Eksistensi dan Kestabilan Model SIR dengan *Nonlinear Insidence Rate*

Mohammad Soleh[1] dan Riry Sriningsih[2]

[1]*Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Suska Riau*

[2]*Jurusan Matematika FMIPA UNP*

[1] msoleh1975@yahoo.co.id, [2]srirysriningsih@yahoo.com

Abstrak. Diberikan model epidemi SIR dengan laju insidensi penularan berbentuk $\beta I^2 S$. Pada model tersebut diselidiki eksistensi dan kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik. Berdasarkan hasil penyelidikan didapat bahwa, terdapat satu titik ekuilibrium bebas penyakit dan dua buah titik ekuilibrium endemik. Titk ekuilibrium bebas penyakit stabil global, sedang titik ekuilibrium endemik masing-masing stabil lokal untuk suatu kondisi yang dipersyaratkan.

Kata kunci : *SIR, Titik equilibrium,* Kestabilan*, Nonlinear Insidence Rate*

A. PENDAHULUAN

Model epidemi SIR pertama kali diperkenalkan oleh Kermack & Mckendrick pada tahun 1927. Model ini disusun secara deterministik untuk menggambarkan sifat penyebaran penyakit. Model ini terus diperbaiki oleh ilmuwan-ilmuwan sesudahnya, diantaranya oleh H. E. Soper (1929), dan Hetchote (1976). Model yang digunakan masing-masing masih menggunakan laju insidensi penularan penyakit bilinear, yaitu linear dalam IS berbentuk βIS dengan β menyatakan laju kontak perkapita, I menyatakan jumlah individu sakit, dan S menyatakan jumlah individu rentan. Laju insidensi penularan bilinear βIS mengasumsikan homogenitas dalam populasi dan prinsip aktivitas massa, yaitu jumlah kejadian individu rentan menjadi sakit tergantung dari proporsi kelas *I*.

Pada tahun 1987, Wei Min Liu, H. W. Hetchote, dan Simon. A. Levin memperkenalkan bentuk lain laju insidensi penularan penyakit nonlinear yaitu $g(I)S^q = \beta I^p S^q$, dengan p, q bilangan positif, sebagai bentuk umum dari laju insidensi penularan bilinear. Jika $p = q = 1$ maka laju insidensi penularan menjadi bentuk bilinear. Alasan penggantian laju insidensi penularan penyakit βIS menjadi $\beta I^p S^q$ adalah untuk mengakomodasi kondisi bahwa asumsi homogenitas pada populasi belum tentu valid. Alasan yang lain, adanya pertimbangan efek kejenuhan (*saturation effect*), yaitu jika jumlah sakit sangat tinggi sedemikian hingga individu yang rentan menjadi individu sakit sangat mungkin terjadi maka pada titik tertentu laju insidensi penularan akan menurun.

Dengan penggantian laju insidensi penularan bilinear menjadi nonlinear berbentuk $\beta I^{p} S^{q}$, banyak sifat-sifat dinamik yang bisa dipelajari. Andrei Korobeinikov dan Philip. K. Mani (2004) mempelajari sifat-sifat dinamik sistem jika $0 < p \leq 1$, sementara Jing Li dan Jun Yu (2006) mempelajari sifat-sifat dinamik sistem jika $p > 1$. Dengan metode yang sama dengan Korobeinikov; Jing Li, Ying Wang dan Jun Yu (2010) mempelajari model SEIR untuk $p > 1$.

Pada penelitian ini, penulis hendak memaparkan Model SIR dendan laju insidensi penularan $\beta I^{p} S^{q}$ untuk $p > 1$. Penulis mempertimbangkan eksistensi dan kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik penyakit.

B. METODE PENELITIAN

Metode penelitian pada makalah ini adalah pengembangan jurnal dari Li Jing [5] dengan menerapkan laju penularan nonlinear yang sama untuk model SIR. Eksistensi titk ekuilibrium bebas penyakit dan endemik di cari dengan menganalisis sistem persamaan differensial model [9,10,11]. Kestabilan titik ekuilibrium diinvestigasi dengan menggunakan kriteria nilai eigen matriks Jacobian [9,10,11] untuk menemukan sifat penyebaran penyakit yang dibicarakan.

C. HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Pembentukan Model

Populasi dibagi menjadi 3 kelas: kelas *S* (rentan) menyatakan kelas individu yang rentan terjangkit penyakit, kelas *I* (sakit) menyatakan kelas individu yang sudah terjangkit penyakit dan memiliki kemampuan menularkan penyakit ke kelas *S*. Kelas *R* (sembuh) menyatakan kelas individu yang telah sembuh dari penyakit dan memiliki kekebalan tetap sehingga tidak masuk dalam kelas rentan lagi. Jika $S(t), I(t), R(t)$ berturut-turut menyatakan proporsi kelas-kelas rentan, sakit dan sembuh pada saat t maka didapat hubungan:

$$S(t) + I(t) + R(t) = 1$$

Dalam penelitian ini diasumsikan:

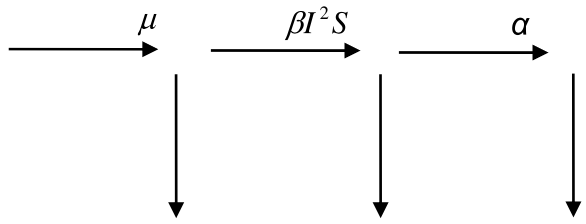
Dalam populasi terjadi proses kelahiran dengan laju kelahiran bernilai konstan yaitu $b > 0$ dan proses kematian alami (yaitu kematian yang tidak disebabkan oleh penyakit yang sedang dibicarakan) dengan laju kematian bernilai konstan yaitu $\mu > 0$. Dalam makalah ini diasumsikan bahwa $b = \mu$.

Laju insidensi penularan penyakit berbentuk $\beta I^{2} S$ dengan $\beta > 0$ menyatakan laju kontak perkapita.

Individu yang telah sembuh memiliki kekebalan yang tetap sehingga tidak masuk ke kelas rentan lagi dengan laju kesembuhan bernilai konstan yaitu $\alpha > 0$.

Setiap kelahiran masuk ke kelas rentan.

Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut didapat diagram alir model SIR:



Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut didapat model SIR dengan laju insidensi penularan nonlinear:

$$\frac{dS}{dt} = \mu - \beta I^2 S - \mu S \,, \qquad (1.a)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta I^2 S - (\mu + \alpha) I \,, \qquad (1.b)$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha I - \mu R \,, \qquad (1.c)$$

Daerah penyelesaian Sistem (1) adalah himpunan:

$$\Gamma_1 = \left\{ (S, I, R) \in \Re^3_{+,0} : 0 \le S, I, R \le 1,\; S + I + R = 1 \right\}.$$

Karena $R = 1 - I - S$ dapat diketahui setelah I, S ditentukan maka untuk sementara R diabaikan. Misalkan $\delta = \alpha + \mu$, diperoleh 2 Persamaan Diferensial

$$\frac{dS}{dt} = \mu - \beta I^2 S - \mu S \,, \qquad (2.a)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta I^2 S - \delta I \,, \qquad (2.b)$$

Daerah penyelesaian untuk Sistem (2) adalah

$$\Gamma_2 = \left\{ (S, I) \in \Re^2_{+,0} : 0 \le S, I \le 1,\; S + I \le 1 \right\}.$$

2. Keadaan Setimbang

Teorema 1

Sistem (2) *mempunyai satu titik ekuilibrium bebas penyakit* $Q_0 = (S_0, I_0) = (1,0)$.

Sistem (2) *memiliki dua titik ekuilibrium endemik* $Q^* = (S^*, I^*)$ *dan* $\hat{Q} = (\hat{S}, \hat{I})$ *dengan* I^* *dan* $\hat{I}$ *masing-masing merupakan akar positif dari* $\frac{\alpha+\mu}{\mu} I^2 - I + \frac{\delta}{\beta} = 0$, *dengan* $S^* = 1 - \frac{\delta}{\mu} I^*$, *dan* $\hat{S} = 1 - \frac{\delta}{\mu}\hat{I}$.

Bukti:

Jika $I = 0$, maka dari Persamaan (2.a) diperoleh $\mu - \beta I^2 S - \mu S = 0$.

$\mu - \beta.0^2 S - \mu S = 0 \Rightarrow S = 1$. Terbukti

Jika $I \neq 0$, maka dari Persamaan (2.b), $\beta I^2 S - \delta I = 0$ dan dari hubungan $S + I + R = 1$, $R = \frac{\alpha}{\mu} I$, atau $S = 1 - \frac{\alpha+\mu}{\mu} I$, diperoleh

$$\beta I^2 S = \delta I \Leftrightarrow \beta I S = \delta \Leftrightarrow \beta I\left(1 - \frac{\alpha+\mu}{\mu} I\right) = \delta$$
$$\Leftrightarrow I - \frac{\alpha+\mu}{\mu} I^2 - \frac{\delta}{\beta} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\alpha+\mu}{\mu} I^2 - I + \frac{\delta}{\beta} = 0.$$

Akar-akar I yang didapat adalah:

$$I_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\left(\frac{\alpha+\mu}{\mu}\right)\left(\frac{\delta}{\beta}\right)}}{2}$$
$$\Leftrightarrow I_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4\left(\frac{\alpha+\mu}{\mu}\right)\left(\frac{\alpha+\mu}{\beta}\right)}$$
$$\Leftrightarrow I_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4\frac{(\alpha+\mu)^2}{\mu\beta}}$$
$$\Rightarrow I^* = \frac{\mu\beta + \sqrt{\mu^2\beta^2 - 4\alpha^2\mu\beta - 8\alpha\mu^2\beta - 4\mu^3\beta}}{2\beta(\alpha+\mu)},$$
$$dan\ \hat{I} = \frac{\mu\beta - \sqrt{\mu^2\beta^2 - 4\alpha^2\mu\beta - 8\alpha\mu^2\beta - 4\mu^3\beta}}{2\beta(\alpha+\mu)}.$$

Jelas bahwa I^* dan $\hat{I}$ ada, sehingga didapat

$S^* = 1 - \dfrac{\alpha + \mu}{\mu} I^*$ dan $\hat{S} = 1 - \dfrac{\alpha + \mu}{\mu} \hat{I}$. Terbukti.

Selanjutnya karena jika $I \neq 0$ diperoleh $S \neq 0$, daerah penyelesain Sistem (2) untuk $I \neq 0$ adalah :

$$\Gamma_2^+ = \{(S, I) \in \Re_+^2 : 0 < S, I < 1,\ S + I \leq 1\} \subseteq \Gamma_2 .$$

4. Kestabilan keadaan setimbang

Teorema 2

Ttitik ekuilibrium bebas penyakit $Q_0 = (1,0)$ *stabil asimtotik global.*

Jika $I^* > \dfrac{\mu}{\mu + \alpha}$, *maka* $Q^* = (S^*, I^*)$ *stabil asimtotik lokal. Hal yang serupa berlaku untuk* $\hat{Q} = (\hat{S}, \hat{I})$.

Bukti :

Jika $Q_0 = (1,0)$

Didefinisikan fungsi $V : \Gamma_2^+ \to \Re$ dengan rumus:

$$V(S, I) = \left(S - S^* \ln S\right) + I\left(1 + \frac{I^*}{I}\right), \tag{3}$$

dengan $(1,0)$ titik ekuilibrium bebas penyakit. Substitusi $(1,0)$ ke Persamaan (3) menjadi:

$$V(S, I) = \left(S - \ln S\right) + I \tag{4}$$

Akan ditunjukkan V merupakan fungsi Lyapunov pada domain Γ_2^+

V diferensiabel kontinu pada Γ_2^+

Fungsi (4) mempunyai turunan parsial :

$$\frac{\partial V}{\partial S} = 1 - \frac{1}{S},$$

(5.a)

$$\frac{\partial V}{\partial I} = 1.$$

(5.b)

Fungsi $\frac{\partial V}{\partial S} = 1 - \frac{1}{S} \equiv f(S)$ dan $\frac{\partial V}{\partial I} = 1$, masing-masing adalah fungsi yang kontinu pada Γ_2^+, sehingga fungsi V adalah fungsi differensibel kontinu pada Γ_2^+.

Dengan menyelesaikan Persamaan $\frac{\partial V}{\partial S} = 0,$ diperoleh titik kritis yang ternyata sama dengan titik ekuilibrium $(1,0)$.

Titik ekuilibrium $(1,0)$ minimum global.

Turunan parsial kedua dari $V(S,I)$ adalah

$$\frac{\partial V^2(S,I)}{\partial^2 S} = \frac{1}{S^2},$$

$$\frac{\partial V^2(S,I)}{\partial^2 I} = 0.$$

Ditunjukkan bahwa $(1,0)$ titik minimum global, yang ekuivalen dengan menunjukkan bahwa $V(S,I)$ merupakan fungsi konveks pada Γ_2^+.

Matriks Hessian di titik $(1,0)$ dari fungsi V adalah

$$H(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Matriks Hessian (11) semidefinit positif karena nilai eigen-nilai eigennya $\lambda_1 = 1 > 0$ dan $\lambda_2 = 0$. Diperoleh bahwa $V(S,I)$ fungsi konveks pada Γ_2^+, sehingga $(1,0)$ merupakan titik minimum global.

Ditunjukkan $\frac{dV}{dt} \le 0$ untuk setiap solusi $(S,I) \in \Gamma_2^+$.

Turunan dari V terhadap t yaitu

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial I}\frac{\partial I}{\partial t} \qquad = \left(\mu - \beta I^2 S - \mu S\right)\left(1 - \frac{1}{S}\right) + \left(\beta I^2 S - \delta I\right)$$

$$= \mu - \beta I^2 S - \mu S - \frac{\mu}{S} + \beta I^2 - \mu + \beta I^2 S - \delta I$$

$$= -\left(\mu S + \frac{\mu}{S}\right) + \beta I^2 - \delta I \cdot$$

Misalkan $f(I)=\beta I^2-\delta I$, maka $f(I)<0$ untuk $I\in\left(0,\dfrac{\delta}{\beta}\right)$.

Diperoleh bahwa V merupakan fungsi Lyapunov yang terdefinisi pada Γ_2^+ dan $\dfrac{dV}{dt}=0$ hanya dipenuhi pada titik ekuilibrium $(1,0)$. Terbukti titik ekuilibrium $(1,0)$ stabil asimtotik global.

Titik equilibrium endemik (S^*,I^*)

Matriks Jacobi untuk Sistem (2) adalah:

$$Jf(S^*,I^*)=\begin{pmatrix}-\beta I^{*2}-\mu & -2\beta I^*S^*\\ \beta I^{*2} & 2\beta I^*S^*-\delta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\beta I^{*2}-\mu & -2\beta I^*\left(1-\dfrac{\alpha+\mu}{\mu}I^*\right)\\ \beta I^{*2} & 2\beta I^*\left(1-\dfrac{\alpha+\mu}{\mu}I^*\right)-\delta\end{pmatrix}$$

Diperoleh persamaan karaktristik $Jf(S^*,I^*)$:

$$\left(\lambda+\left(\beta I^{*2}+\mu\right)\right)\left(\lambda-\left(2\beta I^*\left(1-\frac{\alpha+\mu}{\mu}I^*\right)-\delta\right)\right)+2\beta^2I^{*3}\left(1-\frac{\alpha+\mu}{\mu}I^*\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2-\left(2\beta I^*\left(1-\frac{\alpha+\mu}{\mu}I^*\right)-\delta\right)\lambda+\left(\beta I^{*2}+\mu\right)\lambda-\left(\beta I^{*2}+\mu\right)\left(2\beta I^*\left(1-\frac{\alpha+\mu}{\mu}I^*\right)-\delta\right)+$$

$$2\beta^2I^{*3}\left(1-\frac{\alpha+\mu}{\mu}I^*\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2+\left(\beta I^{*2}+\mu+\delta-2\beta I^*\left(1-\frac{\alpha+\mu}{\mu}I^*\right)\right)\lambda-\left(\beta I^{*2}+\mu\right)\left(2\beta I^*\left(1-\frac{\alpha+\mu}{\mu}I^*\right)-\delta\right)+$$

$$2\beta^2I^{*3}\left(1-\frac{\alpha+\mu}{\mu}I^*\right)=0.$$

Akar-akar karakteristiknya dapat dihitung sebagai berikut:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(\beta I^{*2} + \mu + \delta - 2\beta I^{*}\left(1 - \frac{\alpha+\mu}{\mu} I^{*}\right)\right)^{2} \pm \frac{1}{2}\left[\left(\beta I^{*2} + \mu + \delta - 2\beta I^{*}\left(1 - \frac{\alpha+\mu}{\mu} I^{*}\right)\right)^{2}\right.$$

$$\left. + 4\left(\beta I^{*2} + \mu\right)\left(2\beta I^{*}\left(1 - \frac{\alpha+\mu}{\mu} I^{*}\right) - \delta\right) - 2\beta^{2} I^{*3}\left(1 - \frac{\alpha+\mu}{\mu} I^{*}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Diperoleh bahwa:

$$\left(\beta I^{*2} + \mu\right)\left(2\beta I^{*}\left(1 - \frac{\alpha+\mu}{\mu} I^{*}\right) - \delta\right) - 2\beta^{2} I^{*3}\left(1 - \frac{\alpha+\mu}{\mu} I^{*}\right)$$

$$= 2\beta^{2} I^{*3}\left(1 - \frac{\alpha+\mu}{\mu} I^{*}\right) - \delta\beta I^{*2} + 2\mu\beta I^{*}\left(1 - \frac{\alpha+\mu}{\mu} I^{*}\right) - \delta\mu - 2\beta^{2} I^{*3}\left(1 - \frac{\alpha+\mu}{\mu} I^{*}\right)$$

$$= -\delta\beta I^{*2} + 2\mu\beta I^{*}\left(1 - \frac{\alpha+\mu}{\mu} I^{*}\right) - \delta\beta$$

Jika $I^{*} > \frac{\mu}{\mu+\alpha}$, maka $-\frac{1}{2}\left(\beta I^{*2} + \mu + \delta - 2\beta I^{*}\left(1 - \frac{\alpha+\mu}{\mu} I^{*}\right)\right)^{2} < 0$, dan $-\delta\beta I^{*2} + 2\mu\beta I^{*}\left(1 - \frac{\alpha+\mu}{\mu} I^{*}\right) - \delta\beta < 0$, sehingga bagian real akar-akar $\lambda_{1,2}$ adalah negatif. Terbukti untuk $I^{*} > \frac{\mu}{\mu+\alpha}$, Titik Equilibrium endemik stabil asimtotik lokal.

D. KESIMPULAN DAN SARAN

Beberapa kesimpulan yang dapat ditarik dari pembahasan di atas diantaranya:

1. Model epidemi SIR dengan laju insidensi penularan berbentuk $\beta I^{2} S$ mempunyai satu titik ekuilibrium bebas penyakit $Q_0 = (1,0)$ dan dua buah titik ekuilibrium endemik $Q^{*} = (S^{*}, I^{*})$ dan $\hat{Q} = (\hat{S}, \hat{I})$ dengan I^{*} dan $\hat{I}$ masing-masing merupakan akar positif dari $\frac{\alpha+\mu}{\mu} I^{2} - I + \frac{\delta}{\beta} = 0$, dengan $S^{*} = 1 - \frac{\delta}{\mu} I^{*}$, dan $\hat{S} = 1 - \frac{\delta}{\mu}\hat{I}$.
2. Titk ekuilibrium bebas penyakit stabil global, sehingga lama-kelamaan populasi akan terbebas dari penyakit yang dibicarakan.

3. Titik ekuilibrium endemik masing-masing stabil lokal untuk kondisi $I > \dfrac{\mu}{\mu + \alpha}$, sehingga untuk titik awal yang cukup dekat dengan titik ekuilibrium $Q^* = (S^*, I^*)$ atau $\hat{Q} = (\hat{S}, \hat{I})$, dalam populasi akan selalu ada individu yang terjangkait penyakit.

DAFTAR PUSTAKA

1. Kocak, H and Hole, J. K., 1991, *Dynamic and Bifurcation,* New York, Springer-Verlag, New York
2. Korobeinikov, A. and Maini, P, K., 2004*, A Lyapunov Function and Global Properties For SIR and SEIR Epidemiological Models With Nonlinear Incidence,* Mathemetical Bioscience and engineering , Vol. 1 Number 1 pp. 57-60.
3. Korobeinikov, A., et.all, 2010*, Lyapunov functions for SIR and SIRS epidemic model,* Elsevier: Applied Mathematics Letters 23 pp. 446_448
4. Li, J., Yu, J., 2006, *Global behavior of a SEIR model in epidemiology with nonlinear incidence rates,* World Journal of Modelling and Simulation, Vol. 2 No. 3, pp. 143-149
5. Li, J., Wang, Y., Yu, J., 2010, *Global stability of high dimensional system in epidemiology with nonlinear incidence rates,* International Journal of Math analysis, Vol. 4 No. 7, pp. 315-
6. Lahrous, A., Omari, L., Kiouach, D., 2011, *Global analysis of a deterministic and stochastic nonlinear SIRS epidmic models,* Nonlinear Analysis: Model and Control, Vol. 16 no. 1, pp.59-76
7. Liu, W. M., Hethcote, H. W., and Levin, S. A., 1987*, Dynamical behavior of epidemiological models with nonlinear incidence rates,* J. Math. Biol 25: 359-380.
8. Luenberger, D, G., 1979, *Introduction to dynamical system theory, models, and applications,* John Wiley & Sons, Inc, Canada.
9. Olsder, G. J., 1994, *Mathematical system theory,* 1st ed, Delft University of Technology.
10. Perko, L., 1991, *Differential Equations and Dynamical System,* Springer-Verlag, New York
11. Wiggins, S., 1990, *Introduction to applied nonlinear dynamical system and chaos,* Springer-Verlag, New York.