ESTIMASI DAN RELIABILITAS PADA DISTRIBUSI WEIBULL DENGAN METODE BAYES

Adevi Murni Adel
Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Mahaputra Muhammad Yamin, Solok
adevimurni@gmail.com

Abstrak. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan estimasi dan reliabilitas dengan metode Bayes. Metode yang digunakan adalah dengan menganalisis teori yang relevan dengan masalah berdasarkan studi literatur. Hasil dari penelitian ini adalah bentuk dari parameter estimasi untuk θ, p dan estimasi reliabilitas pada distribusi Weibull dengan metode Bayes untuk n sistem dengan waktu kegagalan X1, X2,…,Xn dengan distribusi posterior f(θ,p)=1/θ adalah

$$\theta^* = \frac{1}{n-1}\frac{\int_0^a \frac{p^n \leftthreetimes^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{n-1}} dp}{\int_0^a \frac{p^n \leftthreetimes^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{n}} dp}, p^* = \frac{\int_0^a \frac{p^{n+1} \leftthreetimes^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{n}} dp}{\int_0^a \frac{p^n \leftthreetimes^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{n}} dp}, R(t)^* = \frac{\int_0^a \frac{p^n \leftthreetimes^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p + t^p\right)^{n}} dp}{\int_0^a \frac{p^n \leftthreetimes^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{n}} dp}$$

Kata kunci: parameter estimasi, reliabilitas, distribusi Weibull, metode Bayes.

A. PENDAHULUAN

Persaingan dalam bidang industri semakin pesat saat ini, membuat para produsen berusaha menunjukkan kualitas produk hasil industrinya. Sehingga sewaktu prosusen memasarkan produknya, pihak konsumen menginginkan bahwa pihak produsen diberi informasi mengenai daya tahan produk tersebut. Untuk mengukur daya tahan dan keandalan dari suatu produk hasil industry, diperlukan suatu uji yaitu uji hidup. Adapun tujuan uji hidup menurut Soejoeti (1995:1) adalah 1) mengidentifikasi model statisika yang sesuai bagi distribusi tahan hidup atau proses kegagalan, yaitu suatu proses yang mengakibatkan tidak berfungsinya unit dengan wajar, 2) mengestimasi parameter-parameter yang tidak diketahui dari model ditribusi data dan dapat juga dilakukan sautu uji hipotesis, 3) menghitung batas konfidensi reliabilitas dari komponen tahan hidup.

Untuk mengestimasi nilai dari suatu parameter menurut Romeu (2003:1) membedakannya atas dua, yaitu metode klasik dan metode Bayes. Pada metode klasik parameter merupakan besaran yang tetap, sedangkan pada metode Bayes parameter dipandang sebagai peubah acak dan mempunyai suatu distribusi yang disebut distribusi prior yang dapat menjelaskn suatu distribusi bersyarat peubah acak kontinu yang disebut distribusi posterior.

Selain untuk mengestimasi suatu paramatr, tujuan uji hidup adalah untuk mengetahui reliabilitas suatu sistem. Reliabilitas suatu system didefinisikan sebagai peluang bahwa sistem akan bekerja paling sedikit untuk suatu periode waktu tertentu tanpa kerusakan. Jika siasumsikan sistem memiliki distribusi tahan hidup maka estimasi reliabilitas dapat dilakukan melalui fungsi distribusinya. Untuk mengestimasi Reliabilitas menurut Romeu (2003:5) metode Bayes lebih efisien digunakan karena dapat menghasilkan informasi yang lebih banyak tentang estimasi parameter dan reliabilitasnya.

Oleh karena itu, untuk mencari reliabilitas dapat digunakan salah satu dari model distribusi, yaitu distribusi Weibull, distribusi Eksponensial, distribusi Ekstrim dan lain sebagainya. Menurut Dudewicz (1998:117) distribusi Weibull sering digunakan dalam model distribusi uji hidup, karena dapat memodelkan laju kegagalan dalam berbagai keadaan dan dapat menghasilkan sebuah pendekatan yang baik untuk hukum peluang dari beberapa peubah acak serta sering sesuai dalam berbagai bidang, seperti bidang industri, bidang kesehatan dan lain sebagainya.

B. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah analisis teori-teori yang relevan dengan permasalahan yang dibahas berlandaskan pada kajian kepustakaan, seperti teori distribusi peluang, rataan dan variansi, metode Bayes, estimasi titik dan Reliabilitas.

Adapun langkah-langkah kerja yang dilakukan adalah: 1) Menentukan bentuk distribusi prior pada distribusi Weibull, 2) Menentukan bentuk dari distribusi posterior dengan mensubsitusikan distribusi prior yang telah ditentukan pada distribusi Weibull, 3) menentukan bentuk estimasi dari parameter θ dan p pada distribusi Weibull dengan metode Bayes, 4) Menentukan bentuk estimasi Reliabilitas pada distribusi Weibull dengan metode Bayes.

C. HASIL DAN PEMBAHASAN

Metode Bayes

Metode Bayes dapat digunakan untuk menentukan distribusi bersyarat peubah acak kontinu. Dengan metode Bayes, distribusi bersyarat peubah acak kontinu yang disebut distribusi posterior dapat dibentuk dengan fungsi kemungkinan dengan informasi yang lain yang telah tersedia sebelumnya (informasi awal) yang dinyatakan dengan distribusi prior.

Asumsikan waktu kegagalan dengan X adalah distribusi Weibull dengan parameter (θ,p) dengan p parameter bentuk yang mencirikan suatu variansi dan θ adalah parameter skala yang mencirikan rataan dari distribusi Weibull dengan fungsi padat peluangnya (Sinha. 1980:30)

$$f(x;\theta,p) = \frac{p}{\theta}\, x^{p-1} e^{\frac{-x^p}{\theta}} \qquad x>0,\ \theta>0,\ p>0 \qquad (1)$$

Distribusi prior

Jika x1, x2,…, xn adalah nilai dari peubah acak dari fungsi padat peluang (fpp) distribusi Weibull dengan g(θ) dan h(p) disebut dengan distribusi prior. Karena nilai θ dan p bersifat non informatif maka dalam menentukan distribusi bentuk dari distribusi prior g(θ) digunakan aturan Jeffreys dan h(p) dipilih distribusi uniform. Jika parameter θ tidak diketahui maka distribusi prior g(θ) ∝ I1/2(θ) (Robbert, 1994:114). Pendekatan nilai dari aturan Jeffrey mendekati akar kuadrat dari informasi Fisher. Selanjutnya untuk menentukan nilai dari informasi Fisher I(θ) pada distribusi Weilbull, subsitusikan teorema:$I(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial \ln f(X|\theta,p}{\partial\theta}\right)^2\right]$ (Robert, 1994: 113)

$$I(\theta) = E\left[\frac{\partial\left(\ln\frac{p}{\theta}x^{p-1}\right)-\frac{x^p}{\theta}}{\partial\theta}\right]^2 = E\left[-\frac{1}{\theta}+\frac{x^p}{\theta^2}\right]^2$$

$$I(\theta) = \frac{1}{\theta^4}\{E[x^{2p}] - 2\theta E[x^p] + \theta^2\}$$

Dengan $E[x^{2p}] = \theta^2\Gamma(3) = 2\theta^2$, berdasarkan teorema $\Gamma(n) = (n-1)!$ (Walpole, 1995: 270), maka diperoleh: $E[x^p] = \theta\,\Gamma(1) = \theta$,

sehingga $I(\theta) = \frac{1}{\theta^4}\{2\theta^2 - 2\theta^2 + \theta^2\} = \frac{1}{\theta^2}$

maka distribusi prior bagi θ dengan menggunakan aturan Jeffrey yaitu:

$$g(\theta) = \sqrt{\frac{1}{\theta^2}} = \frac{1}{\theta} \qquad (2)$$

Selanjutnya ditentukan distribusi prior bagi p yaitu h(p)) yang dipilih dari distribusi Uniform, dengan fungsi padat peluangnya $f(x) = \frac{1}{b-a}$ (Freund, 1999:208), sehingga diperoleh: $h(p) = \frac{1}{a-0}$, $0 < p < a$ dengan harga a konstans, oleh karena itu diambil a=1, maka diperoleh distribusi priornya h(p)=1 (3)

Selanjutnya distribusi prior g(θ) dan h(p) disubsitusikan untuk memperoleh distribusi posterior bagi parameter θ dan p.

Distribusi Posterior

Jika x1,x2,…,xn adalah nilai dari peubah acak dengan fpp distribusi Weibull, dengan parameter θ, p maka fungsi kemungkinannya berdasarkan definisi:

$L(\theta, p|X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\theta, p)$ (Dudewicz, 1998: 412)

$$L(\theta, p|X) = \left(\frac{p}{\theta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{p-1} exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^p}{\theta}\right) \quad (4)$$

Dengan mensubsitusikan (2), (3), (4) ke persamaan:

$$\pi(\theta, p|x_1, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1,\ldots,x_n|\theta,p)\ g(\theta).h(p)}{\iint_{\Omega} f(x_1,\ldots,x_n|\theta,p)\ g(\theta).h(p) d\theta\ dp} \quad \text{(Soejoeti, 1988:44)}$$

$$\pi(\theta.p|X) = \frac{\left(\frac{p}{\theta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{p-1}\ exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^p}{\theta}\right) \frac{1}{\theta}}{\int_0^a \int_0^\infty \left(\frac{p}{\theta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{p-1}\ exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^p}{\theta}\right) \frac{1}{\theta}\ d\theta\ dp},$$

misalkan $\prod_{i=1}^{n} x_i = \lambda$, maka

$$\pi(\theta, p|X) = \frac{\frac{p^n}{\theta^{n+1}}\lambda^{p-1}\ exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^p}{\theta}\right)}{\int_0^a\left[\int_0^\infty \frac{p^n}{\theta^{n+1}}\lambda^{p-1}\ exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^p}{\theta}\right) d\theta\right] dp} = \frac{K\,p^n}{\theta^{n+1}}\ \lambda^{p-1}\ exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^p}{\theta}\right) \quad (5)$$

Dengan $K^{-1} = \int_0^a \left[\int_0^\infty \frac{p^n}{\theta^{n+1}} \lambda^{p-1}\ exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^p}{\theta}\right)\ d\theta\ \right] dp$,

misalkan $\sum_{i=1}^{n} x_i^p = m$

Maka $K^{-1} = \int_0^a p^n\ \lambda^{p-1} \left[\int_0^\infty \frac{(m\theta^{-1})^{n-1}}{m^n}\ \exp\ (-m\theta^{-1})\ \ d(m\theta^{-1})\right]\ dp$

$$K^{-1} = \int_0^a p^n\ \ \lambda^{p-1}\ \frac{\Gamma(n)}{m^n}\ dp = \Gamma(n) \int_0^a \frac{p^n\ \lambda^{p-1}}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^p)}\ \ dp, K = \frac{1}{K^{-1}} \quad (6)$$

Subsitusikan persamaan (6) ke Persamaan (5), sehingga diperoleh distribusi posterior bagi (θ,p), yaitu:

$$\pi(\theta, p|X) = \frac{p^n\lambda^{p-1}\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^p}{\theta}\right)}{\Gamma(n)\theta^{n+1}\int_0^a \frac{p^n\lambda^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^n} dp} \quad (7)$$

Distribusi Posterior Marginal

Distribusi Posterior Marginal bagi θ

Berdasarkan definisi distribusi Posterior marginal bagi θ, (Box&Tio,1992:167)

$$\pi(\theta|X) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta, p|X)$$

$$\pi(\theta|X) = \int_{0}^{a} \pi(\theta, p|X) = \int_{0}^{q} \left[\frac{p^n \lambda^{p-1} \left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^p}{\theta} \right)}{\Gamma(n)\theta^{n+1} \int_0^a \frac{p^n \lambda^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^n} dp} \right] dp$$

$$\pi(\theta|X) = \frac{1}{\Gamma(n)\theta^{n+1} \int_0^a \frac{p^n \lambda^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^n} dp} \left[\int_0^a p^n \lambda^{p-1}\, exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^p}{\theta} \right)\ dp \right]$$

Jadi distribusi posterior marginal bagi θ adalah:

$$\pi(\theta|X) = \frac{\frac{1}{\theta^{n+1}} \left[\int_0^a p^n \lambda^{p-1}\ exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^p}{\theta} \right) dp \right]}{\Gamma(n) \int_0^a \frac{p^n \lambda^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^n} dp} \qquad (8)$$

Distribusi Posterior Marginal bagi p

Berdasarkan definisi distribusi Posterior marginal bagi p, (Box&Tio,1992:167)

$$\pi(p|X) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta, p|X)\, d\theta = \int_{0}^{\infty} \left[\frac{p^n \lambda^{p-1}\ \ exp \left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^p}{\theta} \right)}{\Gamma(n)\theta^{n+1} \int_0^a \frac{p^n \lambda^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^n} dp} \right] d\theta$$

$\pi(p|X) = K\, p^n \lambda^{p-1} \left[\int_0^{\infty} \frac{1}{\theta^{n+1}}\ \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^p}{\theta} \right)\ d\theta \right]$, misalkan $\sum_{i=1}^{n} x_i^p = m$

$$\pi(p|X) = K\, p^n \lambda^{p-1} \left[\int_0^{\infty} (\theta^{-1})^{n+1}\ \ exp\left(-\frac{m}{\theta} \right) d\theta \right]$$

$$= K\, p^n \lambda^{p-1} \left[\int_0^{\infty} \frac{(m\theta^1)^{n-1}}{m^n}\ exp\,(m\theta^{-1}) d(m\theta^{-1}) \right]$$

Faktor yang di dalam kurung siku pada persamaan di atas merupakan fungsi gamma dengan $(m\theta^1) = y,\ \ n = \alpha,$ sehingga diperoleh:

$$\pi(p|X) = K\, p^n \lambda^{p-1} \frac{\Gamma(n)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^n} \quad dengan\ K = \frac{1}{\Gamma(n) \int_0^a \frac{p^n \lambda^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^n} dp}$$

Jadi distribusi posterior marginal bagi p adalah:

$$\pi(p|X) = \frac{\frac{p^n \lambda^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^n}}{\int_0^a \frac{p^n \lambda^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^n}\ dp} \qquad (9)$$

Estimasi bagi Parameter θ dan p dengan Metode Bayes

Jika parameter θ dan p dari distribusi Weibull tidak diketahui, maka estimasi θ dan p dapat dilakukan melalui estimasi titik dengan metode Bayes. Untuk memperoleh bentuk estimasi parameter θ dan p subsitusikan persamaan (8) dan (9) ke definisi:

$$\theta^* = E(\theta|X) = \int_{\Omega} \theta\pi(\theta|X)\, d\theta$$

$$p^* = E(p|X) = \int_{\Omega} p\pi(p|X)\, d\theta \qquad \text{(Sinha, 1980: 123)}$$

Estimasi bagi θ dengan Metode Bayes

$$\theta^* = E(\theta|X) = \int_0^{\infty} \theta\pi(\theta|X) d\theta = \int_0^{\infty} \left[\theta \; \frac{\frac{1}{\theta^{n+1}} \left[\int_0^a p^n \lambda^{p-1}\; exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^p}{\theta} \right)\; dp \right]}{\Gamma(n) \int_0^a \frac{p^n \lambda^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^n} dp} \right] d\theta$$

$$\theta^* = \frac{1}{\Gamma(n) \int_0^a \frac{p^n \lambda^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^n} dp} \int_0^a \left[\frac{1}{\theta^n} \left(\int_0^{\infty} p^n \lambda^{p-1}\; exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^p}{\theta} \right)\; d\theta \right) \right] dp$$

$$\theta^* = K \int_0^a \left[\frac{1}{\theta^n} \left(\int_0^{\infty} p^n \lambda^{p-1}\; exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^p}{\theta} \right)\; d\theta \right) \right] dp, \quad \text{misalkan } \sum_{i=1}^{n} x_i^p = m$$

$$\theta^* = K \int_0^a \left[p^n \lambda^{p-1} \left(\int_0^{\infty} (\theta^{-1})^n exp\left(-\frac{m}{\theta} \right)\; d\theta \right) \right] dp$$

$$\theta^* = K \int_0^a \left[p^n \lambda^{p-1} \left(\int_0^{\infty} \frac{(m\theta^{-1})^{(n-1)-1}}{m^{n-1}} exp(-m\theta^{-1}) \quad d(m\theta^{-1}) \right) \right] dp$$

Faktor yang di dalam kurung siku pada persamaan di atas merupakan fungsi gamma dengan $(m\theta^{-1}) = y$ dan bila $(n-1) = \alpha$, maka:

$$\theta^* = K \int_0^a \left[p^n \lambda^{p-1} \left(\frac{\Gamma(n-1)}{m^{n-1}} \right) \right] dp = K\, \Gamma(n-1) \left[\int_0^a \frac{p^n \lambda^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{n-1}}\; dp \right],$$ sehingga

diperoleh:

$$\theta^* = \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n) \int_0^a \frac{p^n \lambda^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^n} dp} \left[\int_0^a \frac{p^n \lambda^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{n-1}}\; dp \right].$$ Jadi estimasi bagi θ dengan metode Bayes:

$$\theta^* = \frac{1}{n-1} \frac{\int_0^a \frac{p^n \lambda^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{n-1}} dp}{\int_0^a \frac{p^n \lambda^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{n}} dp} \qquad (10)$$

Estimasi bagi p dengan Metode Bayes

$$p^* = E(p|X) = \int_0^a p\pi(p|X)dp = \int_0^a p\left[\frac{\frac{p^n \lambda^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^n}}{\int_0^a \frac{p^n \lambda^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^n} dp}\right] dp$$

Jadi estimasi bagi p dengan metode Bayes adalah:

$$p^* = \frac{\int_0^a \frac{p^{n+1} \lambda^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^n} dp}{\int_0^a \frac{p^n \lambda^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^n} dp} \qquad (11)$$

Reliabilitas

Reliabilitas suatu sistem adalah peluang bahwa sistem akan bekerja sesuai dengan fungsinya tanpa kerusakan, paling sedikit untuk suatu periode tertentu. Menurut Sinha, 1980:10),Misalkan X adalah waktu hidup dari suatu sistem. Reliabilitas sistem pada waktu t didefinisikan $R(t) = P(X \geq t) = 1 - F(t)$, dimana F(t) adalah fungsi distribusi dari waktu kegagalan X. Asumsikan distribusi waktu kegagalan adalah distribusi Weibull dengan parameter θ dan p,maka fungsi distribusinya:

$F(t) = \int_0^t \frac{p}{\theta} x^{p-1} \, exp\left(-\frac{x^p}{\theta}\right) dx = 1 - exp\left(-\frac{t^p}{\theta}\right)$, Reliabilitas pada waktu t adalah:

$$R(t) = 1 - \left(1 - exp\left(-\frac{t^p}{\theta}\right)\right) = exp\left(-\frac{t^p}{\theta}\right) \qquad (12)$$

Misalkan waktu kegagalan X=X1, X2, …, Xn berdistribusi Weibull dengan parameter θ dan p yang memiliki distribusi prior g(θ), h(p), maka estimasi Reliabilitas pada distribusi Weibull dengan metode Bayes menggunakan definisi $R(t)^* = E(R(t)|X)$ (Sinha, 1980: 128)

$$R(t)^* = \iint R(t)\pi(\theta, p|X)d\theta dp = \int_0^a \left[\int_0^\infty exp\left(-\frac{t^p}{\theta}\right) \frac{p^n \lambda^{p-1}\left(-\sum_{i=1}^n \frac{x_i^p}{\theta}\right)}{\Gamma(n)\theta^{n+1} \int_0^a \frac{p^n \lambda^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^n} dp} d\theta\right] dp$$

$$R(t)^* = \int_0^a \left[K p^n \lambda^{p-1} \left[\int_0^\infty \frac{exp\left(-\frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p + t^p\right)}{\theta}\right)}{\theta^{n+1}} d\theta\right]\right] dp,$$

Misalkan $\left(\sum_{i=1}^n x_i^p + t^p\right) = w$, maka

$$R(t)^* = \int_0^a \left[K p^n \lambda^{p-1} \left[\int_0^\infty (\theta^{-1})^{n+1} \exp\left(-\frac{w}{\theta}\right) d\theta\right]\right] dp$$

$$R(t)^* = \int_0^a \left[Kp^n \lambda^{p-1} \left[\int_0^\infty \frac{(w\theta^{-1})^{n-1}}{w^n} \exp(-w\theta^{-1})\, d\,(w\theta^{-1}) \right] \right] dp$$

Faktor yang di dalam kurung siku pada persamaan di atas merupakan fungsi gamma dengan $(w\theta^{-1}) = Z$ dan bila $n = \alpha$, maka berdasarkan teorema jika n bilangan asli maka $\Gamma(n) = (n-1)!$ (Walpole, 1995: 270), diperoleh:

$$R(t)^* = \int_0^a \left[Kp^n \lambda^{p-1} \left[\frac{\Gamma(n)}{w^n} \right] \right] dp$$, Dengan $K = \frac{1}{\Gamma(n) \int_0^a \frac{p^n \lambda^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^n} dp}$, sehingga

diperoleh: $$R(t)^* = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n) \int_0^a \frac{p^n \lambda^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^n} dp} \left[\int_o^a \frac{p^n \lambda^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p + t^p\right)^n} dp \right]$$

Jadi estimasi Bayes untuk reliabilitas adalah: $$R(t)^* = \frac{\int_o^a \frac{p^n \lambda^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p + t^p\right)^n} dp}{\int_0^a \frac{p^n \lambda^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^n} dp} \qquad (13)$$

Dimana $R(t)^*$adalah setimasi Bayes untk reliabilitas suatu sistem pada waktu t, yang disebut juga taksiran peluang dengan menggunakan pendekatan metode Bayes pada suatu sistem yang juga bekerja sesuai dengan fungsinya tanpa mengalami kerusakan, paling sedikit pada waktu t.

D. KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan temuan penelitian dan pembahasan yang telah dilakukan, dalam penelitian ini dapat disimpulkan bahwa:

Distribusi prior gabungan dari parameter θ dan p pada distribusi Weibull dapat dirumuskan:

f(θ,p)=g(θ) h(p) = $\frac{1}{\theta}\ \ 1 = \frac{1}{\theta}$

Bentuk estimasi θ dan p pada distribusi Weibull, yang diperolah melalui penggunaan distribusi prior dengan metode Bayes dapat ditentukan dengan rumus:

$$\theta^* = \frac{1}{n-1} \frac{\int_0^a \frac{p^n \curlyvee^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{n-1}} dp}{\int_0^a \frac{p^n \curlyvee^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^n} dp} \qquad p^* = \frac{\int_0^a \frac{p^{n+1} \curlyvee^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^n} dp}{\int_0^a \frac{p^n \curlyvee^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^n} dp}$$

Bentuk estimasi Reliabilitas pada distribusi Weibull yang terdiri dari n system dengan waktu kegagalan X1, X2, …,Xn yang ditentukan melalui metode Bayes adalah:

$$R(t)^* = \frac{\int_0^a \frac{p^n \leftthreetimes^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p + t^p\right)^n} dp}{\int_0^a \frac{p^n \leftthreetimes^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^n} dp}$$

Adapun saran yang diberikan sehubungan dengan penelitian ini adalah agar peneliti berikutnya dapat mengembangkan penelitian ini untuk model distribusi lainnya dan menggunakan metode lain untuk menentukan estimasi titik dan reliabilitasnya atau mengaplikasinya pada permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari, seperti industry bola lampu. Reliabilitas (keandalan) dapat ditingkatkan dengan ketepatan dalam memilih distribusi priornya, karena semakin besar distribusi prior akan semakin besar pula reliabilitasnya(keandalan dari suatu produk akan bertahan lama).

DAFTAR PUSTAKA

1. Box&Tiao. 1992. *Bayesian Inference in Statistical Analysis.* Jhon Wiley & Sons, Inc, Canada.
2. Dudewicz, E.J. dan Mishra, S.N. 1998. *Statistika Matematika Modern.* ITB, Bandung.
3. Freund, J.E and Walpole, R.E. 1999. *Mathematical Statistics.* Prentice Hall, New Jersey.
4. Robert, Cristian P. 1994. *The Bayesian Choice.* Springer-Verlag New York, Inc, New York.
5. Romeu, J.L.2003. *Use of Bayesian Technique or Reliability.* Journal of RAC START, volume 10, Number 8, http://rac.alionscience.com
6. Sinha, S.K and Kale, B.K. 1980. *Life Testing and Reliability Estimation.* Wile Eastern limited, New Delhi.
7. Walpole, R.E dan Myer, Raymond H. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuan. Edisi ke-4.* ITB, Bandung.
8. Soejoeti, Zanzawi . 1995. *Analisa Data Uji Hidup.* UGM. Yogyakarta.
9. Soejoeti, Zanzawi dan Soebanar. 1988. *Inferensi Bayes.* Universitas Terbuka, Departemen Pendidikan dan Kebudayaan.