Supremum Bounded Variation Sequences (SBVS). Kemudian konstruksi yang didapat diselidiki relasi inklusi dari klas tersebut.

Kata Kunci— Klas barisan, *p*-Supremum Bounded Variation Sequences, Relasi Inklusi.

1 PENDAHULUAN

Dalam analisis Fourier, sifat-sifat koefisien deret Fourier pertama kali dibahas oleh Chaundy dan Jollife [2] dan koefisien-koefisien tersebut dikenal dengan nama klas *MS* (*Monotone sequences*). Kemudian beberapa peneliti seperti Leindler [7], Tikhonov [11] dan Zhou [8][12] berturut-turut memperlemah syarat kemonotonan Klas *MS* ke dalam klas *RBVS (Rest Bounded Variation Sequences), GMS (General Monotone Sequences)* dan *GBVS (Group Bounded Variation Sequences)*.

Lebih lanjut Zhou et al. [13] berhasil membuktikan bahwa generalisasi klas kemonotonan merupakan klas *MVBVS* (*Mean Value Bounded Variation Sequences*). Lebih lanjut diperoleh $MS \subsetneq RBVS \subsetneq GMS \subsetneq GBVS \subsetneq MVBVS$. Jika syarat kemonotonan di dalam klas *MVBVS* diperlemah lagi maka kekonvergenan seragam deret Fourier tidak terjamin. Namun demikian Feng dan Zhou [3] dapat menunjukkan bahwa *MVBVS* dapat diperlemah menjadi klas GM_7. Dalam perkembangan yang lain ternyata Korus [6] juga berhasil membuktikan bahwa klas *MBVS* dapat diperlemah menjadi klas *SBVS* (*Supremum Bounded Variation Sequences*) dan klas $SBVS_2$. Menurut Feng dan Zhou [3] GM_7 sama dengan *SBVS* , walaupun nampak mirip Korus [6] berhasil membuktikan bahwa *SBVS* sebagai klas yang berbeda dengan GM_7 tetapi sama-sama memuat klas *MBVS.* Kemudian klas *SBVS* dan $SBVS_2$ tetap mempertahankan sifat kekonvergenan seragam pada deret Fourier dan memenuhi relasi $MS \subsetneq RBVS \subsetneq GMS \subsetneq GBVS \subsetneq MVBVS \subsetneq SBVS \subsetneq SBVS_2$. Definisi klas *SBVS* dan $SBVS_2$ sebagai berikut:

Definisi 1.1. *Barisan* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ *disebut anggota klas SBVS (Supremum Bounded Variation Sequences) jika terdapat konstanta positif K dan* $\gamma \geq 1$, *sehingga*

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}| \leq \frac{K}{n}\left(\sup_{m\geq[n/\gamma]} \sum_{k=m}^{2m} |a_k|\right)$$

dengan [x] bagian bulat dari x.

Definisi 1.2. *Barisan* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ *disebut anggota klas* $SBVS_2$ *jika terdapat konstanta positif K dan* $\{b(k)\}_{k=1}^{\infty} \subset [0,\infty)$ *dengan* $b(k) \to \infty$ *untuk* $k \to \infty$ *dan monoton naik sehingga*

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}| \leq \frac{K}{n}\left(\sup_{m\geq b(n)} \sum_{k=m}^{2m} |a_k|\right).$$

Kemudian Liflyand dan Tikhonov [9, 10] mengembangkan klas *GMS* ke $\mathcal{GMS}_p$ (*p- general monotone sequences)* yang terdiri dari kemonotonan barisan bilangan, dengan definisi berikut *:*

Definisi 1.3. *Diberikan* $a = \{a_n\}$ *dan* $\beta = \{\beta_n\}$ *masing-masing barisan bilangan kompleks dan real positif. Pasangan* $(a,\beta) \in \mathcal{GMS}_p$ *, jika terdapat konstanta positif K sehingga berlaku*

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}|^p\right)^{1/p} \leq K\beta_n$$

untuk semua bilangan bulat positif n dan $1 \leq p < \infty$.

Definisi 1.4. *Diberikan klas* $\mathcal{GMS}$ *dan* $\beta = \{\beta_n\}$ *barisan bilangan real positif, klas* $\mathcal{GMS}(\beta)$ *adalah keluarga* $\{a: (a, \beta) \in \mathcal{GMS}\}$

Lebih lanjut klas $\mathcal{GMS}_p$ telah digeneralisasi menjadi klas $\mathcal{NBVS}_p$ [4] dan $\mathcal{MVBVS}_p$ [5] dengan definisi berikut.

Definisi 1.5. *Diketahui* $a = \{a_n\}$ *and* $\beta = \{\beta_n\}$ *berturut-turut barisan bilangan kompleks dan real positif. Pasangan* $(a, \beta) \in \mathcal{MVBVS}$*, jika terdapat konstanta positif K dan* $\lambda \geq 2$ *sehingga berlaku*

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta a_k| \leq \frac{K}{n} \sum_{k=[\lambda^{-1}n]}^{[\lambda n]} \beta_k$$

untuk semua bilangan bulat positif n.

Definisi 1.6. *Diberikan* $a = \{a_n\}$ *and* $\beta = \{\beta_n\}$ *masing-masing barisan bilangan kompleks dan real positif. Pasangan* $(a, \beta) \in \mathcal{MVBVS}_p$ *, jika terdapat konstanta positif K dan* $\lambda \geq 2$ *sehingga berlaku*

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta a_k|^p\right)^{1/p} \leq \frac{K}{n} \sum_{k=[\lambda^{-1}n]}^{[\lambda n]} \beta_k$$

untuk semua bilangan bulat positif n dan $1 \leq p < \infty$.

Definisi 1.7. *Diberikan klas* $\mathcal{MVBVS}_p$*dan* $\beta = \{\beta_n\}$ *barisan bilangan real positif, kemudian didefinisikan klas* $\mathcal{MVBVS}_p(\beta)$ *adalah koleksi* $\{a: (a, \beta) \in \mathcal{MVBVS}_p\}$.

Lemma 1.8. *Diberikan* $1 \leq p < \infty$ *, untuk setiap barisan bilangan real non negatif* $\{a_i\}$ *pertidaksamaan*

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i)^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^p$$

berlaku untuk setiap bilangan bulat positif n [1].

Kemudian di dalam paper ini akan dipaparkan hasil penelitian penulis yang mengkonstruksikan klas *p-Supremum Bounded Variation Sequences* yang merupakan generalisasi dari klas *SBVS* dan diselidiki sifat inklusinya.

2 DEFINISI *P*-SUPREMUM BOUNDED VARIATION SEQUENCES

Menurut Korus [6] klas $SBVS \subsetneq SBVS_2$, sehingga dalam definisi disini dibahas klas $SBVS_2$. Notasi $SBVS_2$ dalam tulisan ini ditulis *SBVS2* dan dapat diperluas menjadi $\mathcal{SBVS}2$.

Definisi 2.1. *Diberikan* $a = \{a_n\}$ *dan* $\beta = \{\beta_n\}$ *berturut-turut barisan bilangan kompleks dan real positif. Pasangan* $(a, \beta) \in \mathcal{SBVS}$*, jika terdapat konstanta positif K, dan* $\gamma \geq 1$ *sehingga*

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}| \leq \frac{K}{n}\left(\sup_{m \geq [n/\gamma]} \sum_{k=m}^{2m} \beta_k\right)$$

untuk semua bilangan bulat positif n.

Definisi 2.2. *Diberikan* $a = \{a_n\}$ *dan* $\beta = \{\beta_n\}$ *masing-masing barisan bilangan kompleks dan real positif. Pasangan* $(a, \beta) \in \mathcal{SBVS}_p$ *, jika terdapat konstanta positif K dan* $\gamma \geq 1$ *sehingga*

ISSN 2303-0135

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1}|a_k-a_{k+1}|^p\right)^{1/p}\leq\frac{K}{n}\left(\sup_{m\geq[n/\gamma]}\sum_{k=m}^{2m}\beta_k\right)$$

untuk semua bilangan bulat positif n dan $1\leq p<\infty$.

Dari definisi 2.1 dan definisi 2.2, klas $\mathcal{SBVS}_1$ adalah klas $\mathcal{SBVS}$.

Definisi 2.3. *Diberikan klas* $\mathcal{SBVS}_p$ *dan* $\beta=\{\beta_n\}$ *barisan bilangan bilangan real positif, klas* $\mathcal{SBVS}_p(\beta)$ *adalah keluarga* $\left\{a:(a,\beta)\in\ \mathcal{SBVS}_p\right\}$ *untuk* $1\leq p<\infty$.

Definisi 2.4. *Diketahui* $a=\{a_n\}$ *dan* $\beta=\{\beta_n\}$ *berturut-turut barisan bilangan kompleks dan real positif. Pasangan* $(a,\beta)\in\mathcal{SBVS}2$, *jika terdapat konstanta positif K dan* $\{b(k)\}_{k=1}^{\infty}\subset[0,\infty)$ *dengan* $b(k)\to\infty$ *untuk* $k\to\infty$ *dan monoton naik sehingga berlaku*

$$\sum_{k=n}^{2n-1}|a_k-a_{k+1}|\leq\frac{K}{n}\left(\sup_{m\geq b(n)}\sum_{k=m}^{2m}\beta_k\right)$$

untuk semua bilangan bulat positif n.

Definisi 2.5. *Diberikan* $a=\{a_n\}$ *and* $\beta=\{\beta_n\}$ *masing-masing barisan bilangan kompleks dan real positif. Pasangan* $(a,\beta)\in\mathcal{SBVS}2_p$, *jika terdapat konstanta postif K dan*

$\{b(k)\}_{k=1}^{\infty}\subset[0,\infty)$ *dengan* $b(k)\to\infty$ *untuk* $k\to\infty$ *dan monoton naik sehingga berlaku*

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1}|a_k-a_{k+1}|^p\right)^{1/p}\leq\frac{K}{n}\left(\sup_{m\geq b(n)}\sum_{k=m}^{2m}\beta_k\right)$$

untuk semua bilangan bulat positif n dan $1\leq p<\infty$.

Dari definisi 2.4 dan definisi 2.5, klas $\mathcal{SBVS}2_1$ adalah klas $\mathcal{SBVS}2$.

Definisi 2.6. *Diberikan klas* $\mathcal{SBVS}2_p$, *klas* $\mathcal{SBVS}2_p(\beta)$ *adalah keluarga*

$\left\{a:(a,\beta)\in\ \mathcal{SBVS}2_p\right\}$ *untuk* $1\leq p<\infty$.

3 SIFAT-SIFAT KLAS *P*-SUPREMUM BOUNDED VARIATION SEQUENCES

Teorema 3.1. *Jika* $1\leq p<q<\infty$, *maka berlaku* $\mathcal{SBVS}_p\subseteq\mathcal{SBVS}_q$.

Bukti: Ambil $(a,\beta)\in\ \mathcal{SBVS}_p$, maka terdapat konstanta positif K dan $\gamma\geq 1$

sehingga

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1}|a_k-a_{k+1}|^p\right)^{1/p}\leq\frac{K}{n}\left(\sup_{m\geq[n/\gamma]}\sum_{k=m}^{2m}\beta_k\right).$$

Kemudian menurut Lemma 1.8 diperoleh

$$\sum_{k=n}^{2n-1}|\Delta a_k|^q=\sum_{k=n}^{2n-1}|\Delta a_k|^{p\frac{q}{p}}\leq\left(\sum_{k=n}^{2n-1}|\Delta a_k|^p\right)^{\frac{q}{p}}$$

sehingga

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1}|\Delta a_k|^q\right)^{1/q} \leq \left(\sum_{k=n}^{2n-1}|\Delta a_k|^p\right)^{1/p} \leq \frac{K}{n}\left(\sup_{m\geq[n/\gamma]}\sum_{k=m}^{2m}\beta_k\right)$$

Jadi $a \in \mathcal{SBVS}_q$ terbukti $\mathcal{SBVS}_p \subseteq \mathcal{SBVS}_q$. ■

Akibat 3.2. *Jika* $1 \leq p < q < \infty$, *maka* $\mathcal{SBVS}_p(\beta) \subseteq \mathcal{SBVS}_q(\beta)$.

Bukti: Ambil $a \in \mathcal{SBVS}_p(\beta)$, maka $(a,\beta) \in \mathcal{SBVS}_p$, menurut Teorema 3.1.

$(a,\beta) \in \mathcal{SBVS}_q$. Jadi $a \in \mathcal{SBVS}_q(\beta)$. ■

Akibat 3.3. *Untuk setiap* $a \in SBVS$, *maka* $a \in \mathcal{SBVS}_p(|a|)$ *dengan* $1 \leq p < \infty$.

Bukti: Ambil $a \in SBVS$, maka terdapat konstanta positif K dan $\gamma \geq 1$, sehingga

$$\sum_{k=n}^{2n-1}|a_k - a_{k+1}| \leq \frac{K}{n}\left(\sup_{m\geq[n/\gamma]}\sum_{k=m}^{2m}|a_k|\right)$$

.

Diambil $\beta = |a| = \{|a_n|\}$, maka $\sum_{k=n}^{2n-1}|a_k - a_{k+1}| \leq \frac{K}{n}\left(\sup_{m\geq[n/\gamma]}\sum_{k=m}^{2m}\beta_k\right)$

sehingga $(a,\beta) \in \mathcal{SBVS}_p$, jadi $a \in \mathcal{SBVS}_p(|a|)$. ■

Teorema 3.4. *Jika* $1 \leq p < q < \infty$, *maka* $\mathcal{SBVS}2_p \subseteq \mathcal{SBVS}2_q$.

Bukti: Ambil $(a,\beta) \in \mathcal{SBVS}2_p$, maka terdapat konstanta positif K dan $\{b(k)\}_{k=1}^{\infty} \subset [0,\infty)$ *dengan* $b(k) \to \infty$ *untuk* $k \to \infty$ *dan monoton naik* sehingga berlaku

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1}|a_k - a_{k+1}|^p\right)^{1/p} \leq \frac{K}{n}\left(\sup_{m\geq b(n)}\sum_{k=m}^{2m}\beta_k\right)$$

Seperti langkah bukti teorema 2.1. diperoleh

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1}|\Delta a_k|^q\right)^{1/q} \leq \left(\sum_{k=n}^{2n-1}|\Delta a_k|^p\right)^{1/p}$$

Sehingga diperoleh

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1}|a_k - a_{k+1}|^q\right)^{1/q} \leq \frac{K}{n}\left(\sup_{m\geq b(n)}\sum_{k=m}^{2m}\beta_k\right),$$

jadi $(a,\beta) \in \mathcal{SBVS}2_q$ dan terbukti $\mathcal{SBVS}2_p \subseteq \mathcal{SBVS}2_q$. ■

Teorema 3.5. *Jika* $1 \leq p < \infty$, *maka* $\mathcal{SBVS}_p \subseteq \mathcal{SBVS}2_p$.

Bukti: Ambil $(a,\beta) \in \mathcal{SBVS}_p$, maka terdapat konstanta positif K dan $\gamma \geq 1$
sehingga

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1}|a_k-a_{k+1}|^p\right)^{1/p} \leq \frac{K}{n}\left(\sup_{m\geq[n/\gamma]}\sum_{k=m}^{2m}\beta_k\right).$$

Kemudian diambil $b(n)=n/\gamma$ sehingga berlaku

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1}|a_k-a_{k+1}|^p\right)^{1/p} \leq \frac{K}{n}\left(\sup_{m\geq b(n)}\sum_{k=m}^{2m}\beta_k\right).$$

Jadi $(a,\beta)\in \mathcal{SBVS}2_p$ dan terbukti $\mathcal{SBVS}_p \subseteq \mathcal{SBVS}2_p$. ∎

Akibat 3.6. *Jika* $1\leq p<\infty$, *maka* $\mathcal{SBVS}_p(\beta)\subseteq \mathcal{SBVS}2_p(\beta)$.

Bukti: Ambil $a\in \mathcal{SBVS}_p(\beta)$, maka $(a,\beta)\in \mathcal{SBVS}_p$, menurut Teorema 3.5.

$(a,\beta)\in \mathcal{SBVS}2_p$. Jadi $a\in \mathcal{SBVS}_p(\beta)$. ∎

Akibat 3.7. *Untuk setiap* $a\in SBVS2$, *maka* $a\in \mathcal{SBVS}2_p(|a|)$ *dengan* $1\leq p<\infty$.

Bukti: Ambil $a\in SBVS2$, maka terdapat konstanta positif K dan $\{b(k)\}_{k=1}^{\infty}\subset[0,\infty)$ dengan $\mathrm{b(k)}\to\infty$ untuk $\mathrm{k}\to\infty$ dan monoton naik sehingga berlaku

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1}|a_k-a_{k+1}|^p\right)^{1/p} \leq \frac{K}{n}\left(\sup_{m\geq b(n)}\sum_{k=m}^{2m}|a_k|\right)$$

Diambil $\beta=|a|=\{|a_n|\}$, maka $\left(\sum_{k=n}^{2n-1}|a_k-a_{k+1}|^p\right)^{1/p}\leq\frac{K}{n}\left(\sup_{m\geq b(n)}\sum_{k=m}^{2m}\beta_k\right)$

sehingga $(a,\beta)\in \mathcal{SBVS}2_p$, jadi $a\in \mathcal{SBVS}2_p(|a|)$. ∎

Teorema 3.8. *Jika* $1\leq p<\infty$, *maka* $\mathcal{MVBVS}_p\subseteq \mathcal{SBVS}_p$.

Bukti: Ambil $(a,\beta)\in \mathcal{MVBVS}_p$ jadi terdapat konstanta positif K dan $\lambda\geq 2$ sehingga berlaku

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1}|\Delta a_k|^p\right)^{1/p} \leq \frac{K}{n}\sum_{k=[\lambda^{-1}n]}^{[\lambda n]}\beta_k$$

untuk semua bilangan bulat positif n dan $1\leq p<\infty$. Kemudian sejalan dengan bukti Teorema 1.3. [6], bahwa

$$\frac{K}{n}\sum_{k=[\lambda^{-1}n]}^{[\lambda n]}\beta_k \leq \frac{K}{n}\left(\sum_{k=[n/\lambda]}^{2[n/\lambda]-1}\beta_k+\sum_{k=2[n/\lambda]}^{4[n/\lambda]-1}\beta_k+\cdots+\sum_{k=\lambda^2[n/\lambda]}^{2\lambda^2[n/\lambda]-1}\beta_k\right)\leq\frac{2\lambda^2K}{n}\left(\sup_{m\geq[n/\lambda]}\sum_{k=m}^{2m}\beta_k\right).$$

Jadi $\left(\sum_{k=n}^{2n-1}|\Delta a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\frac{2\lambda^2K}{n}\left(\sup_{m\geq[n/\lambda]}\sum_{k=m}^{2m}\beta_k\right)$, sehingga $(a,\beta)\in \mathcal{SBVS}_p$ dengan $K'=2\lambda^2K$. Terbukti $\mathcal{MVBVS}_p\subseteq \mathcal{SBVS}_p$. ∎

Akibat 3.9. *Jika* $1\leq p<\infty$, *maka* $\mathcal{MVBVS}_p(\beta)\subseteq \mathcal{SBVS}_p(\beta)$.

Bukti: Ambil $a\in \mathcal{MVBVS}_p(\beta)$, maka $(a,\beta)\in \mathcal{MVBVS}_p$, menurut Teorema 3.8.

$(a,\beta)\in \mathcal{SBVS}_p$. Jadi $a\in \mathcal{SBVS}_p(\beta)$, terbukti $\mathcal{MVBVS}_p(\beta)\subseteq \mathcal{SBVS}_p(\beta)$. ∎

Akibat 3.10. *Untuk setiap* $a \in MVBVS$ *, maka* $a \in \mathcal{MVBVS}_p(|a|) \subseteq \mathcal{SBVS}_p(|a|)$ *dengan* $1 \leq p < \infty$.

Bukti: Ambil $a \in MVBVS$, maka terdapat konstanta positif K dan $\lambda \geq 2$ sehingga berlaku

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta a_k|^p\right)^{1/p} \leq \frac{K}{n} \sum_{k=[\lambda^{-1}n]}^{[\lambda n]} |a_k|$$

untuk semua bilangan bulat positif n dan $1 \leq p < \infty$. Diambil $\beta = |a| = \{|a_n|\}$, sehingga

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta a_k|^p\right)^{1/p} \leq \frac{K}{n} \sum_{k=[\lambda^{-1}n]}^{[\lambda n]} \beta_k$$

jadi $a \in \mathcal{MVBVS}_p(|a|)$ dan menurut Akibat 3.9 maka $a \in \mathcal{SBVS}_p(|a|)$.

Terbukti $a \in \mathcal{MVBVS}_p(|a|) \subseteq \mathcal{SBVS}_p(|a|)$. ■

4 KESIMPULAN

Kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan di atas adalah sebagai berikut.

1. Konstruksi klas $\mathcal{SBVS}2_p$ merupakan klas yang lebih umum dari klas $\mathcal{SBVS}2$ dan klas $\mathcal{SBVS}$ (Teorema 3.4 dan Teorema 3.5).
2. Klas $\mathcal{SBVS}2_p$ merupakan generalisasi dari klas $\mathcal{MVBVS}_p$ (Teorema 3.5 dan Teorema 3.8).
3. Untuk setiap $a \in MVBVS$, maka $a \in \mathcal{MVBVS}_p(|a|) \subseteq \mathcal{SBVS}_p(|a|)$ dengan $1 \leq p < \infty$ (Akibat 3.10).

5 UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih atas dukungan dari Jurusan Matematika FMIPA UB dan Program Studi S3 Jurusan Matematika FMIPA UGM serta dukungan finansial melalui beasiswa S3 DIKTI.

6 DAFTAR PUSTAKA

[1] Belaidi,B. dan El Farissi, A., "Inequalities Between The Sum of Power and The Exponential of Sum of Nonnegative Sequence", Department of Mathematics University of Monstaganem, Monstaganem (Algeria). 2012.
[2] Chaundy TW dan Jollife AE, "The Uniform Convergence of certain class trigonometric serie", Proc. London, Soc. 15, 214-116, 1916.
[3] Feng, F.J. dan Zhou, S.P., "On L1-Convergence Of Fourier Series Of Complex Valued Functions Under The GM7 Condition", Acta Math, Hungar, 133(1-2), 2011.
[4] Imron, M.A., Indrati, Ch.R.and Widodo, "On p-Non One Sided Bounded variation Sequences and Functions", Proc 2nd Basic Science International Conference, Mathematics Department, FMIPA, UB, 2012.
[5] Imron, M.A., Indrati, Ch.R.and Widodo, "Sifat-sifat Barisan dan fungsi dasri klas p-mean Value Bounded variation", Konferensi Nasional Matematika 16, Unpad , Bandung, 2012
[6] Korus,P., "Remark On the uniform And L1-Convergence Of Trigonometric Series", Acta Math. Hungar, 128(4), 2010.
[7] Leindler, L., "Best Approaximation and Fourier Coefficients", Anal. Math, 31, 117-129 (2005).
[8] Le, R.J. and S. P. Zhou, "A new condition for uniform convergence of certain trigonometric series", Acta Math Hungar, 108, 2005.
[9] Liflyand,E. and Tikhonov,S., "The Fourier Transforms of General Monotone Functions, Analysis and Mathematical Physics", *Trends in Mathematics* (Birchauser, 2009).
[10] Liflyand, E. And Tikhonov, S., "A concept of general monotonicity and applications", Math Nachr, 284, No. 8-9, 2011.
[11] Tikhonov,S., "Best approximation and moduli of Smoothness computation and Equivalence Theorems", *Journal of Approximation Theory*, 153 (19-39), 2008.
[12] Yu, D.S. dan Zhou, S.P., A Generalization of Monotonicity Conditions and Applications, Acta Math Hungar, 115(3), 2007.
[13] Zhou, S.P., Zhou, P. dan Yu, D.S., Ultimate generalization to monotonicity for Uniform Convergence of Trigonometric Series, Science China Mathematics, 53(7), 1853-1862, 2010.