

# Optimasi Produksi dan Distribusi di Perusahaan Gas Cair dengan Menggunakan *Linear Programming* dan Algoritma *Cross Entropy*

Yulia, dan Moses L. Singgih

Teknik Industri, Fakultas Teknologi Industri, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)

Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111

*E-mail:* moseslsinggih@gmail.com

**Abstrak**— Banyak industri telah mengalami peningkatan atau perbaikan pada sistem produksi dan distribusi melalui *global supply chain management*. Sampai saat ini pun, masalah integrasi optimasi sistem produksi dan distribusi demi perbaikan kedua sistem tersebut masih menjadi tantangan bagi dunia industri, termasuk industri kimia. Oleh sebab itu, dilakukan penelitian optimasi kedua sistem tersebut. Untuk pengoptimalan sistem produksi, dilakukan pendekatan dengan *linear programming*. Sedangkan untuk pengoptimalan sistem distribusi menggunakan algoritma *cross entropy*. Pengoptimalan sistem distribusi dilakukan dengan mempertimbangkan jumlah permintaan dan jumlah produk yang dihasilkan oleh pihak produksi. Hasil yang didapatkan setelah penggunaan pendekatan ini adalah terdapat peningkatan profit yang cukup signifikan.

**Kata Kunci**—*linear programming, cross entropy, production, distribution*

## I. PENDAHULUAN

BANYAK industri telah mengalami peningkatan atau perbaikan pada sistem produksi dan distribusinya melalui *global supply chain management* [1]. Sampai saat ini pun, masalah integrasi optimasi sistem produksi dan distribusi demi perbaikan kedua sistem tersebut masih menjadi tantangan bagi dunia industri, termasuk industri kimia [2], yang dalam hal ini dialami juga oleh sebuah perusahaan gas cair di Jawa Timur.

Meningkatnya aktivitas perusahaan secara kompleks baik dari produksi maupun distribusi mendorong perusahaan untuk melakukan pengoptimalan di sistem produksi dan distribusinya. Berdasarkan permasalahan tersebut, diharapkan dari sistem produksinya didapatkan penentuan jumlah produk yang optimal diproduksi di masing-masing pabrik sehingga meningkatkan *profit* dan meminimumkan inventori; dan dari sistem distribusinya didapatkan rute atau jarak tempuh yang diminimalkan sehingga biaya distribusi perusahaan dapat diminimalisasi.

Banyak penelitian terdahulu yang telah dilakukan untuk meningkatkan atau mengoptimalkan sistem produksi dan distribusi. Akan tetapi banyak penelitian tersebut mengoptimalkan sistem produksi dan distribusi secara terpisah. Hubungan atau keterkaitan antara produksi dan distribusi menerima perhatian yang kurang bila dibandingkan dengan pengoptimalan atau perbaikan sistem produksi dan distribusi secara terpisah [3]. Padahal dalam permasalahan sebenarnya (*real problem*), sistem produksi dan distribusi

saling berkaitan satu sama lain demi meningkatkan *competitive advantage* perusahaan. Oleh sebab itu, penelitian-penelitian sekarang sudah mulai memikirkan cara melakukan integrasi optimasi produksi dan distribusi.

Sejumlah studi penelitian telah melakukan perkembangan perencanaan integrasi produksi dan distribusi dalam konteks *supply chain*. Penelitian yang dilakukan [4] menggunakan *deterministic model* untuk mengoptimalkan produksi dan distribusi, serta inventori dan distribusi. Selanjutnya, penelitian yang dilakukan [5] adalah mengintegrasikan sistem produksi dan distribusi dengan mempertimbangkan faktor ketidakpastian *demand*. Akan tetapi, dalam penelitian tersebut tidak dipertimbangkan masalah inventori. Kemudian, penelitian yang dilakukan [6] dengan menggunakan simulasi dan matematik optimasi untuk mengintegrasikan sistem produksi, distribusi, dan inventori. Hasil yang didapatkan dari penelitian ini menunjukkan hasil yang baik dengan adanya pengurangan biaya operasional perusahaan yang cukup signifikan.

Dalam penelitian ini, akan dicoba menggunakan pendekatan lain untuk mengintegrasikan masalah produksi dan distribusi tersebut, yaitu dengan mempertimbangkan inventori, produksi, dan distribusi dengan metode *linear programming* dan *cross entropy*. Hal yang mendorong penelitian ini juga adalah penelitian yang dilakukan oleh Chandra dan Fisher (1994) [7] yang juga mengoptimalkan produksi dan distribusi untuk satu pabrik dan banyak variasi produk yang dihasilkan. Dari penelitian Chandra dan Fisher (1994) [7] didapatkan hasil *global costs* dapat diturunkan.

Pada paper ini, akan dijelaskan beberapa hal, yaitu : di bagian 2 akan dijelaskan tentang *linear programming, capacitated vehicle routing problem (CVRP)*, algoritma *cross entropy*. Pada bagian 3 akan dijelaskan permodelan matematis. Pada bagian 4 akan dijelaskan hasil optimasi, analisa, dan interpretasi data. Pada bagian 5 akan diberikan kesimpulan dari penelitian ini.

## II. TINJAUAN PUSTAKA

### A. *Linear Programming*

*Linear programming* merupakan bentuk aplikasi yang umum dari *constrained optimization*. *Constrained optimization* lebih sulit bila dibandingkan *unconstrained optimization* sebab selain mencari solusi atau hasil yang

terbaik, diharuskan juga bisa memenuhi *constraint-constraint* yang ada [8].

Model *linear programming* memiliki tiga komponen dasar [9], yaitu :

1. *Decision variable* yang akan ditentukan dan dicari jumlahnya
2. *Objective goal* yang akan dioptimasi (*maximize* or *minimize*)
3. *Constraints* yang harus dipenuhi kondisi atau syaratnya oleh solusi yang dihasilkan Dengan memenuhi semua konstrain, solusi dikatakan *feasible*.

**B. Capacitated Vehicle Routing Problem (CVRP)**

*Vehicle Routing Problem* (VRP) adalah problem menentukan rute dari *k* kendaraan *independent* yang melayani setiap pelanggan  $i \in N = \{1, \dots, n\}$  di beberapa lokasi yang berbeda. Setiap kendaraan memiliki kapasitas angkut yang identik *C*, dan setiap pelanggan memiliki demand  $d_i$ . Tiap pelanggan dikunjungi tepat satu kali dan total demand tiap rute tidak boleh melebihi kapasitas angkut kendaraan. Dalam VRP setiap kendaraan berangkat dari suatu depot pusat {0}, dan kembali ke depot itu. Pengantaran dilakukan dengan ongkos total minimum dengan  $c_{ij} \geq 0$ , menunjukkan biaya angkut dari *i* ke *j*, untuk  $0 \leq i, j \leq n$ . Struktur biaya dianggap simetris, dimana  $c_{ij} = c_{ji}$  dan  $c_{ii} = 0$ .

Setiap customer *i* mempunyai demand  $d_i$  dan kendaraan dengan kapasitas *C* tersedia. Karena kapasitas kendaraan terbatas, maka kendaraan harus secara periodik kembali ke depot untuk *reloading*. Tidak diperbolehkan untuk membagi *delivery* ke customer.

Sejauh ini pendekatan yang dipakai adalah pendekatan heuristik atau metaheuristik untuk mencari solusi berupa rute yang optimal atau mendekati optimal. Hal tersebutlah yang menyebabkan VRP sering disebut sebagai permasalahan k-TSP. Masalah TSP maupun VRP termasuk dalam kategori *NP-Hard Problem*, yang berarti waktu komputasi yang digunakan akan semakin tinggi seiring dengan meningkatnya ukuran (*size*) dari masalah. Dalam hal semakin banyak pelanggan yang dikunjungi, semakin tinggi ukuran permasalahannya. Tujuan yang ingin dicapai dalam penyelesaian problem VRP adalah meminimalkan total jarak tempuh dan meminimalkan jumlah kendaraan yang digunakan dengan tetap memenuhi demand di setiap lokasi.

**C. Cross Entropy**

Metode *Cross entropy* (CE) diawali dengan algoritma *adaptive* untuk mengestimasi probabilitas dari kejadian langka (*rare event*) pada jaringan stokastik yang kompleks, yang melibatkan minimasi variansi. Selanjutnya, disadari bahwa modifikasi sederhana *cross-entropy* dapat digunakan tidak hanya untuk mengestimasi probabilitas kejadian langka (*rare event*), tetapi juga untuk menyelesaikan permasalahan optimasi kombinatorial yang kompleks.

Metode CE melibatkan prosedur iterasi, dimana tiap iterasi dapat dipecah menjadi dua fase:

1. Mengeneralisasi sampel data random berdasarkan mekanisme spesifik.

2. Memperbaharui parameter dari mekanisme random berdasarkan data untuk menghasilkan sampel yang lebih baik pada iterasi berikutnya.

Algoritma utama CE untuk optimasi adalah sebagai berikut.

1. Pilih  $\hat{v}_0 = u$ . Tetapkan  $t=1$ .
2. Bangkitkan sampel random  $X_1, \dots, X_N$  dari fungsi densitas  $f(-; \hat{v}_{t-1})$  dan hitung sampel  $(1-\rho)$ -quantile  $\hat{y}_t$  dari ukuran performansi ;  $\hat{y}_t = S_{((1-\rho)N)}$
3. Gunakan sampel yang sama dan selesaikan program stokastik dengan  $W = 1$ . Catat solusinya sebagai  $\hat{v}_t$

$$\max_v D(v) = \max_v \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{\{S(X) \geq \rho\}} W(X; u, u_{t-1}) \ln f(X; v) \tag{15}$$

4. Gunakan untuk lebih membuat *smooth* vektor  $\hat{v}_t$

$$\hat{v}_t = \alpha \hat{v}_t + (1 - \alpha) \hat{v}_{t-1}$$

5. Jika untuk beberapa  $t \geq d$ , misalnya  $d=5$ ,

$$\hat{y}_t = \hat{y}_{t-1} = \dots = \hat{y}_{t-d}$$

maka hentikan iterasi (nyatakan *T* sebagai iterasi terakhir). Namun jika tidak terpenuhi, tetapkan  $t = t + 1$  dan ulangi iterasi mulai dari langkah 2. Perlu dicatat bahwa *stopping criterion*, vektor awal  $\hat{v}_0$ , ukuran sampel *N* dan nilai  $\rho$  harus dinyatakan secara spesifik dari awal.

**III. PERMODELAN**

Berikut ini akan diberikan model matematis yang dibuat untuk permasalahan optimasi produksi dan distribusi ini.

**Notasi**

<i>i</i>	<i>Products</i>
<i>m</i>	<i>Plants</i>
<i>p</i>	<i>Distribution center</i>
<i>t</i>	<i>Time periods</i>
<i>k</i>	<i>Transportation</i>
<i>c</i>	<i>Customer</i>

**Parameter**

$TC_{kmp}$	Biaya transportasi sejumlah produk dengan menggunakan kendaraan <i>k</i> dari pabrik <i>m</i> ke DC <i>p</i>
$TC_{kpc}$	Biaya transportasi sejumlah produk dengan menggunakan kendaraan <i>k</i> dari DC <i>p</i> ke konsumen <i>c</i>
$INV_{t,ip}$	Jumlah akhir inventori produk <i>i</i> di DC <i>p</i> pada periode <i>t</i>
$A_{t,imp}$	Jumlah produk <i>i</i> yang dikirim dari pabrik <i>m</i> ke DC <i>p</i> pada periode <i>t</i>
$B_{t,ikpc}$	Jumlah produk <i>i</i> yang dikirim dengan menggunakan kendaraan <i>k</i> dari DC <i>p</i> ke konsumen <i>c</i>
$X_{t,im}$	Jumlah produk <i>i</i> yang diproduksi oleh pabrik <i>m</i> pada periode <i>t</i>
<i>Z</i>	Total profit yang dihasilkan
$E_p$	Total pengeluaran dari DC <i>p</i>

$Z_m$	Profit manufaktur yang dihasilkan oleh pabrik m
$\tilde{D}_{t,ic}$	Perkiraan jumlah permintaan ( <i>demand forecast</i> ) produk i di konsumen c pada periode t
$D_{t,ic}$	Jumlah permintaan aktual produk i di konsumen c pada periode t
$W_i$	Berat produk i yang diproduksi
$P_{im}$	Harga jual produk i di pabrik m
$H_p$	Biaya inventori untuk menyimpan satu buah produk di DC p selama sebuah periode
$C_{im}$	Biaya untuk memproduksi satu buah produk i di pabrik m
$PC_m$	Kapasitas produksi dari pabrik m
$SC_p$	Kapasitas penyimpanan produk di DC p
$CC_{mp}$	Kapasitas kendaraan yang digunakan untuk mengirim produk dari pabrik m ke DC p
$CC_{pc}$	Kapasitas kendaraan yang digunakan untuk mengirim produk dari DC p ke konsumen c
$R_{im}$	Penggunaan sumber daya produk i di pabrik m
$RC_m$	Kapasitas sumber daya yang digunakan di pabrik m
$WC_p$	Biaya operasional pendukung di DC p
n	Periode; t = 1,2,.....,n

**Decision Variables**

$A_{t,imp}$	Jumlah produk i yang dikirim dari pabrik m ke DC p pada periode t
$X_{t,im}$	Jumlah produk i yang diproduksi oleh pabrik m pada periode t

**Model Matematis**

a *Objective function*

$$Z_m = \sum_{t=1}^n \{ (\sum_i \sum_m \sum_t P_{im} X_{t,im}) - (\sum_i \sum_m \sum_t C_{im} X_{t,im}) - \sum_k \sum_m \sum_p TC_{kmp} - (\sum_t \sum_i \sum_p H_p INV_{t,ip}) \} \dots\dots\dots(1)$$

$$E_p = \sum_{t=1}^n \{ (\sum_k \sum_m \sum_p TC_{kmp}) + \sum_p WC_p \} \dots\dots\dots(2)$$

$$Z = \max (Z_m - E_p) \dots\dots\dots(3)$$

Persamaan 1 di atas menunjukkan model matematis fungsi tujuan profit manufaktur yang akan dihasilkan oleh pabrik. Adapun fungsi profit manufaktur tersebut adalah pendapatan penjualan produk dikurangi dengan biaya produksi produk di pabrik, biaya transportasi dari pabrik ke DC, dan biaya inventori yang terjadi di DC. Persamaan 2 di atas

menunjukkan fungsi total biaya pengeluaran di DC. Adapun fungsi total biaya pengeluaran di DC tersebut adalah total biaya transportasi produk dari DC ke konsumen ditambahkan dengan biaya operasional pendukung di DC. Persamaan 3 di atas menunjukkan fungsi total profit keseluruhan proses produksi dan distribusi yang dihasilkan. Adapun fungsi total profit keseluruhan yang dihasilkan adalah maksimasi dari profit manufaktur yang dikurangkan dengan total biaya pengeluaran di DC.

**b Constraints**

$$\sum_i \sum_m \sum_t X_{t,im} = \sum_t \sum_i \sum_p A_{t,imp} \quad \forall i, m, t, p \dots\dots\dots(4)$$

$$\sum_t \sum_i \sum_c D_{t,ic} = \sum_t \sum_i \sum_k B_{t,ikpc} \quad \forall i, p, c, t \dots\dots\dots(5)$$

$$\sum_t \sum_i \sum_p A_{t,imp} + \sum_i INV_{t-1,ip} - \sum_i \sum_k B_{t,ikpc} \leq SC_p \dots\dots\dots(6)$$

$$\sum_i W_i A_{t,imp} \leq CC_{mp} \dots\dots\dots(7)$$

$$\sum_i \sum_m \sum_t X_{t,im} \leq PC_m \dots\dots\dots(8)$$

$$\sum_i W_i B_{t,ikpc} \leq CC_{pc} \dots\dots\dots(9)$$

$$X_{t,im}, A_{t,imp}, B_{t,ikpc}, D_{t,ic}, INV_{t,ip} \geq 0 \dots\dots\dots(10)$$

Berdasarkan konstrain di atas, persamaan 4 menunjukkan bahwa jumlah produk yang diproduksi oleh pabrik periode t harus sama dengan jumlah produk yang dikirim dari pabrik ke DC. Persamaan 5 menunjukkan bahwa jumlah produk yang dikirim dengan menggunakan kendaraan antara dari DC ke konsumen harus sama dengan jumlah permintaan produk oleh konsumen dari DC tersebut. Persamaan 6 menunjukkan bahwa jumlah produk yang dikirim dari pabrik ke DC ditambah jumlah inventori di DC tersebut periode sebelumnya dikurangi jumlah produk yang dikirim dari DC tersebut ke konsumen kurang dari atau sama dengan kapasitas penyimpanan DC tersebut. Persamaan 7 menunjukkan bahwa sejumlah barang yang dikirim dari pabrik ke DC kurang dari atau sama dengan kapasitas kendaraan pengiriman dari pabrik ke DC. Persamaan 8 menunjukkan bahwa sejumlah barang yang diproduksi di pabrik tersebut kurang dari atau sama dengan kapasitas produksi pabrik tersebut. Persamaan 9 menunjukkan bahwa sejumlah barang yang dikirim dari DC ke konsumen kurang dari atau sama dengan kapasitas kendaraan pengiriman dari DC ke konsumen. Persamaan 10 menunjukkan bahwa jumlah barang yang diproduksi, jumlah barang yang dikirim dari pabrik ke DC, jumlah barang yang dikirim dari DC ke konsumen, jumlah permintaan konsumen, jumlah inventori di akhir periode lebih besar atau sama dengan nol.

**IV. HASIL OPTIMASI DAN ANALISA**

Berdasarkan pengerjaan optimasi produksi yang dilakukan, didapatkan hasil peningkatan profit manufaktur perusahaan dari bulan Januari 2010 sampai bulan Mei 2010. Besar peningkatan profit manufaktur perusahaan di bulan Januari 2010 sebesar 0,002096%, untuk bulan Februari 2010 sebesar 0,018349%, untuk bulan Maret 2010 sebesar 0,00019%, untuk bulan April 2010 sebesar 0,000942%, untuk bulan Mei 2010 sebesar 0,001806%.

Berdasarkan hasil optimasi distribusi yang diperoleh, dihasilkan minimasi jarak pengiriman untuk masing-masing pabrik. Adanya minimasi jarak pengiriman yang terjadi ini berdampak pada biaya pengiriman dari masing-masing DC ke konsumen. Bila dibandingkan dengan data awal pengiriman di DC A, diperoleh untuk bulan Januari 2010 di DC A terjadi

selisih jarak sebesar 392 km, untuk bulan Februari 2010 DC A terjadi selisih jarak sebesar 309 km, untuk bulan Maret 2010 DC A terjadi selisih jarak sebesar 1877 km, untuk bulan April 2010 DC A terjadi selisih jarak sebesar 1416 km.

Sedangkan untuk DC B, diperoleh untuk bulan Januari 2010 di DC B terjadi selisih jarak sebesar 488 km, untuk bulan Februari 2010 DC B terjadi selisih jarak sebesar 100 km, untuk bulan Maret 2010 DC B terjadi selisih jarak sebesar 238 km, untuk bulan April 2010 DC B terjadi selisih jarak sebesar 581 km. Sedangkan untuk DC C, diperoleh untuk bulan Januari 2010 di DC C terjadi selisih jarak sebesar 295 km, untuk bulan Februari 2010 DC C terjadi selisih jarak sebesar 29 km, untuk bulan Maret 2010 DC C terjadi selisih jarak sebesar 129 km, untuk bulan April 2010 DC C terjadi selisih jarak sebesar 378 km.

## V. KESIMPULAN

Dari penelitian yang dilakukan, didapatkan hasil yang lebih baik dengan optimasi produksi dan distribusi. Hasil komputasi yang dilakukan untuk kedua metode tersebut berlangsung cepat.

## UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis Yuli mengucapkan terima kasih kepada Tuhan yang telah memberikan limpahan rahmat-Nya, kepada kedua orang tua atas doa dan motivasinya, dan tidak lupa kepada Prof. Ir. Moses L. Singgih, M.Sc, PhD, selaku dosen pembimbing yang dengan sabar memberikan arahan dan nasehat selama penyelesaian Tugas Akhir. Serta semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, atas segala bantuan dan doa dalam penyelesaian penelitian Tugas Akhir ini.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Taylor, D. Global Cases in Logistics and Supply Chain Management 1977.
- [2] Tatsushi, Nishi., Masami, Konishi., dan Masatoshi, Ago., "A Distributed Decision Making System For Integrated Optimization Of Production Scheduling And Distribution For Aluminum Production Line". *Journal Of Computers and Chemical Engineering* **31**: 1205–1221(2006).
- [3] Clarisse Dhaenens. "Spatial Decomposition For A Multi-Facility Production And Distribution Problem". *Int. J. Production Economics* **64** : 177-186 (2000).
- [4] Thomas, D.J.. "Coordinated supply chain management". *Euro. J. Oper. Res.* **94** : 1–15 (1996).
- [5] Aliev, R.A., Fazlollahi, B., Guirimov, B.G., dan Aliev, R.R. "Fuzzy-Genetic Approach To Aggregate Production–Distribution Planning In Supply Chain Management". *Journal Of Information Sciences* **177** : 4241– 4255 (2007).
- [6] Glankwamdee, Wasu, Linderoth, Jeff, Shen, Jierui, Connard, Peter, dan Hutton, Jim. "Combining Optimization And Simulation For Strategic And Operational." *Journal Of Computers and Chemical Engineering* **32** : 2536–2546 (2007).
- [7] Chandra, P., Fisher, M.L. "Coordination Of Production And Distribution Planning". *European Journal of Operational Research* **72** : 503-517 (1994).
- [8] W. Chinneck, John. "Practical Optimization : A Gentle Introduction" (2001).
- [9] Hamdy T. "Operation Research : An Introduction". 8th. University of Arkansas : Fayetteville ( 2007).