

JAWABAN ANALITIK SEBAGAI VALIDASI JAWABAN NUMERIK PADA MATA KULIAH FISIKA KOMPUTASI

ABSTRAK

Kasus-kasus fisika yang diangkat pada mata kuliah Fisika Komputasi akan dijawab secara numerik. Validasi jawaban ini akan dilakukan dengan membandingkannya dengan jawaban analitik yang telah dipahami mahasiswa sebagai pengalaman belajar ketika menempuh mata kuliah Fisika Matematika pada waktu sebelumnya. Contoh yang digunakan sebagai sampel dalam penelitian ini adalah kasus fisika yang memuat persamaan diferensial biasa. Strategi yang dilakukan ini diharapkan dapat memberikan pembuktian kepada mahasiswa bahwa jawaban numerik merupakan suatu pendekatan yang baik untuk menjawab permasalahan fisika. Bahkan, ketika langkah-langkah yang ditempuh dalam mencari jawaban analitik terlalu kompleks, jawaban numerik masih merupakan suatu pendekatan yang baik.

Kata-kata kunci: *jawaban numerik, jawaban analitik, persamaan diferensial biasa.*

ABSTRACT

The physics cases in which arise in the Computational Physics course will be solved by numerical method. The numerical solutions of the cases will be correspond to the analytical solutions which are obtained by student as learning experience in the Mathematic Physics course at the past. The examples that used in this research are the cases including ordinary differential equation. The strategy in which used is hope can give evidence to the student that numerical solutions are good approximation to solve physics cases. Moreover, they still are good approximations while the analytical methods too be complex.

Keywords: *numerical solution, analytical solution, ordinary differential equation.*

A. PENDAHULUAN

Mata kuliah Fisika Komputasi di Jurusan Pendidikan Fisika IKIP PGRI Semarang diajarkan pada semester empat. Mata kuliah ini mengungkapkan metode-metode numerik untuk menjawab permasalahan matematika yang sering

muncul pada fenomena fisika. Metode numerik berisi pendekatan perhitungan angka-angka yang membawa semua operasi matematika termasuk integral dan diferensial ke dalam operasi dasar yang berupa perkalian, pembagian, penjumlahan dan pengurangan.

Masalah yang muncul pada metode numerik adalah validasi jawaban yang diperoleh dari perhitungan tersebut. Semestinya, validasi tersebut dilakukan dengan analisis numerik sehingga diketahui tingkat kesahihan jawaban tersebut. Akan tetapi, pada mata kuliah ini, analisis tersebut tidak dilakukan. Oleh karena itu, diperlukan strategi khusus agar jawaban numerik yang diperoleh dapat diuji validitasnya. Strategi yang biasa dilakukan adalah membandingkan jawaban tersebut dengan hukum-hukum fisika yang berlaku. Secara khusus, hal ini akan lebih mudah dipahami jika hukum fisika terkait validitas tersebut diambil dari kasus yang pernah dipelajari mahasiswa pada mata kuliah sebelumnya sebagai pengalaman belajar.

Beberapa kasus yang dipelajari pada kedua mata kuliah tersebut adalah fenomena fisika yang melibatkan persamaan diferensial biasa (PDB). Jawaban-jawaban analitik yang diperoleh pada mata kuliah Fisika Matematika akan digunakan sebagai validasi jawaban numerik pada mata kuliah Fisika Komputasi. Banyak contoh fenomena yang melibatkan PDB yang sering dibahas dalam masalah nilai awal. Maksudnya, PDB tersebut dapat dijawab secara khusus apabila nilai awal yang terkait dengan fenomena tersebut telah diketahui. Penelitian yang akan dilakukan adalah membandingkan jawaban analitik dan jawaban numerik dengan menggunakan nilai awal dan data-data yang sama, sehingga kesepadanan kedua jawaban tersebut dapat dilihat. Sehingga kebenaran metode numerik dapat diterima sebagai kebenaran baru yang sepadan dengan metode analitik.

Kesepadanan jawaban tersebut akan dilihat melalui visualisasi grafik.

Persamaan yang mengandung turunan disebut persamaan diferensial. Jika suatu persamaan mengandung turunan parsial persamaan tersebut disebut persamaan diferensial parsial (PDP), sedangkan persamaan diferensial yang tidak mengandung turunan parsial disebut persamaan diferensial biasa (PDB)(Boas, 1983).

Contoh-contoh kasus yang melibatkan persamaan diferensial biasa akan diuraikan sebagai berikut. Suatu rangkaian RC sederhana yang terhubung dengan suatu sumber tegangan V (Gambar 1.a) dapat dirumuskan menurut

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{V}{R} \quad (1)$$

Persamaan ini merupakan bentuk PDB orde pertama dengan muatan q merupakan besaran yang perlu dijawab sebagai fungsi waktu t (Saefan, 2012). Berikutnya, apabila ditambahkan suatu induktor L pada rangkaian tersebut (Gambar 1.b), akan diperoleh

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{V}{L} \quad (2)$$

yang merupakan bentuk PDB orde kedua. Bentuk PDB orde kedua lain muncul pada kasus gerak pegas yang dirumuskan menurut

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0 \quad (3)$$

dengan y merupakan simpangan benda dari titik kesetimbangan yang harus dijawab sebagai fungsi waktu t . Koefisien k merupakan konstanta pegas, dan m merupakan massa benda. Apabila gaya gesekan dengan udara yang menyebabkan redaman tidak diabaikan, persamaan gerak pegas akan menjadi lebih kompleks. Jika gesekan dianggap sebanding dengan kecepatan

pegas v , persamaan gerak dirumuskan menurut

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{c}{m} v + \frac{k}{m} y = 0, \quad (4)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} y = 0,$$

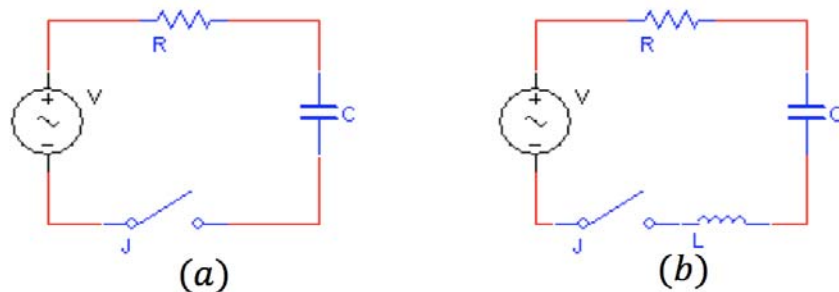
dengan c merupakan konstanta koefisien gesekan. Gaya gesek tersebut dapat pula ditinjau sebanding dengan kuadrat kecepatannya (Hardyanto, 2005), sehingga

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{c}{m} v^2 + \frac{k}{m} y = 0. \quad (5)$$

Contoh-contoh kasus di atas dapat dijawab dengan memberikan terlebih dahulu masalah nilai awal. Kasus rangkaian RC akan dijawab untuk dua nilai awal yang berbeda. Pertama, muatan kapasitor q bernilai nol saat $t = 0$ ketika saklar ditutup. Kasus ini dikenal dengan istilah pengisian kapasitor. Kedua, muatan

kapasitor q bernilai q_0 saat $t = 0$ ketika saklar dilepas. Kasus ini dikenal dengan istilah pengosongan kapasitor.

Nilai awal yang diberikan untuk persamaan diferensial orde kedua harus sebanyak dua buah, yaitu terkait q dan $\frac{dq}{dt}$ untuk persamaan (2) dan terkait y dan $\frac{dy}{dt}$ untuk persamaan (3). Nilai awal yang akan diberikan untuk rangkaian RLC adalah muatan q bernilai q_0 dan $\frac{dq}{dt}$ yang disebut juga sebagai arus I yang bernilai nol saat $t = 0$ ketika saklar dilepas. Lalu, nilai awal yang diberikan untuk kasus gerak pegas adalah simpangan y bernilai maksimum yaitu y_0 dan $\frac{dy}{dt}$ yang disebut juga sebagai kecepatan benda v bernilai nol saat $t = 0$.



Gambar 1. (a) Rangkaian RC sederhana, (b) rangkaian RLC.

B. METODOLOGI PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan membandingkan jawaban analitik dengan jawaban numerik pada beberapa kasus fisika menggunakan nilai besaran yang sama. Perbandingan ini akan diwujudkan dalam visualisasi grafik. Strategi pengajaran ini dilakukan untuk membangun kebenaran baru dari pengalaman belajar yang pernah diperoleh mahasiswa. Suatu metode numerik

dikatakan valid jika jawaban yang diperoleh dari metode tersebut sepadan dengan jawaban analitik dari kasus tersebut. Apabila perhitungan numerik yang dilakukan tidak mendapatkan jawaban yang sesuai dengan jawaban analitik maka jawaban numerik tersebut tidak valid atau tidak stabil. Stabilitas jawaban numerik ini dapat dijadikan sebagai pegangan bagi mahasiswa bahwa jawaban tersebut dapat menjawab suatu permasalahan

fisika yang sedang ditinjau secara valid.

Perhitungan-perhitungan akan dilakukan dengan bantuan computer menggunakan bahasa pemrograman berbasis Matlab. Hasil perhitungan, baik analitik maupun numerik akan ditampilkan dalam bentuk grafik untuk memperlihatkan kesepadanan kedua jawaban tersebut.

C. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Pengisian kapasitor dari gambar 1.(a) akan terjadi jika saklar I dihubungkan sehingga muatan yang terbawa arus dari sumber tegangan akan mengisi kapasitor sampai muatan kapasitor penuh sesuai kapasitasnya dan akhirnya arus akan berhenti. Penelitian dilakukan dengan memberikan nilai awal $V = 10 \text{ volt}$, $C = 100 \mu\text{F}$, dan $R = 0.01 \text{ k}\Omega$. Rentang plot dibuat dari 0 sampai 0.1 detik dengan lebar grid $h = 0.01$ detik atau jumlah grid $N = 10$ untuk penggambaran pertama dan lebar grid $h = 0.002$ detik atau jumlah grid $N = 50$ untuk penggambaran kedua dalam rentang yang sama. Jawaban

pengisian kapasitor menggunakan metode analitik dirumuskan menurut

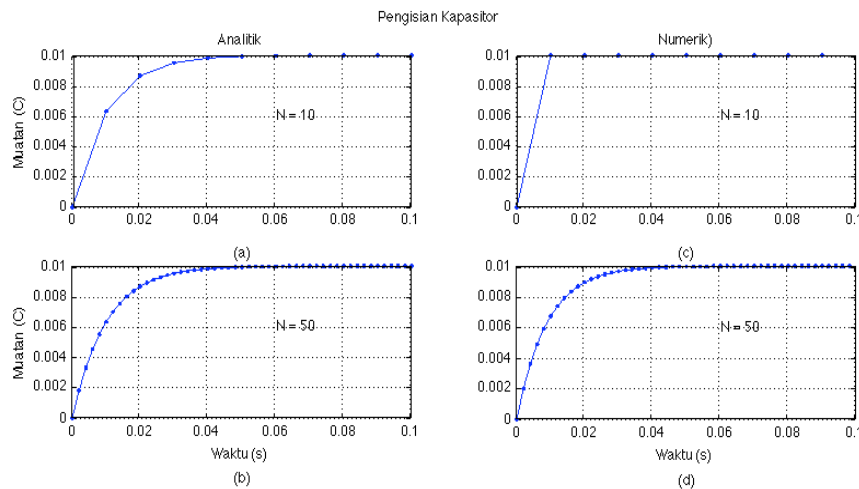
$$q = VC \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right). \quad (6)$$

Sedangkan menurut metode numerik, nilai q yang baru diperoleh dari q sebelumnya yang diperbarui untuk setiap lebar grid h , yaitu

$$q_{n+1} = q_n + h I_n, \quad (7)$$

dengan $I = \frac{dq}{dt}$ yang disebut arus listrik (Hardyanto, 2004).

Hasil perhitungan tersebut menunjukkan bahwa perhitungan analitik, bagaimanapun akan selalu stabil (Gambar 2.(a), 2.(b)). Sementara itu, perhitungan numerik dengan $N = 10$ atau $h = 0.01$ menunjukkan hasil yang tidak stabil (Gambar 2.(c)). Kestabilan jawaban numerik dapat diperoleh apabila nilai h diperkecil atau jumlah N diperbesar dalam rentang yang sama. Apabila N diperbesar sampai 50, jawaban numerik akan menunjukkan hasil yang stabil (Gambar 2.(d)) sebagaimana yang ditunjukkan jawaban analitik, sehingga jawaban numerik memperlihatkan kevalidannya seperti jawaban analitik.



Gambar 2. Grafik pengisian muatan pada kapasitor sebagai fungsi waktu untuk jawaban analitik dan jawaban numerik

Pengosongan kapasitor akan terjadi apabila rangkaian gambar 1.a yang mula-mula tersambung diputus, atau saat saklar J dibuka. Nilai awal yang diberikan untuk kasus ini adalah $V = 0$, $q_0 = 100 \text{ mC}$, dan $RC = 10 \text{ ms}$. Rentang grafik yang diberikan antara 0 sampai 50 ms dengan jumlah grid $N = 50$. Menurut perhitungan analitik kasus ini dapat dirumuskan menurut

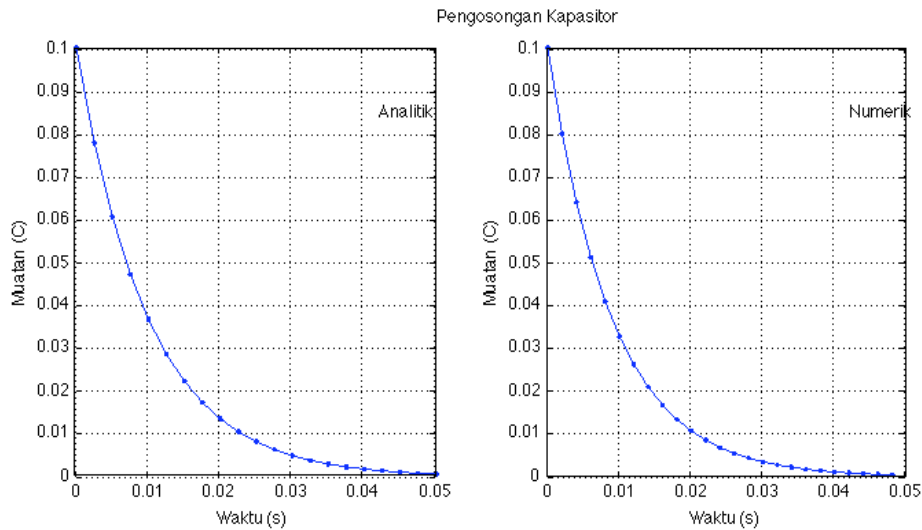
$$q = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \quad (8)$$

dengan hasil plot ditunjukkan pada gambar 3 bagian analitik. Sementara, perhitungan numerik dirumuskan menurut

$$q_{n+1} = q_n + h I_n, \quad (9)$$

$$I_n = -\frac{q_n}{RC},$$

dengan plot ditunjukkan pada gambar 3 bagian numerik. Kedua plot grafik tersebut, baik analitik maupun numerik dapat dikatakan sepadan.



Gambar 3. Grafik pengosongan muatan pada kapasitor sebagai fungsi waktu untuk jawaban analitik dan jawaban numerik

Kasus rangkaian RLC gambar 1.(b) akan dicontohkan saat saklar diputus dengan nilai awal tegangan $V = 0$, hambatan $R = 10 \Omega$, kapasitansi $C = 100 \mu\text{F}$, induktansi $L = 1 \text{ H}$, dan muatan awal kapasitor $q_0 = 2 \text{ C}$. Rentang grafik dibuat antara 0 sampai 1 s dengan jumlah grid $N = 100$. Rumusan q sebagai fungsi waktu t pada nilai awal tersebut secara analitik adalah

$$q = q_0 e^{-\beta t} \sin\left(\beta t + \frac{\pi}{2}\right), \quad (10)$$

dengan $\beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ (Boas, 1983).

Plot grafik kasus ini ditunjukkan pada gambar 4 bagian atas. Perhitungan numerik dilakukan dengan rumusan

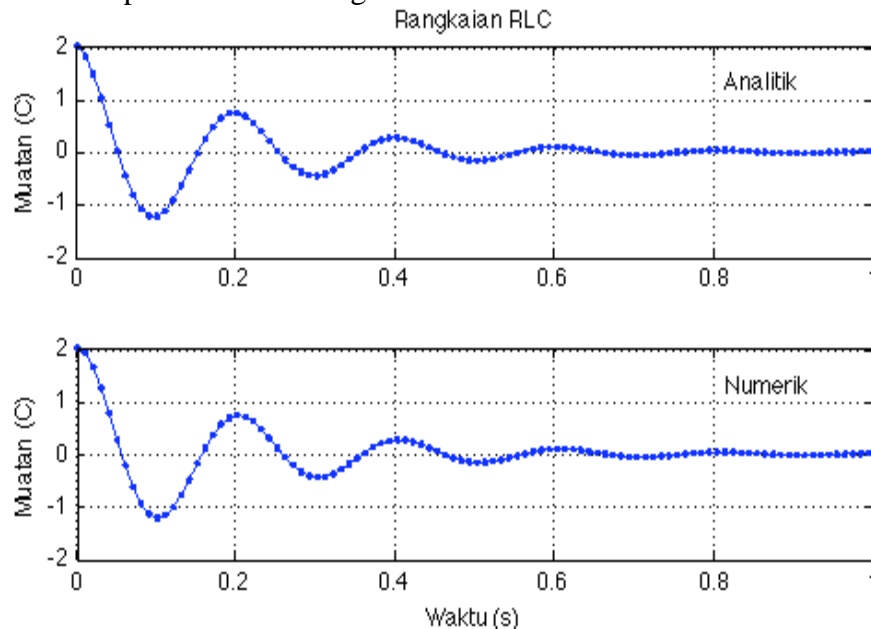
$$q_{n+1} = q_n + h I_n,$$

$$I_{n+1} = I_{n+1} + h \left(\frac{dI}{dt}\right)_n, \quad (11)$$

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_n = -\frac{q_n}{RC} - \frac{R}{L} I_n,$$

dan hasil perhitungannya ditunjukkan pada gambar 4 bagian bawah. Hasil keduanya, baik analitik maupun numerik terlihat sepadan.

Contoh nyata dalam kehidupan sehari-hari untuk kasus ini sering dijumpai, yaitu ketika gejala lampu led yang berkedip saat rangkaian elektronik dimatikan. Deskripsi kedipan ini dapat diinterpretasikan seperti gambar 4.



Gambar 4. Grafik pengosongan muatan pada rangkaian RLC sebagai fungsi waktu untuk jawaban analitik dan jawaban numerik.

Kasus gerak pegas dicontohkan dengan memberikan nilai simpangan awal $y_0 = 10 \text{ cm}$, massa pegas $m = 10 \text{ g}$, konstanta pegas $k = 100 \text{ N/m}$ dan kecepatan awal $v_0 = 0$. Rentang grafik diberikan antara 0 sampai 1 s. Jawaban analitik yang diperoleh dirumuskan menurut

$$y = y_0 \sin \omega t, \quad (12)$$

dengan $\omega = \frac{\sqrt{k}}{m}$ dan plot grafik ditunjukkan menurut gambar 5 bagian atas. Sementara itu, perhitungan numerik dirumuskan menurut

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h v_n, \\ v_{n+1} &= v_n + h a_n, \\ a_n &= -\frac{k}{m} y_n, \end{aligned} \quad (13)$$

dengan a merupakan percepatan gerak pegas. Plot grafik ditunjukkan seperti gambar 5 bagian tengah. Hasil jawaban

numerik untuk kasus ini tidak stabil, bahkan jika jumlah grid ditambah.

Hasil jawaban yang stabil akan diperoleh jika metode numerik yang digunakan diganti dengan metode numerik lain. Metode numerik yang digunakan sampai sejauh ini biasa disebut dengan metode Euler. Metode ini akan diperbaiki dengan metode Runge-Kutta orde keempat untuk kasus osilasi gerak pegas untuk mendapatkan kestabilan jawaban. Rumusan metode Runge-Kutta untuk kasus ini dinyatakan menurut

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} (j_1 + 2j_2 + 2j_3 + j_4), \quad (14)$$

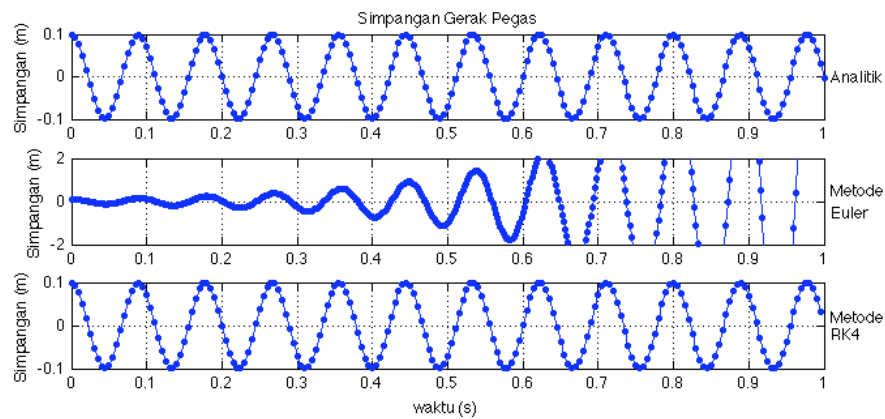
$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

dengan

$$\begin{aligned} j_1 &= h v_n, \\ j_2 &= h(v_n + 0.5k_1), \\ j_3 &= h(v_n + 0.5k_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_3 &= h(y_{ii} + k_3), \\
 k_1 &= h \left(-\frac{k}{mz} y_{ii} \right), \\
 k_2 &= h \left(-\frac{k}{mz} (y_{ii} + 0.5f_1) \right), \\
 k_3 &= h \left(-\frac{k}{mz} (y_{ii} + 0.5f_2) \right).
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

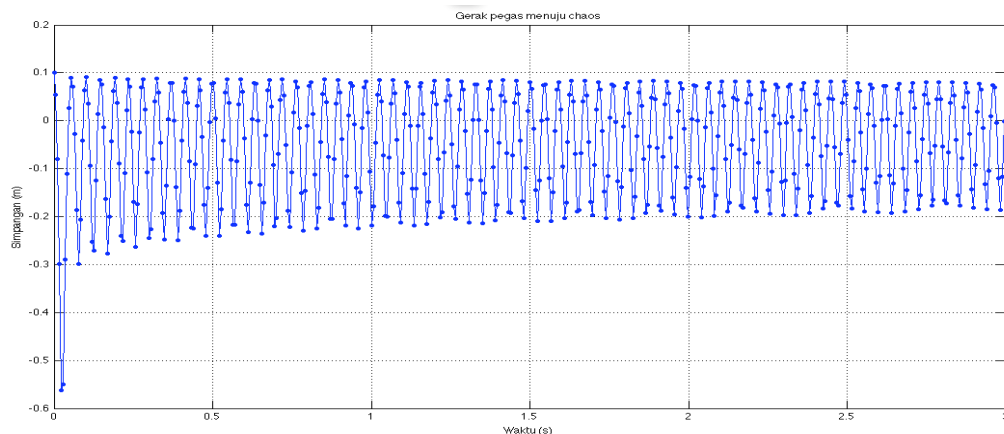
Hasil perhitungan metode Runge-Kutta yang ditunjukkan gambar 5 bagian bawah lebih stabil dibandingkan dengan metode Euler dan kestabilan jawabannya sepadan dengan jawaban analitik.



Gambar 4. Grafik simpangan y sebagai fungsi waktu t pada gerak pegas untuk berbagai metode.

Apabila factor gaya redaman yang sebanding dengan kecepatan dimasukkan dalam gerak pegas, jawaban yang diperoleh akan sebanding dengan jawaban pada rangkaian RLC. Hal ini terjadi karena persamaan diferensial yang dirumuskan pada persamaan (4) sepadan dengan persamaan (2). Apabila factor gaya redaman sebanding dengan kuadrat

kecepatan, perolehan jawaban dengan metode analitik akan menjadi lebih kompleks. Kasus ini akan ditinjau hanya untuk metode Runge-Kutta orde keempat saja dengan menganggap metode ini dapat memberikan kestabilan jawaban. Visualisasi grafik ditunjukkan oleh gambar 6 dengan nilai awal dan parameter yang sama dengan gambar 5.



Gambar 4. Grafik simpangan y sebagai fungsi waktu t pada gerak pegas dengan faktor redaman yang sebanding dengan kuadrat kecepatan..

Hasil yang diperoleh dari penggambaran ini adalah amplitude getaran yang tidak teratur. Hal ini, secara fisis dapat dipahami sebagai gejala menuju *chaos* dengan menganggap bahwa metode Runge-Kutta orde keempat yang digunakan merupakan jawaban yang stabil.

D. KESIMPULAN DAN SARAN

1. Simpulan

Jawaban numerik memiliki kestabilan jawaban yang sepadan dengan jawaban analitik jika h yang digunakan cukup kecil. Jawaban numerik dapat memberikan interpretasi fisis yang sangat membantu ketika jawaban analitik cenderung kompleks.

2. Saran

Perolehan jawaban numerik akan lebih valid jika tingkat kesalahan dianalisis secara matematis berdasarkan metode yang digunakan, tidak hanya dibandingkan secara grafis dengan perolehan metode analitik.

DAFTAR PUSTAKA

- Boas, ML. 1983. *Mathematical Methods in The Physical Science*. Canada: John Wiley & Sons.
- Hardiyanto, W. 2005. *Mengungkap Fenomena Fisika Menggunakan Delphi*. Semarang: Unnes Press.
- Riley, KF. 2004. *Mathematical Methods for Physics and Engineering*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Saefan, J. 2012. *Fisika Matematika II*. Semarang: IKIP PGRI Semarang.