PENYELESAIAN SISTEM DESKRIPTOR KONTINU

Siskha Handayani
STKIP PGRI Sumatera Barat
Email: siskhandayani@yahoo.com

Abstrak. Dalam penelitian ini akan dibahas penyelesaian dari sistem deskriptor kontinu berikut:

$$E\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), \quad y(0) = y_0$$

dimana $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,$B \in \mathbb{R}^{n\times p}$,$y \in \mathbb{R}^n$,$u \in \mathbb{R}^p$, dan $t \in [0,\infty)$, dengan mengasumsikan bahwa E adalah matriks *singular* dan $det(sE - A) \neq 0$ untuk suatu $s \in \mathbb{R}$..

Kata kunci: *Transformasi Laplace, Singular, Similar, Matriks Jordan, Nilpotent*

A. PENDAHULUAN

Pertimbangkan sistem kontrol linier kontinu berikut :

$$E\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), \qquad y(0) = y_0(1)$$

dimana $E, A \in \mathbb{R}^{nxn}, E$ merupakan matrik singular, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}, y \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^p$ dan $t \in [0,\infty)$.Dalam persamaan (1), $y \in \mathbb{R}^n$ menyatakan vektor keadaan, $u \in \mathbb{R}^p$ menyatakan vektor kontrol (input) dan $\mathbb{R}^{n\times p}$ menyatakan himpunan matriks riil berukuran $n \times p$. Sistem kontrol linier (1) sering disebut sebagai sistem deskriptor kontinu [3]. Jika matriks E*nonsingular*, maka sistem (1) dapat ditulis menjadi

$$\dot{y}(t) = \bar{A}y(t) + \bar{B}u(t), \qquad y(0) = y_0$$

dengan $\bar{A} = E^{-1}A$ dan $\bar{B} = E^{-1}B$.

Jelas bahwa sistem deskriptor linier merupakan perumusan dari sistem kontrol linier biasa seperti yang terdapat dalam literatur klasik [7].

Sistem (1) disebut *regular* jika $det(sE - A) \neq 0$ untuk suatu $s \in \mathbb{R}$, dan sebaliknya dikatakan *non regular*.Untuk matriks E*nonsingular*, penyelesaian sistem (1) dengan mudah dapat diperoleh, yaitu

$$y(t) = e^{\bar{A}t}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)\bar{A}}\,\bar{B}u(s)ds,$$

tetapi tidak demikian halnya jika E adalah matriks *singular*.

Penelitian ini akan mengkonstruksi penyelesaian sistem deskriptor (1) dengan asumsi bahwa E adalah matriks *singular* dan $det(sE - A) \neq 0$ untuk suatu $s \in \mathbb{R}$.

Beberapa pembatasan yang diperlukan adalah sebagai berikut :

1. Matriks-matriks koefisien dan sistem deskriptor adalah bernilai riil. Matriks E dan A kedua-duanya adalah *singular* atau A*nonsingular* dan E*singular* tetapi tidak nilpotent.
2. Sistem deskriptor (1) adalah *regular*, yakni $det(sE - A) \neq 0$ untuk suatu $s \in \mathbb{R}$.
3. Vektor keadaan $y(t)$ dapat diturunkan sebanyak m kali, dan vektor kontrol $u(t)$ dapat diturunkan sebanyak $m - 1$ kali.

B. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah analisis teori-teori dasar yang diperlukan untuk mendapatkan penyelesaian dari sistem deskriptor kontinu (1) yang dibahas berlandaskan pada kajian kepustakaan, seperti beberapa definisi tentang matriks, matriks *Jordan*, matriks nilpotent, Transformasi Laplace, sistem persamaan linear differensial *nonhomogen*.

Adapun langkah-langkah kerja yang dilakukan adalah : 1) Menentukan bentuk sistem deskriptor (1) setelah ditransformasi Laplace, 2) Menentukan syarat cukup agar sistem deskriptor (1) dapat diselesaikan secara tunggal, 3) Membuktikan teorema dengan menggunakan teori-teori yang diperlukan.

C. HASIL DAN PEMBAHASAN

Perhatikan kembali sistem deskriptor kontinu (1) beserta asumsi-asumsi yang diberikan. Dengan menggunakan transformasi Laplace terhadap kedua ruas persamaan (1) diperoleh

$$E[s\hat{y}(s) - y(0)] = A\hat{y}(s) + B\hat{u}(s),$$

atau dapat ditulis menjadi

$$(sE - A)\hat{y}(s) = Ey(0) + B\hat{u}(s), \tag{2}$$

dimana $\hat{y}(s)$ adalah transformasi Laplace dari $y(t)$ dan$\hat{u}(s)$ adalah transformasi Laplace dari $u(t)$. Jelas bahwa solusi persamaan (2) ada dan tunggal, apabila $(sE - A)$ punya invers, atau $(sE - A)^{-1}$ ada. Ini memberikan

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{y}(s)\},$$

dimana $\mathcal{L}^{-1}$adalah transformasi Laplace invers dari $y(s)$.

Fakta ini memperlihatkan bahwa syarat cukup agar sistem deskriptor (1) dapat diselesaikan secara tunggal adalah $\det(sE - A) \neq 0$ untuk suatu $s \in \mathbb{R}$

Teorema 3.1

Sistem deskriptor (1) dapat diselesaikan secara tunggal jika dan hanya jika ada matriks *nonsingular* P dan$Q$ sehingga (1) tereduksi ke bentuk berikut

$$\dot{x}_1(t) = E_1x_1(t) + B_1u(t)(3)$$
$$E_2\dot{x}_2(t) = x_2(t) + B_2u(t)$$

dengan $PEQ = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix}, PAQ = \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}, PB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Q^{-1}y, E_2^m = 0, E_2^{m-1} \neq 0$, untuk suatu m.

Proses pembuktian Teorema (3.1) berkaitan erat dengan lemma berikut ini.

Lemma 3.2

Misalkan $s_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, p$memenuhi $det(sE - A) = 0,$ dan misalkan pula $det(cE - A) \neq 0$ untuk suatu $\in \mathbb{R}$. Maka nilai eigen matriks $(sE - A)^{-1}E$ hanyalah 0 dan $\frac{1}{(c-s_i)}, i = 1, \dots, p$ dengan $c \neq s_i$. Selanjutnya untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ dengan $\alpha \neq 0$ dan $\alpha \neq \frac{1}{(c-s_i)}, i = 1, \dots, p$ maka α bukan nilai eigen untuk matriks $(cE - A)^{-1}E$.

Bukti Teorema (3.1)

($\Longrightarrow$)Misalkan sistem (1) dapat diselesaikan secara tunggal, maka $det(sE - A) \neq 0$ untuk suatu $s \in \mathbb{R}$. Jadi ada $c \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $det(cE - A) \neq 0$. Misalkan $s_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, p$ memenuhi $det(sE - A) = 0$. Untuk setiap $s \in \mathbb{R}, s \neq s_i$, tuliskan

$$sE - A = (s - c)E + (cE - A) \qquad (4)$$

Kalikan kedua ruas persamaan (3.4) dengan $(cE - A)^{-1}$, diperoleh

$$(cE - A)^{-1}(sE - A) = (s - c)(cE - A)^{-1}E + I \ (5)$$

Berdasarkan definisi tentang matriks *similar,* maka matriks $(cE - A)^{-1}E$*similar* dengan tepat satu matriks *Jordan*. Akibatnya jika deg $det\ (sE - A) = n_1$, maka ada matriks *nonsingular*T yang memenuhi

$$(cE - A)^{-1}E = T \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} T^{-1}$$

dimana J_1 adalah matriks blok berukuran $n_1 \times n_1$ yang berkaitan dengan nilai eigen $\frac{1}{(c-s_i)}, i = 1, \dots, p$ dan J_2 adalah matriks blok berukuran $n_2 \times n_2$ yang berkaitan dengan nilai eigen 0. Akibatnya $det(J_1) \neq 0$ dan J_2 nilpotent. Dalam hal ini $n = n_1 + n_2$.

Sehingga persamaan (5) dapat ditulis sebagai

$$(cE - A)^{-1}(sE - A) = (s - c)T \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} T^{-1} + I \qquad (6)$$

atau

$$T^{-1}(cE - A)^{-1}(sE - A)T = (s - c) \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} + I$$

$$= \begin{bmatrix} (s-c)J_1 + I_1 & 0 \\ 0 & -(cJ_2 - I_2) + sJ_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

dimana $I = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}$. Kalikan kedua ruas persamaan (7) dengan matriks

$$\begin{bmatrix} J_1^{-1} & 0 \\ 0 & (cJ_2 - I_2)^{-1} \end{bmatrix},$$

maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} J_1^{-1} & 0 \\ 0 & (cJ_2 - I_2)^{-1} \end{bmatrix} T^{-1}(cE-A)^{-1}(sE-A)T = s\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

dengan $E_1 = cI_1 - J_1^{-1}$ dan $E_2 = (cJ_2 - I_2)^{-1}J_2$. Jelas bahwa, karena J_2 nilpotent maka E_2 juga nilpotent.

Misalkan $Q = T$, dan $P = \begin{bmatrix} J_1^{-1} & 0 \\ 0 & (cJ_2 - I_2)^{-1} \end{bmatrix} T^{-1}(cE-A)^{-1}$

Maka (7) dapat ditulis sebagai

$P(sE-A)Q = s\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}$, untuk setiap $s \neq s_i$

Dengan membandingkan kedua ruas persamaan terakhir, maka diperoleh

$PEQ = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix}$, dan $PAQ = \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}$

Dengan menuliskan PB sebagai $\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$, persamaan (1.1) dapat dituliskan kembali menjadi

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t)$$

yang ekivalen dengan persamaan (3).

($\Leftarrow$) Misalkan ada matriks *nonsingularP* dan Q sehingga (1) tereduksi ke bentuk (3), dengan

$$PEQ = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix},$$

dan

$$PAQ = \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}.$$

Maka $P(sE-A)Q = \begin{bmatrix} sI_1 - E_1 & 0 \\ 0 & sE_2 - I_2 \end{bmatrix}$(9)

dengan E_2 nilpotent. Persamaan (9) dapat ditulis

$$(sE-A) = P^{-1}\begin{bmatrix} sI_1 - E_1 & 0 \\ 0 & sE_2 - I_2 \end{bmatrix} Q^{-1}.$$

Akibatnya

$$det(sE-A) = det(P^{-1}) \cdot det(sI_1 - E_1) \cdot det(sE_2 - I_2) \cdot det \cdot (Q^{-1}).$$

Karena P dan Q*nonsingular*, maka $det(P^{-1}) \neq 0$ dan $det(Q^{-1}) \neq 0$. Karena $det(sI_1 - E_1)$ adalah polinom karakteristik dari matriks E_1, maka $det(sI_1 - E_1) = 0$ hanya untuk s yang merupakan nilai eigen dari matrik E_1. Sehingga $det(sI_1 - E_1) \neq 0$ untuk suatu $s \in \mathbb{R}$. Sedangkan $det(sE_2 - I_2) = (-1)^{n_2} \neq 0$ untuk setiap $s \in \mathbb{C}$. Akibatnya $det(sE - A) \neq 0$ untuk suatu $s \in \mathbb{R}$, Sehingga sistem deskriptor (1) dapat diselesaikan secara tunggal.■

Dengan memperhatikan kembali persamaan (3), dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa solusi persamaan pertama dapat ditulis sebagai berikut,

$$x_1(t) = e^{tE_1}x_1(0) + \int_0^t e^{(t-s)E_1}B_1u(s)\,ds. \qquad (10)$$

Selanjunya solusi persaman kedua dapat diperoleh dengan cara berikut ini. Turunkan persamaan kedua dari (3) terhadap t, kemudian kalikan dengan E_2, diperoleh

$$E_2^2x_2^{(2)}(t) = E_2x_2^{(1)}(t) + E_2B_2u^{(1)}(t). \qquad (11)$$

Dengan meneruskan proses ini, dan mengingat $E_2^m = 0$, maka hasil yang ke-m dapat dituliskan sebagai

$$0 = x_2(t) + B_2u(t) + E_2B_2u^{(1)}(t) + \cdots + E_2^{(m-1)}B_2u^{(m-1)}(t)$$

atau dapat ditulis

$$x_2(t) = -\sum_{i=0}^{m-1} E_2^iB_2u^{(i)}(t), \qquad (12)$$

dimana $x^{(i)}, u^{(i)}$ menyatakan turunan ke-i dari x dan u. Sehingga solusi persamaan kedua dari (3) diberikan oleh persamaan (12). Karena $x = Q^{-1}y$, maka solusi sistem deskriptor (1) adalah $y = Q\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, dengan x_1 dan x_2 diberikan oleh persamaan (10) dan (12).

Contoh Pemakaian

1. Jika diketahui sistem deskriptor

$$E\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), \qquad y(0) = y_0$$

dengan $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Carilah penyelesaian dari sistem tersebut

Penyelesaian :

$$\det(sE - A) = det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

$$= -s$$

Sistem dapat diselesaikan secara tunggal karena $\det(sE - A) \neq 0$ untuk $s \in \mathbb{R}, s \neq 0$. Jadi ada $c \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $\det(cE - A) \neq 0$. Ambil $s_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, p$ yang memenuhi $det(sE - A) = 0, s = 0$. Untuk suatu $s \in \mathbb{R}, s \neq s_i$, tuliskan

$$sE - A \quad = (s - c)E + (cE - A).$$

Kalikan kedua ruas persamaan ini dengan $(cE - A)^{-1}$, diperoleh

$$(cE - A)^{-1}(sE - A) \quad = (s - c)(cE - A)^{-1}E + I.$$

Berdasarkan definisi tentang matriks *similar*, maka matriks $(cE - A)^{-1}E$*similar* dengan tepat satu matriks *Jordan* yaitu

$$(cE - A)^{-1}E = T\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}T^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1/c \\ 0 & 1/c \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} 1/(c) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}T^{-1}.$$

Dengan mempertukar kolom matriks T1 yang dicari dengan menggunakan MATLAB 7.0.1, maka diperoleh

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ambil $Q = T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

dan

$$P = \begin{bmatrix} J_1^{-1} & 0 \\ 0 & (cJ_2 - I_2)^{-1} \end{bmatrix}T^{-1}(cE - A)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{c} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & c \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{c} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Maka diperoleh

$PEQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dan $PAQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $PB = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Sistem dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u(t).$$

Sehingga diperoleh

$$\dot{x}_1(t) = u(t)$$
$$0 = x_2(t) + u(t)$$

maka penyelesaianya adalah

$$x_1(t) = e^{tE_1} x_1(0) + \int_0^t e^{(t-s)E_1} u(s)\, ds$$
$$= x_1(0) + \int_0^t e^0 u(s)\, ds$$
$$= x_1(0) + \int_0^t u(s)\, ds$$

dan

$$x_2(t) = -u(t).$$

Misalkan $u(t) = e^{-t}$ maka diperoleh

$$x_1(t) = x_1(0) + \int_0^t u(s)\, ds, \qquad x_1(0) = 0$$
$$= x_1(0) + \int_0^t e^{-s}\, ds$$
$$= 0 + \int_0^t e^{-s}\, ds$$
$$= (-e^{-s}) \Big|_0^t$$
$$= -e^{-t} + 1$$
$$= 1 - e^{-t}$$
$$x_2(t) = -e^{-t}.$$

Sehingga $y(t) = Q \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 - e^{-t} \end{bmatrix}.$$

D. KESIMPULAN

Dari pembahasan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa eksistensi dan ketunggalan penyelesaian dari sistem deskriptor kontinu (1) dijamin jika ada matriks *nonsingularP* dan Q sedemikian sehingga sistem deskriptor kontinu (1) dapat direduksi menjadi sistem (3).

Jika x_1 dan x_2 adalah solusi dari sistem (3), maka solusi sistem deskriptor kontinu (1) dinotasikan sebagai

$$y(t) = Q\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

DAFTAR PUSTAKA

1. *Anton, Howard. 1987. Aljabar Linier Elementer.5th edition, Erlangga. Jakarta*
2. *Cullen, Charles G. 1991. Linear Algebra and Differential Equation. Second edition*
3. *Elizabeth L. Yip and Richard F. Sincoveec. 1981. Solvability, Controllability, and Observability of Continuous Descriptor System. IEEE Transactions on Automatic Control.702-703*
4. *Finizio N. dan G. Ladas. 1988. Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern. Edisi kedua. Erlangga. Jakarta*
5. *Gantmatcher, F.R. 2000. The Theory of Matrices. Volume one. Ams Chelsea Publishing. Providence Rhode Island*
6. *Jacob, Bill. 1990. Linear Algebra. W. H, Freeman And Company, New York*
7. *Kaczorek, T. 1992. Linear ControL System. Volume one-Analysis Of Multivariable System. Warsaw University of Technology,Poland*
8. *Noble, Ben and Daniel. J. W. 1988. Applied Linear Algebra 3rd edition. Prentice-Hall. New Jersey.*