

PEMODELAN SISTEM TANGKI-TERHUBUNG DENGAN MENGGUNAKAN MODEL FUZZY TAKAGI-SUGENO

Aries Subiantoro

Departemen Elektro, Fakultas Teknik, Universitas Indonesia, Depok 16424, Indonesia
Real Time Measurement and Control Research Group

E-mail: biantoro@ee.ui.ac.id

Abstrak

Makalah ini membahas pemodelan sistem tangki terhubung berbasis data masukan-keluaran dengan menggunakan model *fuzzy* Takagi-Sugeno. Algoritma *fuzzy clustering* Gustafson-Kessel digunakan untuk mengelompokkan data masukan-keluaran menjadi beberapa *cluster* berdasarkan kesamaan jarak suatu anggota data masukan-keluaran dari titik tengah suatu cluster. *Cluster-cluster* yang terbentuk diproyeksikan orthonormal ke setiap ruang variabel linguistik bagian premis untuk mendapatkan fungsi keanggotaan model *fuzzy* Takagi-Sugeno. Parameter konsekuen dari model *fuzzy* Takagi-Sugeno diperoleh dengan mengestimasi data setiap *cluster* dengan menggunakan metode *weighted least-squares*. Hasil model *fuzzy* Takagi-Sugeno yang diperoleh divalidasi dengan indikator kinerja *variance-accounted-for* (VAF) dan *root mean square* (RMS). Hasil uji simulasi menunjukkan model *fuzzy* Takagi-Sugeno sanggup meniru karakteristik nonlinier sistem tangki terhubung dengan nilai indikator kinerja model yang baik.

Abstract

Modeling of Coupled-Tank System Using Fuzzy Takagi-Sugeno Model. This paper describes modeling of coupled-tank system based on data measurement using fuzzy Takagi-Sugeno model. The fuzzy clustering method of Gustafson-Kessel algorithm is used to classify input-output data into several clusters based on distance similarity of a member of input-output data from center of cluster. The formed clusters are projected orthonormally into each linguistic variables of premise part to determine membership function of fuzzy Takagi-Sugeno model. By estimating data in each cluster, the consequent parameters of fuzzy Takagi-Sugeno model are calculated using weighted least-squares method. The resulted fuzzy Takagi-Sugeno model is validated by using model performance parameters *variance-accounted-for* (VAF) and *root mean square* (RMS) as performance indicators. The simulation results show that the fuzzy Takagi-Sugeno model is able to mimic nonlinear characteristic of coupled-tank system with good value of model performance indicators.

Keywords: System modeling, fuzzy Takagi-Sugeno, fuzzy clustering, coupled-tank

1. Pendahuluan

Dalam rekayasa teknik kendali, pemodelan dan identifikasi merupakan tahapan penting dalam perancangan pengendali, supervisi, dan sistem pendeteksi kesalahan. Teknik produksi modern dan manufaktur di industri juga menunjukkan gejala peningkatan akan tuntutan kinerja sistem kendali terkait dengan *lifetime* produk, kualitas, dan keselamatan.

Untuk memperoleh kualitas produk yang baik, sistem kendali harus dapat menjamin kinerja yang tinggi untuk rentang titik operasi proses yang luas. Tuntutan ini membuat pemodelan proses menjadi kendala utama bagi

teknik perancangan pengendali berbasis model proses.

Dalam teknik pemodelan klasik, sebuah persamaan matematis sistem diturunkan berdasarkan sifat fisik, kimia, atau biologi. Model yang diperoleh memerlukan waktu yang lama dan biaya yang tidak sedikit. Hasil model sering kali tidak memuaskan, dikarenakan keterbatasan pengetahuan formal akan sistem, akurasi yang kurang, sifat nonlinieritas yang kuat dari sistem, tingginya ketidakpastian, serta karakteristik sistem yang berubah terhadap waktu [1].

Untuk meningkatkan akurasi model didalam meniru perilaku sistem nonlinier, telah digunakan model

nonlinier seperti model *Fuzzy* [2]. Pengetahuan seorang pakar dalam menurunkan basis aturan merupakan kesukaran yang dihadapi dalam menurunkan model logika *fuzzy*. Namun Babuska dan Verbruggen [3] telah menunjukkan keberhasilan menurunkan basis aturan model *Fuzzy* berdasarkan data eksperimen yang diperoleh dengan menggunakan teknik *clustering*. Model *fuzzy* yang diperoleh, yang disebut sebagai model *fuzzy* Takagi-Sugeno (TS), merupakan kombinasi antara fungsi kualitatif pada bagian premis dan fungsi kuantitatif pada bagian konsekuen. Model kuantitatif yang digunakan dalam bagian konsekuen berupa model linier dinamik. Kombinasi dengan aturan logika pada bagian premis membuat model ini dapat dilihat sebagai model multi model linier lokal. Dalam aplikasi praktis, setiap model linier lokal mewakili satu titik operasi. Perpindahan diantara titik operasi diatur oleh mekanisme bagian premis secara gradual. Untuk teknik perancangan pengendali modern berbasis model *Fuzzy* TS, model ini cocok digunakan untuk memperbaiki kinerja teknik kendali *gain scheduling* [4], dan alternatif lain dari metode *multiple model adaptive control* [5].

Makalah ini membahas pemodelan model *Fuzzy* TS berbasis data masukan-keluaran, yang dikenal sebagai identifikasi sistem, untuk sistem tangki terhubung. Kombinasi algoritma Gustafson-Kessel dan *least-squares* digunakan untuk membangun bagian premis dan konsekuen model *fuzzy* TS. Untuk mengatasi permasalahan *over-parameterization* yang sering dijumpai dalam identifikasi sistem [6], *a priori knowledge* yang dimiliki dari sistem tangki terhubung digunakan dalam penentuan struktur model. Parameter *variance-accounted-for* dan *root mean square* digunakan sebagai indikator kinerja dalam validasi model *fuzzy* TS.

2. Metode Penelitian

Spesifikasi sistem tangki terhubung mengacu pada keadaan fisik sistem *Coupled Tank Apparatus PP-100*, dengan nilai parameter terlihat pada Tabel 1, dengan skema sistem tangki terhubung terlihat pada Gambar 1.

Tabel 1. Nilai parameter sistem tangki terhubung

Parameter	Keterangan	Nilai
$A_1 = A_2$	Luas penampang tangki 1 & 2	34 cm ²
$k_1 = k_2$	Luas penampang pipa katup	0.19625 cm ²
$h_{1,max} = h_{2,max}$	Ketinggian maksimum tangki 1 dan 2	30 cm
$K_{vq} (Q_{in} = K_{vq} \times V_{pump})$	Faktor pengali tegangan aliran	6 cm ³ /Vs
V_{pump}	Interval tegangan pompa	$0 \leq V_{pump} \leq 12$ Volt

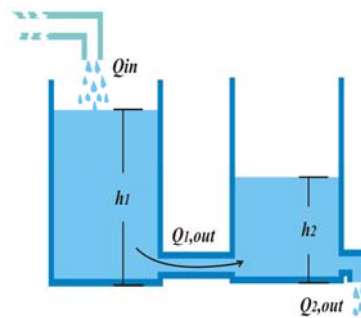
Sebagai masukan dan keluaran pada sistem tangki terhubung adalah catu tegangan pompa $u(t)$ yang mengirim debit fluida $q_{in}(t)$ kedalam tangki pertama dan ketinggian permukaan fluida $h_2(t)$ pada tangki kedua. Rentang tegangan catu pompa dan ketinggian fluida berturut-turut adalah berkisar diantara 0 Volt hingga 12 Volt dan 0 cm hingga 30 cm. Pada kondisi *mass-balance*, perubahan volume pada kedua tangki adalah sama dengan jumlah debit fluida masuk dikurangi jumlah debit fluida keluar. Banyaknya debit fluida yang masuk pada tangki 1 ditentukan dari nilai tegangan pompa yang diberikan, dan kedua variabel tersebut diasumsikan memiliki hubungan linier. Dengan demikian perubahan volume pada kedua tangki dapat dirumuskan dalam persamaan diferensial nonlinier:

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{Q_{in} - k_1 \text{sign}(h_1 - h_2) \sqrt{|h_1 - h_2|}}{A_1}, \tag{3}$$

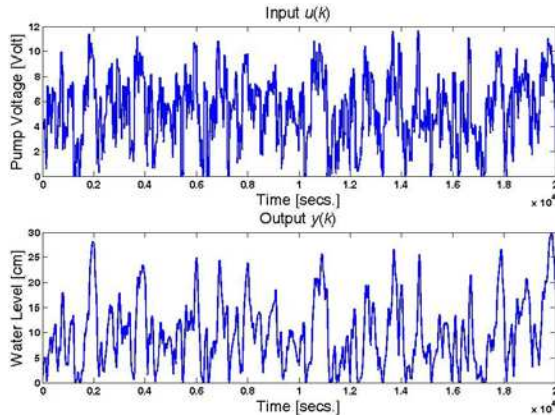
$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{k_1 \text{sign}(h_1 - h_2) \sqrt{|h_1 - h_2|} - k_2 \sqrt{h_2}}{A_2}. \tag{4}$$

Kualitas hasil identifikasi tergantung salah satunya kepada sinyal uji masukan yang diberikan kepada sistem. Sinyal uji masukan pada sistem tangki terhubung harus mencakup informasi yang cukup di area ketinggian rendah hingga tinggi. Agar sinyal uji masukan cukup memberikan eksitasi pada sistem pada keseluruhan rentang titik kerja dan frekuensi, maka sinyal uji yang dipilih untuk simulasi sistem tangki terhubung merupakan kombinasi antara sinyal sinusoid multi frekuensi dan sinyal derau putih. Penambahan sinyal derau putih beramplitudo rendah pada sinyal sinusoid multi frekuensi ditujukan untuk memastikan kecukupan eksitasi pada dinamika sistem. Persamaan matematis sinyal masukan untuk sistem tangki terhubung diberikan oleh persamaan (5).

$$v(t)_{pump} = \left\{ \sin\left(\frac{0.02}{\pi}t\right) \times 1.5 \sin\left(\frac{0.2}{\pi}t + 90\right) \right\} + \dots + 2 \sin\left(\frac{0.02}{\pi}t + 90\right) + 1(t) + e(t) \tag{5}$$



Gambar 1. Konfigurasi sistem tangki terhubung



Gambar 2. Masukan $u(k)$ dan keluaran $y(k)$ yang digenerasi dari simulasi sistem tangki terhubung

Data sinyal uji masukan dan sinyal keluaran hasil simulasi diperlihatkan pada Gambar 2.

Struktur model yang digunakan untuk mendeskripsikan perilaku sistem tangki terhubung pada makalah ini adalah model *Nonlinear AutoRegressive with eXogenous input* (NARX):

$$\hat{y}(k+1) = F(y(k), \dots, y(k-n_y+1), u(k), \dots, u(k-n_u+1))$$

dimana k menyatakan waktu pencuplikkan diskrit, n_u dan n_y merupakan orde sistem, sedangkan F menyatakan bentuk fungsi pemetaan *fuzzy*. Struktur Model *Fuzzy TS* dapat ditentukan dengan memanfaatkan *priori knowledge*, yaitu jumlah variabel keadaan yang ada pada persamaan diferensial nonlinier. Dengan ketinggian fluida $h_1(t)$ pada tangki 1 dan $h_2(t)$ pada tangki 2 sebagai variabel keadaan, maka bentuk fungsi alih diskrit dari model keadaan sistem tangki terhubung dapat dipastikan memiliki orde 2. Untuk sistem tangki terhubung, model NARX membentuk relasi antara data masukan-keluaran lampau dan keluaran terprediksi:

$$\hat{y}(k) = F(y(k-1), y(k-2), u(k-1))$$

dengan F adalah model fungsi pemetaan *Fuzzy*.

Karena bagian konsekuen model *fuzzy TS* berupa model linier lokal, maka penentuan parameter premis dan konsekuen menjadi permasalahan regresi statik nonlinier yang diaproksimasi oleh sekumpulan sub-model linier lokal. Area dan parameter masing-masing sub-model ditentukan dengan mempartisi data kedalam *cluster* berbentuk hiperelipsoidal. Pengelompokan data kedalam sejumlah *cluster* dilakukan oleh algoritma Gustafson-Kessel dengan meminimumkan fungsi objektif

$$J(\mathbf{Z}; \mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{A}) = \sum_{j=1}^c \sum_{k=1}^N (\mu_{ik}^{(j)})^m D_{ikA_j}^2, \quad (6)$$

dengan matriks \mathbf{Z} , \mathbf{U} , \mathbf{V} , dan \mathbf{A} berturut-turut matriks

area hiperelipsoidal, matriks derajat keanggotaan, matriks titik tengah *cluster*, dan matriks variabel optimasi, kedalam langkah-langkah berikut [7]:

1. Hitung titik tengah *cluster*, \mathbf{v}_i :

$$\mathbf{v}_i^{(l)} = \frac{\sum_{k=1}^N (\mu_{ik}^{(l-1)})^m \mathbf{z}_k}{\sum_{k=1}^N (\mu_{ik}^{(l-1)})^m} \quad (7)$$

2. Hitung matriks kovarians *cluster*:

$$\mathbf{F}_i = \frac{\sum_{k=1}^N (\mu_{ik}^{(l-1)})^m (\mathbf{z}_k - \mathbf{v}_i^{(l)}) (\mathbf{z}_k - \mathbf{v}_i^{(l)})^T}{\sum_{k=1}^N (\mu_{ik}^{(l-1)})^m} \quad (8)$$

3. Hitung jarak \mathbf{z}_k dari titik tengah *cluster*:

$$D_{ikA_i}^2 = (\mathbf{z}_k - \mathbf{v}_i^{(l)})^T [\rho_i \det(\mathbf{F}_i)]^{1/n} \mathbf{F}_i^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{v}_i^{(l)}) \quad (9)$$

4. Perbaharui matriks partisi:

$$\mu_{ik}^{(l)} = \frac{1}{\sum_{j=1}^c (D_{ikA_j} / D_{ikA_i})^{2/(m-1)}} \quad (10)$$

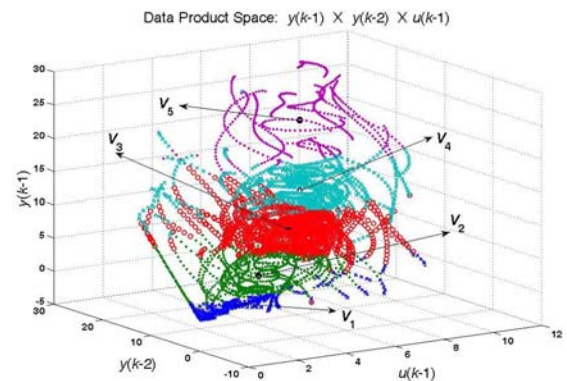
hingga $\|\mathbf{U}^{(l)} - \mathbf{U}^{(l-1)}\| < \varepsilon$.

Gambar 3 menunjukkan hasil pengelompokan data masukan dan keluaran sistem tangki terhubung kedalam lima *cluster* dengan menggunakan algoritma Gustafson-Kessel. Orientasi dan bentuk hiperelipsoid masing-masing *cluster* ditunjukkan oleh nilai *eigenvector* dan *eigenvalue* dari masing-masing *cluster* seperti terlihat pada Tabel 2.

Fungsi keanggotaan multi-variabel dari lima *cluster* yang diperoleh kemudian diproyeksikan orthogonal kedalam bentuk uni-variabel dari masing-masing variabel premis, yaitu terhadap sumbu $y(k-2)$, $y(k-1)$ dan $u(k-1)$, untuk membentuk lima fungsi keanggotaan seperti terlihat pada Gambar 4.

Bagian konsekuen model *fuzzy Takagi-Sugeno* merupakan model linier lokal berupa model *Auto Regressive eXogenous*:

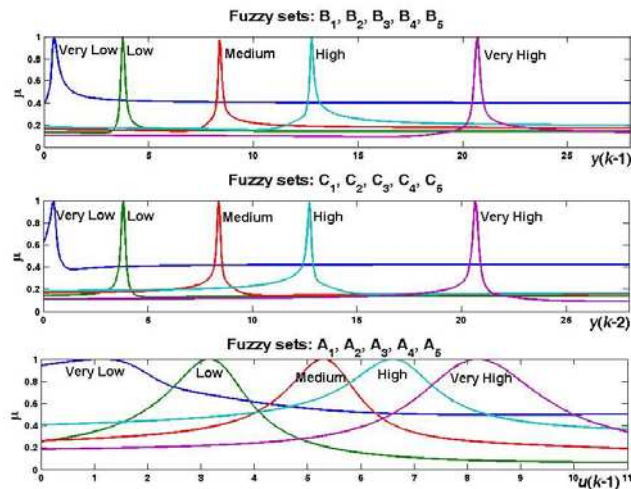
$$\begin{aligned} y_i(k+1) &= -a_{i1}y(k) - \Lambda + a_{(n+1)i}u(k) + \Lambda + b_i \\ &= \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}_i + b_i \end{aligned} \quad (11)$$



Gambar 3. Data masukan-keluaran dengan lima *cluster*

Tabel 2. Data nilai center, eigenvector, dan eigen value masing-masing cluster

cluster	Center			Eigenvector [ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3]	Eigenvalue [$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$]
	$u(k-1)$	$y(k-2)$	$y(k-1)$		
# 1	1.1333	0.4971	0.48086	$\begin{bmatrix} 0.3895 & 0.5548 & 0.7352 \\ 0.3703 & 0.6365 & -0.6766 \\ 0.8433 & -0.5357 & -0.0425 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.5907 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5005 & 0 \\ 0 & 0 & 0.002 \end{bmatrix}$
# 2	3.1573	3.8216	3.7705	$\begin{bmatrix} 0.6916 & 0.0204 & 0.7220 \\ 0.7129 & 0.1409 & -0.6870 \\ 0.1157 & -0.9898 & -0.0830 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.72255 & 0 & 0 \\ 0 & 1.7669 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0011 \end{bmatrix}$
# 3	5.2934	8.3933	8.4024	$\begin{bmatrix} 0.6946 & 0.0705 & 0.7159 \\ 0.7189 & -0.0328 & -0.6943 \\ -0.0255 & 0.9970 & 0.0735 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8.5688 & 0 & 0 \\ 0 & 1.7832 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0018 \end{bmatrix}$
# 4	6.5965	12.731	12.78	$\begin{bmatrix} 0.7013 & 0.0387 & 0.7118 \\ 0.7128 & 0.0404 & -0.7002 \\ 0.0017 & 0.9984 & -0.0560 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10.4934 & 0 & 0 \\ 0 & 2.1027 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0026 \end{bmatrix}$
# 5	8.1906	20.665	20.693	$\begin{bmatrix} 0.7018 & -0.0248 & 0.7119 \\ 0.7039 & -0.1292 & -0.6984 \\ 0.1093 & 0.9913 & -0.0732 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 29.8604 & 0 & 0 \\ 0 & 2.4211 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0021 \end{bmatrix}$



Gambar 4. Fuzzy sets parameter premis

Karena hubungan diantara parameter a_i dan b_i linier, maka metode *least-square* dapat digunakan untuk mengestimasi parameter konsekuen $[a_i^T, b_i]$ berdasarkan derajat keanggotaan dari masing-masing cluster:

Jika matriks y_i merupakan vektor keluaran dan X_i merupakan matriks yang berisi data keluaran lampau

pada cluster ke- i , maka nilai vektor parameter θ_i dinyatakan dalam persamaan analitik di bawah ini:

$$\theta_i = [X_i^T U_i X_i]^{-1} X_i^T U_i y_i \quad (12)$$

Tabel 3 memperlihatkan hasil estimasi parameter konsekuen dari model *fuzzy* Takagi-Sugeno untuk

Tabel 3. Hasil estimasi parameter konsekuen

Parameter Konsekuen	Affine Takagi-Sugeno Model				
	R1	R2	R3	R4	R5
a_{i1}	1.38	1.62	1.7	1.93	1.86
a_{i2}	-0.44	-0.64	-0.71	-0.93	-0.87
a_{i3}	0.055	0.045	0.035	0.01	0.015
b_i	-0.0157	-0.085	-0.108	-0.035	-0.043

sistem tangki terhubung yang dihitung dengan menggunakan algoritma *least-squares*.

Berdasarkan hasil *clustering* dan estimasi parameter konsekuen, maka model *fuzzy* Takagi-Sugeno dengan lima aturan untuk sistem tangki terhubung adalah sebagai berikut :

1. If $y(k-1)$ is very Low and $y(k-2)$ is very Low and $u(k-1)$ is very Low then $\hat{y}(k) = 1.3770 y(k-1) - 0.4419 y(k-2) + \dots + 0.0547 u(k-1) - 0.0157$
2. If $y(k-1)$ is Low and $y(k-2)$ is Low and $u(k-1)$ is Low then $\hat{y}(k) = 1.6242 y(k-1) - 0.6417 y(k-2) + \dots + 0.0454 u(k-1) - 0.0854$
3. If $y(k-1)$ is Medium and $y(k-2)$ is Medium and $u(k-1)$ is Medium then $\hat{y}(k) = 1.6974 y(k-1) - 0.7060 y(k-2) + \dots + 0.0347 u(k-1) - 0.1076$
4. If $y(k-1)$ is High and $y(k-2)$ is High and $u(k-1)$ is High then $\hat{y}(k) = 1.9298 y(k-1) - 0.9323 y(k-2) + \dots + 0.0099 u(k-1) - 0.0350$
5. If $y(k-1)$ is very High and $y(k-2)$ is very High and $u(k-1)$ is very High then $\hat{y}(k) = 1.8619 y(k-1) - 0.8653 + 0.0146 u(k-1) - 0.0432$

3. Hasil dan Pembahasan

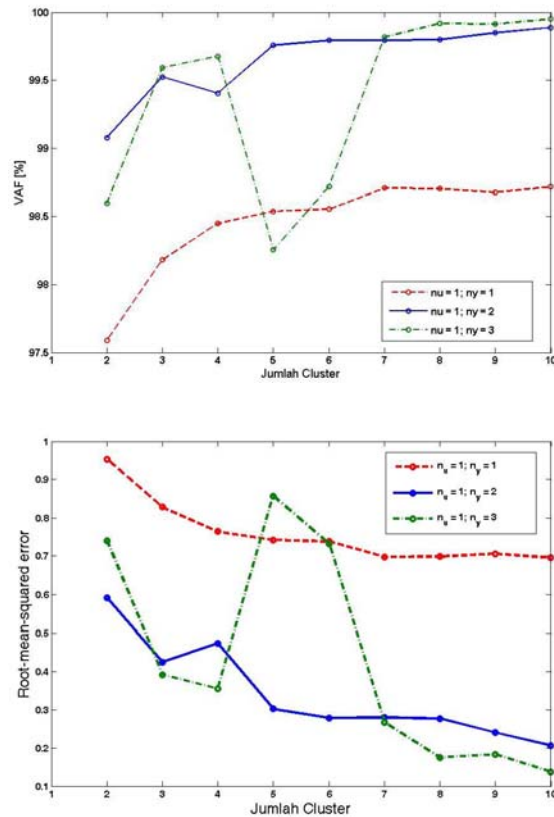
Validasi Model *Fuzzy* Takagi-Sugeno. Tujuan dari validasi model adalah untuk memverifikasi kemiripan antara model yang didapat dengan perilaku sifat nonlinier dari sistem tangki terhubung. Indikator kinerja kuantitatif dalam validasi model dalam permasalahan ini adalah *variance accounted for* (VAF) dan *root mean square* (RMS), yang dinyatakan dalam persamaan berikut ini:

$$VAF = 100\% \times \left[1 - \frac{\text{var}(\hat{y}(k) - y(k))}{\text{var}(\hat{y}(k))} \right] \quad (13)$$

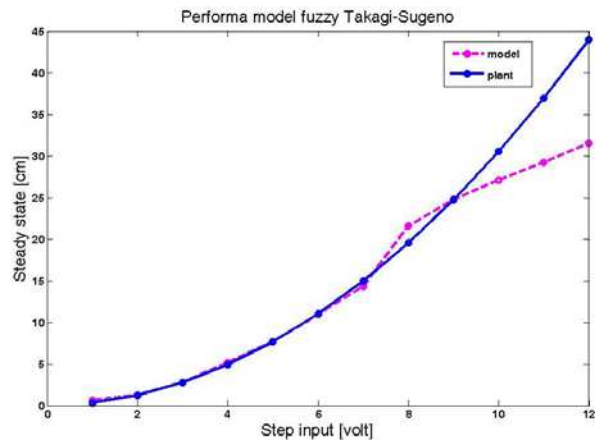
$$RMS = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (\hat{y}(k) - y(k))^2}{N}} \quad (14)$$

Gambar 5 menunjukkan performa model *fuzzy* Takagi-Sugeno untuk sistem tangki terhubung dengan struktur model yang berbeda, yaitu orde-1, orde-2, dan orde-3, dengan penetapan jumlah *cluster*, $c = 1, 2, 3, \dots, 10$,

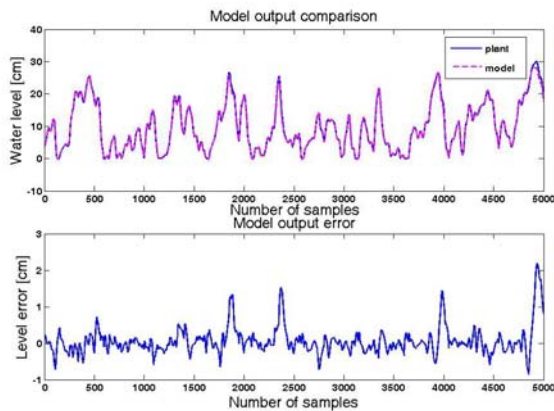
untuk setiap struktur model. Seperti terlihat pada gambar, bahwa performa model *fuzzy* Takagi-Sugeno dengan struktur model orde-2 merupakan struktur model yang menghasilkan performa yang terbaik dengan nilai VAF=99.6582% dan RMS = 0.4277, hal ini sesuai dengan orde fungsi alih waktu diskrit sistem tangki terhubung.



Gambar 5. Kinerja model *Fuzzy* TS



Gambar 6. Kinerja model terhadap masukan fungsi *step*



Gambar 7. Validasi model fuzzy TS sistem tangki terhubung dengan data lain

Pemberian masukan fungsi *step* dengan amplitudo berubah dari 1 Volt, 2 Volt, ..., 12 Volt pada model Takagi-Sugeno untuk sistem tangki terhubung, dapat memberikan informasi mengenai kemampuan suatu model untuk menyamai karakteristik sistem, seperti galat tunak. Gambar 6 menunjukkan perbandingan respons antara model fuzzy Takagi-Sugeno dan sistem tangki terhubung. Terlihat bahwa model yang didapat mampu menyamai perilaku proses sampai dengan masukan fungsi *step* bernilai 9 Volt, sedangkan untuk masukan yang lebih besar dari 9 Volt galat tunak yang terjadi semakin besar. Galat terbesar dimiliki oleh model pada *cluster* ke-5. Hal ini terjadi karena untuk nilai masukan disekitar titik tengah *cluster* kelima, yaitu 8.1906 Volt, memiliki data yang lebih sedikit bila dibandingkan dengan *cluster* yang lainnya, sehingga menyebabkan estimasi parameter untuk *cluster* kelima memiliki bias terbesar.

Untuk melihat kehandalan model dilakukan teknik validasi silang. Metode validasi silang berguna untuk menguji objektivitas suatu model sehingga tidak hanya menunjukkan performa keluaran yang baik bila dibandingkan dengan data yang digunakan pada saat

identifikasi, akan tetapi model juga harus menunjukkan performa yang baik pada saat diuji dengan menggunakan kumpulan data lain yang belum pernah digunakan dalam proses identifikasi. Gambar 7 menunjukkan performa model fuzzy Takagi-Sugeno dengan menggunakan data lain yang belum pernah digunakan dalam identifikasi sistem tangki terhubung. Pada gambar terlihat bahwa model mampu menyamai sifat nonlinier sistem tangki sampai ketinggian 15 cm, hal ini dikarenakan kurangnya data untuk estimasi parameter konsekuen pada aturan ke-5 bila dibandingkan dengan jumlah data pada *cluster* ke-4, ke-3 dan ke-2.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil uji simulasi identifikasi dan validasi model fuzzy Takagi-Sugeno yang dilakukan, maka dapat disimpulkan bahwa model fuzzy Takagi-Sugeno untuk sistem tangki terhubung dengan lima aturan dan struktur *autoregressive exogenous* orde-2 pada bagian konsekuen, memiliki kinerja yang mampu menyamai karakteristik nonlinier sistem tangki terhubung, yaitu dengan nilai kinerja model VAF = 99.6582% dan RMS = 0.4277.

Daftar Acuan

- [1] R. Babuska, *Fuzzy Modeling for Control*, Kluwer Academic Publisher, Boston, 1998.
- [2] M. Sugeno, T. Yasukawa, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems* 1 (1993) 7.
- [3] R. Babuska, H. Verbruggen, *Proceeding European Control Conference*, Rome, Italy, 1995, p. 1207.
- [4] K.J. Astrom, B. Wittenmark, *Adaptive Control*, Addison-Wesley, New York, 1989.
- [5] K. Narendra, J. Balakrishnan, M. Ciliz, *IEEE Trans. on Control Systems*, 15 (1995) 37.
- [6] L. Ljung, *System Identification: Theory for the User*, Prentice Hall, New Jersey, 1987.
- [7] D. Gustafson, W. Kessel, *Proceeding IEEE CDC*, San Diego, USA, 1979, p. 761.