

## Persamaan Momentum untuk Aliran Berakselerasi Tinggi dengan Aplikasi pada Pemodelan Gelombang Pendek

Syawaluddin Hutahaean

Kelompok Keahlian Teknik Kelautan, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan, Institut Teknologi Bandung  
Jl. Ganesha No. 10 Bandung 40132, E-mail: syawaluddin@ocean.itb.ac.id

### Abstrak

*Pada penelitian ini dikembangkan persamaan momentum untuk aliran berakselerasi tinggi. Persamaan dikembangkan dengan mengerjakan diferensial ruang untuk aliran berakselerasi tinggi pada persamaan momentum dari Euler. Dengan metoda ini, percepatan tidak hanya diakibatkan oleh gaya penggerak pada arah sumbu yang bersangkutan, tetapi juga diakibatkan oleh gaya-gaya penggerak dari arah sumbu lainnya. Selanjutnya persamaan yang diperoleh digunakan untuk memodelkan gelombang pendek dengan persamaan muka air yang digunakan adalah merupakan superposisi antara persamaan kekekalan masa dengan persamaan kekekalan energi. Persamaan diselesaikan secara numeris, dimana hasil eksekusi model numeris menunjukkan bahwa model dapat mensimulasikan shoaling dan breaking dengan baik, dengan panjang gelombang yang dihasilkan jauh lebih pendek dari panjang gelombang hasil teori gelombang linier.*

**Kata-kata Kunci:** Aliran berakselerasi tinggi.

### Abstract

*In this reserach, momentum equation for high accelerated flow is developed. The equation is developed by using spatial differentiation for high accelerated flow in Euler's momentum equation. With this method, fluid acceleration not only excited by force on its direction but also but also forces from other directions. The resulted momentum equation is used to short water wave modeling, where as surface water equation is a superposition between continuity and energy coservation equations. The equation is solved numerically where execution of the model show that the model can simulate wave shoaling and breaking where the resulted wave length is much smaller than wave length of linear's water wave theory.*

**Keyword:** High accelerated flow.

## 1. Pendahuluan

Pemahaman mengenai hidrolika pantai atau dinamika gelombang dikawasan pantai adalah merupakan suatu hal yang penting dalam merencanakan suatu bangunan pantai. Berbagai informasi mengenai kondisi gelombang diperairan pantai antara lain tinggi gelombang, arus littoral dan sebagainya merupakan parameter penting dalam merencanakan suatu bangunan pantai. Sehubungan dengan hal itu maka diperlukan suatu model dinamika gelombang dikawasan pantai yang sekiranya dapat menggambarkan berbagai perilaku gelombang diperairan pantai.

Model transformasi gelombang dari perairan dalam menuju perairan dangkal telah banyak dikembangkan. Hutahaean (2008a, 2008c) telah mengembangkan model transformasi gelombang yang dapat memodelkan gelombang breaking, tetapi model tersebut bukan merupakan model runut-waktu (time-series). Dengan model runut-waktu, berbagai perubahan gelombang dari waktu ke waktu dapat diamati sehingga dapat di-

peroleh pemahaman yang lebih baik mengenai dinamika gelombang dikawasan perairan pantai.

Terdapat banyak terdapat contoh dialam bahwa gaya penggerak pada suatu arah sumbu tidak hanya memberikan percepatan pada arah sumbu yang bersangkutan. Sebagai contoh, gelombang dilaboratorium dibangkitkan dengan memberikan gaya horisontal, dimana pada contoh ini menunjukkan adanya perubahan gaya horisontal menjadi gaya vertikal. Karena itu gaya penggerak pada persamaan momentum, semestinya tidak hanya gaya penggerak pada arah sumbu yang bersangkutan, tetapi juga berasal dari gaya penggerak pada arah sumbu yang lain.

## 2. Persamaan Momentum Untuk Aliran Berakselerasi Tinggi

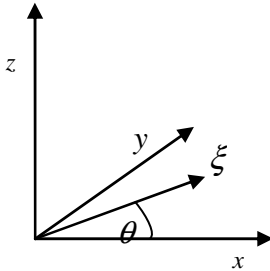
### a. Persamaan Euler

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (3)$$

$p$  pada **Persamaan 1** dan **2** terdiri atas dua komponen, yaitu komponen hidrostatis ( $p_{hs}$ ) dan komponen hidrodinamis ( $p_{hd}$ ),  $p = p_{hs} + p_{hd}$ , dimana bentuk dari kedua jenis tekanan tersebut akan dibahas pada bagian lain.



Gambar 1. Sistem sumbu

Pada saat air diam, maka **Persamaan 3** menjadi

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = 0 \quad \text{atau} \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{hs}}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{hd}}{\partial z} - g = 0$$

Pada air diam,  $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{hd}}{\partial z} = 0$ , maka  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{hs}}{\partial z} - g = 0$

Substitusi persamaan ini ke **Persamaan 3**, persamaan momentum-z menjadi

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{hd}}{\partial z} \quad (4)$$

Jadi gaya penggerak air pada arah vertikal-z adalah gaya hidrodinamis saja. Untuk selanjutnya sebagai persamaan momentum-z adalah **Persamaan 4**, sedangkan yang dimaksudkan dengan  $\partial p/\partial z$  pada bagian selanjutnya adalah  $\partial p_{hd}/\partial z$ , mengingat gaya penggerak arah vertikal adalah  $\partial p_{hd}/\partial z$ .

**b. Percepatan konvektif yang memperhitungkan percepatan lokal**

Ruas kiri persamaan Euler terdiri dari percepatan lokal, suku ke 1, dan percepatan konvektif atau percepatan spasial, suku dalam kurung. Secara umum percepatan total pada ruas kiri persamaan dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{Du}{dt} = \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{\text{lokal}} + \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{\text{konvektif}}$$

Pada perumusan percepatan tersebut, pada  $\partial u/\partial x$ ,  $\partial u/\partial y$  dan  $\partial u/\partial z$  tidak diperhitungkan bahwa  $u$  sedang mengalami perubahan terhadap waktu dengan cepat.

Aliran pada gelombang air tergolong pada aliran dengan akselerasi yang besar, karena itu perlu diperhitungkan adanya percepatan terhadap waktu pada diferensial ruang.

Hutahaean (2008b), (2012), dalam merumuskan persamaan kontinuitas untuk aliran dengan akselerasi besar mendapatkan diferensial ruang yang memperhitungkan percepatan lokal untuk suatu fungsi  $f = f(x,y,z,t)$ , yaitu

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} \right) \frac{1}{u} \quad (5)$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} \right) \frac{1}{v} \quad (6)$$

$$\frac{\delta f}{\delta z} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} \right) \frac{1}{w} \quad (7)$$

Dengan bentuk diferensial ruang ini, didefinisikan percepatan total pada arah sumbu-x adalah,

$$\frac{Du}{dt} = \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{\text{lokal}} + \left( u \frac{\delta u}{\delta x} + v \frac{\delta u}{\delta y} + w \frac{\delta u}{\delta z} \right)_{\text{konvektif}} \quad (8)$$

Substitusi persamaan-persamaan diferensial ruang yang memperhitungkan percepatan lokal pada percepatan konvektif, maka percepatan total adalah

$$\frac{Du}{dt} = 4 \frac{\partial u}{\partial t} + 3 \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (9)$$

Dengan cara yang sama dapat diperoleh percepatan total pada arah sumbu-y dan pada arah sumbu-z adalah,

$$\frac{Dv}{dt} = 4 \frac{\partial v}{\partial t} + 3 \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (10)$$

$$\frac{Dw}{dt} = 4 \frac{\partial w}{\partial t} + 3 \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (11)$$

**c. Gaya penggerak**

Gaya penggerak adalah perbedaan tekanan, dimana pada persamaan Euler dinyatakan oleh  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ ,  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$

dan  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$  Mengingat tekanan  $p$  adalah fungsi dari fluk-

tuasi muka air  $h = h(x,y,z,t)$ , dan kecepatan  $u = u(x,y,z,t)$ ,  $v = v(x,y,z,t)$ , dan  $w = w(x,y,z,t)$ , yang berubah sangat cepat, maka  $p = p(x,y,z,t)$ , juga akan berubah sangat cepat, sehingga diferensial ruang untuk tekanan  $p$  adalah

$$\frac{\delta p}{\delta x} = \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) \frac{1}{u} \quad (12)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) \frac{1}{v} \quad (13)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) \frac{1}{w} \quad (14)$$

Substitusi **Persamaan 12** ke **Persamaan 9**, **Persamaan 13** ke **Persamaan 10** dan **Persamaan 14** ke **Persamaan 4** maka diperoleh persamaan momentum arah-x, arah-y dan arah-z secara berurutan adalah,

$$4 \frac{\partial u}{\partial t} + 3 \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{1}{2\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) \frac{1}{u} \quad (15)$$

$$4 \frac{\partial v}{\partial t} + 3 \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = - \frac{1}{2\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) \frac{1}{v} \quad (16)$$

$$4 \frac{\partial w}{\partial t} + 3 \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{1}{2\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) \frac{1}{w} \quad (17)$$

Adanya faktor 1/2 pada ruas kanan adalah hasil percobaan bahwa persamaan memberikan hasil yang baik bila dikalikan dengan faktor tersebut. Terlihat pada gaya penggerak pada arah-x terdapat kontribusi dari gaya penggerak pada arah-y,  $\partial p/\partial y$ , dan pada arah-z,  $\partial p/\partial z$ , begitu juga sebaliknya. Selain itu terlihat bahwa perubahan tekanan  $\partial p/\partial t$  dapat menjadi gaya penggerak. Bahwa terdapat perubahan gaya horisontal menjadi gaya vertikal atau sebaliknya serta gaya pada horisontal arah-x diubah menjadi gaya pada horisontal arah-y dan sebaliknya, dapat diperjelas dengan persamaan keseimbangan momentum yaitu (Hutahaean (2008b), (2012)),

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{1}{u} + \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \frac{1}{v} + \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{1}{w} = 0 \quad (18)$$

Persamaan keseimbangan momentum ini dapat ditulis sebagai persamaan momentum-z dan dikerjakan persamaan Euler dan **Persamaan 4**,

$$- \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{w}{u} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \frac{w}{v} \quad (19)$$

Persamaan ini menyatakan bahwa gaya penggerak pada arah sumbu-z adalah berasal dari gaya penggerak pada arah sumbu-x dan dari gaya penggerak pada arah sumbu-y.

Relasi pada **Persamaan 19**, disubstitusikan ke persamaan momentum, **Persamaan 15**, **16** dan **17** serta persamaan dibagi dengan 4,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{3}{4} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{1}{8\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{w^2}{u} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{w^2}{v} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \frac{1}{u}$$

atau

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{3}{4} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{1}{8\rho} \left( \frac{1}{u} \frac{\partial p}{\partial t} + \left( 1 + \frac{w^2}{u^2} \right) \frac{\partial p}{\partial x} + \left( \frac{v}{u} + \frac{w^2}{uv} \right) \frac{\partial p}{\partial y} \right) \quad (20)$$

Dengan cara yang sama, persamaan momentum-y adalah

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{3}{4} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = - \frac{1}{8\rho} \left( \frac{1}{v} \frac{\partial p}{\partial t} + \left( \frac{u}{v} + \frac{w^2}{uv} \right) \frac{\partial p}{\partial x} + \left( 1 + \frac{w^2}{v^2} \right) \frac{\partial p}{\partial y} \right) \quad (21)$$

Persamaan momentum-z

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{3}{4} \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{1}{8\rho} \frac{1}{w} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (22)$$

Pada persamaan-persamaan momentum tersebut terdapat variabel,  $v/u$ ,  $w^2/u^2$  dan lain sebagainya, yang merupakan variabel tidak berdimensi. Untuk mendapatkan bentuk persamaan dari variabel tersebut, digunakan teori potensial aliran. Potensial aliran gelombang yang bergerak pada arah-x (**Gambar 1**) adalah (Hutahaean, (2008a), (2008c), (2010b)),

$$\phi(\xi, z, t) = G e^{kh} \beta(z) \cos k\xi \sin \sigma t$$

dimana,

$$\beta = \alpha e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)}, \quad \beta_1 = \alpha e^{k(h+z)} - e^{-k(h+z)}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{1 + \frac{\partial h}{\partial \xi}}{1 - \frac{\partial h}{\partial \xi}} + \frac{1 - \frac{\partial h}{\partial \xi}}{1 + \frac{\partial h}{\partial \xi}} \right) \quad \text{dimana} \quad \frac{\partial h}{\partial \xi} \quad \text{adalah}$$

kemiringan dasar perairan pada arah- $\xi$ .  $G$  adalah suatu konstanta dan  $k$  adalah bilangan gelombang sedangkan

$h$  adalah kedalaman perairan terhadap muka air diam. Dengan  $\xi = x \cos \theta + y \sin \theta$ , dimana  $\theta$  adalah arah gelombang terhadap sumbu- $x$  (**Gambar (1)**), maka persamaan potensial aliran gelombang menjadi,

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z, t) &= Ge^{kh} \beta(z) \cos k(x \cos \theta + y \sin \theta) \sin \sigma \\ u &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} = k \cos \theta Ge^{kh} \beta(z) \sin k(x \cos \theta + y \sin \theta) \sin \sigma \\ v &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} = k \sin \theta Ge^{kh} \beta(z) \sin k(x \cos \theta + y \sin \theta) \sin \sigma \end{aligned}$$

Dari kedua persamaan tersebut diperoleh,  $\frac{u}{v} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

dan  $\frac{v}{u} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$   $\frac{v}{u}$  dan  $\frac{u}{v}$  adalah merupakan suatu

koefisien distribusi.  $v/u$  adalah faktor distribusi yang mendistribusikan gaya penggerak pada arah- $y$  menjadi gaya penggerak pada arah- $x$ , sedangkan  $u/v$  adalah sebaliknya, maka harus berharga positif

$$\left| \frac{u}{v} \right| = \left| \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right| \text{ dan } \left| \frac{v}{u} \right| = \left| \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right| \quad (23)$$

Selanjutnya akan dirumuskan bentuk dari  $w/u$  dan  $w^2/u^2$

$$\begin{aligned} w &= -\frac{\partial \phi}{\partial z} = -Gke^{kh} \beta_1(z) \cos k(x \cos \theta + y \sin \theta) \sin \sigma \\ \frac{w}{u} &= \frac{-Gke^{kh} \beta_1(z) \cos k(x \cos \theta + y \sin \theta) \sin \sigma}{k \cos \theta Ge^{kh} \beta(z) \sin k(x \cos \theta + y \sin \theta) \sin \sigma} \\ &= \frac{-\beta_1(z) \cos k(x \cos \theta + y \sin \theta)}{\cos \theta \beta(z) \sin k(x \cos \theta + y \sin \theta)} \end{aligned}$$

$w/u$  dalam hal ini adalah suatu koefisien distribusi yang mengubah gaya pada arah- $x$  menjadi gaya pada arah- $z$ , pada suatu titik pada kedalaman  $z$  tertentu, jadi harus berharga positif dan bukan merupakan fungsi dari posisi ( $x, y$ ).

$$\frac{w}{u} = \left| \frac{\beta_1(z)}{\cos \theta \beta(z)} \right| \text{ dan } = \frac{\beta_1^2(z)}{\cos^2 \theta \beta^2(z)} \quad (24)$$

Dengan cara yang sama dapat diperoleh,

$$\begin{aligned} \frac{w}{v} &= \left| \frac{\beta_1(z)}{\sin \theta \beta(z)} \right|, = \frac{\beta_1^2(z)}{\sin^2 \theta \beta^2(z)} \text{ dan } \frac{w^2}{uv} \\ &= \left| \frac{\beta_1^2(z)}{\cos \theta \sin \theta \beta^2(z)} \right| \quad (25) \end{aligned}$$

$1/u$  dan  $1/v$  adalah merupakan faktor distribusi pada suatu kedalaman- $z$ . Pada **Persamaan (27)**,

ditunjukkan bahwa  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{hs}}{\partial t} = g \frac{\partial \eta}{\partial t}$  maka

$$\frac{1}{u\rho} \frac{\partial p_{hs}}{\partial t} = \frac{1}{u} g \frac{\partial \eta}{\partial t} \text{ Dimensi dari } u, \text{ yaitu } (m/dt),$$

saling menghilangkan dengan dimensi dari  $\partial h/\partial t$ , yang juga berdimensi  $(m/dt)$ . Sehingga dimensi akhir dari  $\frac{1}{u} g \frac{\partial \eta}{\partial t}$  adalah  $(m/dt^2)$  yang sama dengan dimensi dari

$\partial u/\partial t$ . Dari persamaan potensial aliran dan dengan mengambil harga positif, diperoleh

$$\frac{1}{u} = \left| \frac{1}{\cos \theta \beta(z)} \right| \text{ dan } \frac{1}{v} = \left| \frac{1}{\sin \theta \beta(z)} \right| \quad (26)$$

Dalam hal  $\cos \theta = 0$ , maka hal ini menunjukkan bahwa tidak ada aliran pada arah sumbu- $x$  atau  $u = 0$ , maka tidak ada gaya penggerak pada arah- $x$ . Maka dalam hal ini harga-harga koefisien distribusi gaya pada arah- $x$  adalah nol, yaitu

$$\frac{1}{u} = \frac{w}{u} = \frac{w^2}{u^2} = \frac{w^2}{uv} = 0 \text{ Begitu juga dalam hal } \sin \theta = 0$$

dimana  $v = 0$  tidak ada gaya penggerak pada arah- $y$ ,

$$\text{maka } \frac{1}{v} = \frac{w}{v} = \frac{w^2}{v^2} = \frac{w^2}{uv} = 0$$

### 3. Gaya Penggerak Hidrostatik dan Hidrodinamis

Seperti telah disebutkan pada bagian terdahulu bahwa  $p$  terdiri dari tekanan hidrostatik dan hidrodinamis yaitu  $p = p_{hs} + p_{hd}$ , dengan bentuk seperti yang akan dibahas pada bagian berikut.

#### a. Gaya Penggerak Hidrostatik

Bentuk dari tekanan hidrostatik sudah banyak dikenal yaitu gaya berat air (Dean (1984)), yaitu  $p_{hs} = \rho g(\eta - z)$ . Maka gaya penggerak hidrostatik adalah,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{hs}}{\partial x} &= g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{hs}}{\partial y} = g \frac{\partial \eta}{\partial y} \text{ dan} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{hs}}{\partial t} &= g \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (27) \end{aligned}$$

#### b. Gaya Penggerak Hidrodinamis

Gaya hidrodinamis akan dirumuskan dengan menggunakan persamaan kontinuitas untuk gelombang panjang, yaitu  $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0$  Persamaan ini dikalikan dengan  $dz$  dan diintegrasikan terhadap kedalaman, dimana integrasi suku ke 3 dapat dengan mudah diselesaikan. Selanjutnya persamaan hasil integrasi ditulis menjadi persamaan untuk kecepatan vertikal  $w$  dan diturunkan terhadap waktu  $t$ ,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_z^\eta \frac{\partial u}{\partial x} dz + \frac{\partial}{\partial t} \int_z^\eta \frac{\partial v}{\partial y} dz + \frac{\partial w_\eta}{\partial t} \quad (28)$$

Dimana  $\eta$  adalah elevasi muka air akibat gelombang terhadap muka air diam (**Gambar (5.1)**),  $w$  adalah kecepatan vertikal pada suatu posisi kedalaman  $z$ ,  $w_\eta$  adalah kecepatan vertikal pada permukaan air. Substitusi  $\partial w / \partial t$  ke persamaan momentum- $z$ , **Persamaan (4)**,

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{hd}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} \int_z^\eta \frac{\partial u}{\partial x} dz + \frac{\partial}{\partial t} \int_z^\eta \frac{\partial v}{\partial y} dz + \frac{\partial w_\eta}{\partial t} + \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (29)$$

Tekanan hidrodinamis diperoleh dengan mengintegrasikan persamaan tersebut terhadap kedalaman dan dengan mengerjakan syarat batas dinamik permukaan  $p_\eta = 0$ , pengerjaan sifat aliran tidak berotasi pada suku ke 4 pada ruas kanan, yaitu

$$\left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \text{ dan } \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0$$

$$\frac{p_{hd}}{\rho} = \int_z^\eta \left( \frac{\partial}{\partial t} \int_z^\eta \frac{\partial u}{\partial x} dz \right) dz + \int_z^\eta \left( \frac{\partial}{\partial t} \int_z^\eta \frac{\partial v}{\partial y} dz \right) dz + \frac{\partial w_\eta}{\partial t} (\eta - z) + \frac{1}{2} \int_z^\eta \left( \frac{\partial u^2}{\partial z} + \frac{\partial v^2}{\partial z} + \frac{\partial w^2}{\partial z} \right) dz \quad (30)$$

Gaya penggerak hidrodinamis pada arah- $x$ ,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{hd}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_z^\eta \left( \frac{\partial}{\partial t} \int_z^\eta \frac{\partial u}{\partial x} dz \right) dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_z^\eta \left( \frac{\partial}{\partial t} \int_z^\eta \frac{\partial v}{\partial y} dz \right) dz + \frac{\partial w_\eta}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_\eta}{\partial x \partial t} (\eta - z) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_z^\eta \left( \frac{\partial u^2}{\partial z} + \frac{\partial v^2}{\partial z} + \frac{\partial w^2}{\partial z} \right) dz \quad (31)$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh gaya penggerak hidrodinamis pada arah- $y$  adalah

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{hd}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_z^\eta \left( \frac{\partial}{\partial t} \int_z^\eta \frac{\partial u}{\partial x} dz \right) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_z^\eta \left( \frac{\partial}{\partial t} \int_z^\eta \frac{\partial v}{\partial y} dz \right) dz + \frac{\partial w_\eta}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_\eta}{\partial y \partial t} (\eta - z) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \int_z^\eta \left( \frac{\partial u^2}{\partial z} + \frac{\partial v^2}{\partial z} + \frac{\partial w^2}{\partial z} \right) dz \quad (32)$$

Bila **Persamaan (31)** dan **(32)** dikerjakan pada permukaan air, pada  $z = \eta$  (catatan, dari **Persamaan (30)**, pada  $z = \eta$ ,  $p_{hd,\eta} = 0$ , sesuai dengan syarat batas dinamik permukaan), maka suku dalam integral pada ruas kanan persamaan menjadi nol, begitu juga suku ke 4 juga menjadi nol. Gaya penggerak hidrodinamis menjadi,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{hd}}{\partial x} = \frac{\partial w_\eta}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{hd}}{\partial y} = \frac{\partial w_\eta}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial y} \text{ dan}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{hd}}{\partial t} = \frac{\partial w_\eta}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (33)$$

Jadi gaya penggerak hidrodinamis pada **Persamaan-persamaan (31)** dan **(32)**, adalah gaya hidrodinamis permukaan, dengan distribusi terhadap kedalaman  $z$  ditentukan oleh suku-suku 1,2,4 dan 5. Koreksi atau distribusi gaya penggerak hidrodinamis permukaan terhadap kedalaman  $z$  dapat digantikan dengan faktor-faktor distribusi seperti yang telah dibahas terdahulu yaitu  $w/u$ ,  $w^2/u^2$ ,  $w/v$ ,  $w^2/v^2$  dan  $w^2/uv$  yang merupakan fungsi dari kedalaman  $z$ . Dengan demikian **Persamaan-persamaan (31)** dan **(32)** dapat digantikan dengan gaya penggerak hidrodinamis permukaan dikalikan dengan suatu faktor distribusi. Dengan demikian, persamaan momentum- $x$  adalah

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{3}{8} \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2 + w^2) = -\frac{1}{8} \left| \frac{1}{\cos \theta \beta(z)} \right| \left( g + \frac{\partial w_\eta}{\partial t} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{1}{8} \left( 1 + \frac{\beta_1^2(z)}{\cos^2 \theta \beta^2(z)} \right) \left( g + \frac{\partial w_\eta}{\partial t} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{8} \left( \left| \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right| + \left| \frac{\beta_1^2(z)}{\cos \theta \sin \theta \beta^2(z)} \right| \right) \left( g + \frac{\partial w_\eta}{\partial t} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (34)$$

Sedangkan persamaan momentum- $y$  adalah

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{3}{8} \frac{\partial}{\partial y} (u^2 + v^2 + w^2) = -\frac{1}{8} \left| \frac{1}{\sin \theta \beta(z)} \right| \left( g + \frac{\partial w_\eta}{\partial t} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{1}{8} \left( \left| \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right| + \left| \frac{\beta_1^2(z)}{\cos \theta \sin \theta \beta^2(z)} \right| \right) \left( g + \frac{\partial w_\eta}{\partial t} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{8} \left( 1 + \frac{\beta_1^2(z)}{\sin^2 \theta \beta^2(z)} \right) \left( g + \frac{\partial w_\eta}{\partial t} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (35)$$

sedangkan persamaan momentum- $z$ ,

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{3}{8} \frac{\partial}{\partial z} (u^2 + v^2 + w^2) = -\frac{1}{8 \beta_1(z)} \left( g + \frac{\partial w_\eta}{\partial t} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (36)$$

$\partial w / \partial t$  pada **Persamaan (36)** disubstitusi dengan **Persamaan (28)**,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_z^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \frac{\partial}{\partial t} \int_z^{\eta} \frac{\partial v}{\partial y} dz + \frac{\partial w_{\eta}}{\partial t} + \frac{3}{8} \frac{\partial}{\partial z} (u^2 + v^2 + w^2) = -\frac{1}{8\beta_1(z)} \left( g + \frac{\partial w_{\eta}}{\partial t} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

Pada perairan dangkal, dimana distribusi kecepatan pada sepanjang kedalaman hampir seragam, suku 4 pada ruas kiri berharga sangat kecil sehingga dapat diabaikan. Selanjutnya persamaan dikerjakan pada  $z = h$ , maka suku ke satu dan ke dua ruas kiri persamaan menjadi nol dan

$$\frac{\partial w_{\eta}}{\partial t} = -\frac{1}{8\beta_1(\eta)} \left( g + \frac{\partial w_{\eta}}{\partial t} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} \text{ atau}$$

$$\frac{\partial w_{\eta}}{\partial t} = -\frac{g}{\left( 8\beta_1(\eta) + \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)} \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (37)$$

Untuk selanjutnya  $\partial w_{\eta} / \partial t$  pada persamaan momentum, dihitung dengan menggunakan **Persamaan (37)**.

#### 4. Persamaan Muka Air

Persamaan kontinuitas yang digunakan adalah persamaan kontinuitas yang disuperposisikan dengan persamaan kekekalan energi, Hutahaean (2007a), (2009),

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial E_k}{\partial t} + \frac{\partial u E_k}{\partial x} + \frac{\partial v E_k}{\partial y} + \frac{\partial w E_k}{\partial z} \right) = 0 \quad (38)$$

dimana berlaku persamaan kekekalan masa,

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (39)$$

serta persamaan kekekalan energi,

$$\left( \frac{\partial E_k}{\partial t} + \frac{\partial u E_k}{\partial x} + \frac{\partial v E_k}{\partial y} + \frac{\partial w E_k}{\partial z} \right) = 0 \quad (40)$$

$$E_k = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2g} = \text{energi kinetik. Pada persamaan}$$

persamaan kekekalan energi ini juga dikerjakan diferensial ruang yang memperhitungkan adanya percepatan terhadap waktu,

$$\frac{\partial E_k}{\partial t} + \frac{\partial u E_k}{\partial x} + \frac{\partial v E_k}{\partial y} + \frac{\partial w E_k}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial u E_k}{\partial t} + \frac{1}{v} \frac{\partial v E_k}{\partial t} + \frac{1}{w} \frac{\partial w E_k}{\partial t} + \frac{u}{v} \frac{\partial v E_k}{\partial x} + \frac{u}{w} \frac{\partial w E_k}{\partial x} + \frac{v}{u} \frac{\partial u E_k}{\partial y} + \frac{v}{w} \frac{\partial w E_k}{\partial y} +$$

$$\frac{w}{u} \frac{\partial u E_k}{\partial z} + \frac{w}{v} \frac{\partial v E_k}{\partial z} = 0$$

Pada diferensial waktu suku ke 5, 6 dan 7 dikerjakan operasi diferensial parsial dan persamaan dibagi 4,

$$\frac{\partial E_k}{\partial t} + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial u E_k}{\partial x} + \frac{\partial v E_k}{\partial y} + \frac{\partial w E_k}{\partial z} + \frac{E_k}{u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{E_k}{v} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{E_k}{w} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{u}{v} \frac{\partial v E_k}{\partial x} + \frac{u}{w} \frac{\partial w E_k}{\partial x} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{v}{u} \frac{\partial u E_k}{\partial y} + \frac{v}{w} \frac{\partial w E_k}{\partial y} + \frac{w}{u} \frac{\partial u E_k}{\partial z} + \frac{w}{v} \frac{\partial v E_k}{\partial z} \right) = 0 \quad (41)$$

**Persamaan (41)** ini adalah persamaan kekekalan energi yang digunakan pada pemodelan.  $E_k/u$  mempunyai dimensi **dt** dimana dimensi ini hilang oleh dimensi  $\partial u / \partial t$  sehingga suku  $E_k/u \partial u / \partial t$  mempunyai dimensi  $m/dt$ , dimensi ini adalah sama dengan dimensi dari  $\partial E_k / \partial t$ . Jadi dalam hal ini  $E_k/u$  dapat dipandang sebagai bilangan yang tidak berdimensi atau suatu koefisien. Begitu juga halnya dengan  $E_k/v$  dan  $E_k/w$ . Sedangkan  $u/v$ ,  $u/w$  dan lain sebagainya terlihat jelas sebagai bilangan tidak berdimensi. Dengan mengerjakan berbagai koefisien pada suku diferensial tersebut pada  $z = h$ , dan dikerjakan sifat potensial aliran seperti pada bagian 2.d, diperoleh

$$\frac{E_k}{u} = \frac{E_{k\eta}}{u_{\eta}} = \frac{\beta^2(\eta) + \beta^2(\eta) + \beta_1^2(\eta)}{2g\beta(\eta)},$$

$$\frac{E_k}{v} = \frac{E_{k\eta}}{v_{\eta}} = \frac{\beta^2(\eta) + \beta^2(\eta) + \beta_1^2(\eta)}{2g\beta(\eta)}$$

$$\frac{E_k}{w} = \frac{E_{k\eta}}{w_{\eta}} = \frac{\beta^2(\eta) + \beta^2(\eta) + \beta_1^2(\eta)}{2g\beta_1(\eta)} \quad (42)$$

$$\frac{u}{v} = \frac{u_{\eta}}{v_{\eta}} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad \frac{u}{w} = \frac{u_{\eta}}{w_{\eta}} = \frac{\beta(\eta)}{\beta_1(\eta)},$$

$$\frac{v}{u} = \frac{v_{\eta}}{u_{\eta}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \frac{v}{w} = \frac{v_{\eta}}{w_{\eta}} = \frac{\beta(\eta)}{\beta_1(\eta)},$$

$$\frac{w}{u} = \frac{w_{\eta}}{u_{\eta}} = \frac{\beta_1(\eta)}{\beta(\eta)}, \quad \frac{w}{v} = \frac{w_{\eta}}{v_{\eta}} = \frac{\beta_1(\eta)}{\beta(\eta)} \quad (43)$$

Sebenarnya harga berbagai koefisien tersebut dapat diambil pada suatu kedalaman  $z = z_0$ , tetapi hasil penelitian menunjukkan hasil yang baik bila dikerjakan pada  $z = h$ .

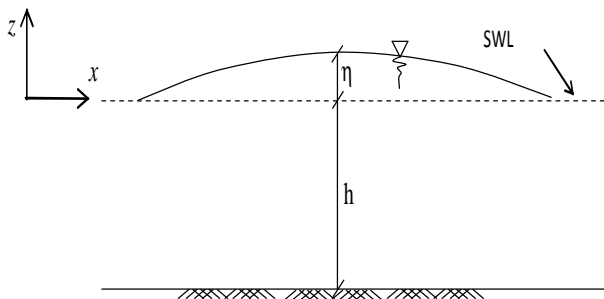
### 5. Integrasi Terhadap Kedalaman

Untuk mengubah problem 3 dimensi menjadi problem 2 dimensi, berbagai persamaan dasar tersebut diintegrasikan terhadap kedalaman. Integrasi dilakukan dengan mengerjakan aturan Leibniz, serta dengan menggunakan kecepatan rata-rata kedalaman (Dean (1984). Mengingat keterbatasan ruang, maka proses integrasi tidak diuraikan

#### 5.1 Persamaan kontinuitas yang terintegrasi terhadap kedalaman.

Integrasi persamaan kontinuitas terhadap kedalaman, **Persamaan (39)**, menghasilkan

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \beta_u UH}{\partial x} + \frac{\partial \beta_v VH}{\partial y} = 0$$



**Gambar 2. Fluktuasi muka air akibat gelombang**

dimana

$h$  = elevasi muka air terhadap muka air diam (**Gambar (2)**)

$U$  = kecepatan rata-rata kedalaman pada arah- $x$ ,

$$U = \frac{1}{\beta_u H} \int_{-h}^{\eta} u dz$$

$V$  = kecepatan rata-rata kedalaman pada arah- $y$ ,

$$V = \frac{1}{\beta_v H} \int_{-h}^{\eta} v dz$$

$H$  = kedalaman total =  $h + \eta$  (**Gambar (2)**)

$h$  = kedalaman perairan terhadap muka air diam (**Gambar (2)**)

Mengingat persamaan akan dikerjakan pada perairan dangkal, dimana distribusi kecepatan hampir seragam pada seluruh kedalaman, maka dapat diambil koefisien

integrasi  $\beta_u = \beta_v = 1$ , dimana  $U = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} u dz$  dan  $v = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} v dz$

serta persamaan kekekalan masa yang terintegrasi terhadap kedalaman adalah

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial UH}{\partial x} + \frac{\partial VH}{\partial y} = 0 \tag{44}$$

Hasil integrasi terhadap kedalaman persamaan kekekalan energi, dengan anggapan distribusi kecepatan pada seluruh kedalaman adalah seragam adalah,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial HE_k}{\partial t} + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial UE_k H}{\partial x} + \frac{\partial VE_k H}{\partial y} + \frac{E_k}{u} \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \right. \\ & \left. \frac{E_k}{v} \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial v}{\partial t} dz + \frac{E_k}{w} \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial w}{\partial t} dz \right) \\ & + \frac{1}{4} \left( \frac{u}{v} \frac{\partial VE_k H}{\partial x} + \frac{u}{w} \frac{\partial WE_k H}{\partial x} + \frac{v}{u} \frac{\partial UE_k H}{\partial y} + \frac{v}{w} \frac{\partial WE_k H}{\partial y} \right) \\ & + \frac{1}{4} \left( (w_{\eta} E_{k,\eta} - w_{-h} E_{k,-h}) + \frac{w}{u} (u_{\eta} E_{k,\eta} - u_{-h} E_{k,-h}) + \right. \\ & \left. \frac{w}{v} (v_{\eta} E_{k,\eta} - v_{-h} E_{k,-h}) \right) = 0 \end{aligned} \tag{45}$$

Selanjutnya sebagaimana halnya pada Hutahaean (2007a), sebagai persamaan muka air adalah superposisi antara **Persamaan (44)** dengan **Persamaan (45)**,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial UH}{\partial x} + \frac{\partial VH}{\partial y} \\ & + \frac{\partial HE_k}{\partial t} + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial UE_k H}{\partial x} + \frac{\partial VE_k H}{\partial y} + \frac{E_k}{u} \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \right. \\ & \left. \frac{E_k}{v} \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial v}{\partial t} dz + \frac{E_k}{w} \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial w}{\partial t} dz \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{u}{v} \frac{\partial VE_k H}{\partial x} + \frac{u}{w} \frac{\partial WE_k H}{\partial x} + \right. \\ & \left. \frac{v}{u} \frac{\partial UE_k H}{\partial y} + \frac{v}{w} \frac{\partial WE_k H}{\partial y} \right) + \frac{1}{4} \left( (w_{\eta} E_{k,\eta} - w_{-h} E_{k,-h}) + \right. \\ & \left. \frac{w}{u} (u_{\eta} E_{k,\eta} - u_{-h} E_{k,-h}) + \frac{w}{v} (v_{\eta} E_{k,\eta} - v_{-h} E_{k,-h}) \right) = 0 \end{aligned} \tag{46}$$

$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial t} dz$ ,  $\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial v}{\partial t} dz$  dan  $\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial w}{\partial t} dz$  disubstitusi dengan

hasil integrasi persamaan momentum- $x$ ,  $y$  dan  $z$ , dengan bentuk berbagai koefisien pada suku diferensial adalah seperti pada **Persamaan-persamaan (43)** dan **(44)**.

#### a. Persamaan momentum-x

**Persamaan (3.7a)** diintegrasikan terhadap kedalaman,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{3}{8H} \frac{\partial}{\partial x} (U^2 H + V^2 H + W^2 H) =$$

$$\begin{aligned}
 & - \left| \frac{1}{8H \cos \theta} \left( g + \frac{\partial w_\eta}{\partial t} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} \frac{1}{\beta(z)} dz \right. \\
 & - \frac{1}{8H} \left( g + \frac{\partial w_\eta}{\partial t} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} \left( 1 + \frac{\beta_1^2(z)}{\cos^2 \theta \beta^2(z)} \right) dz \\
 & - \frac{1}{8H} \left( g + \frac{\partial w_\eta}{\partial t} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} \left( \left| \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right| + \left| \frac{\beta_1^2(z)}{\cos \theta \sin \theta \beta^2(z)} \right| \right) dz \\
 & - \frac{U}{H} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{3}{8H} \left( (u_\eta^2 + v_\eta^2 + w_\eta^2) \frac{\partial \eta}{\partial x} - (u_{-h}^2 + v_{-h}^2 + w_{-h}^2) \frac{\partial h}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{47}$$

b. Persamaan momentum-y

Persamaan (3.7b) diintegrasikan terhadap kedalaman,

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{3}{8H} \frac{\partial}{\partial y} (U^2 H + V^2 H + W^2 H) = \\
 & - \left| \frac{1}{8H \sin \theta} \left( g + \frac{\partial w_\eta}{\partial t} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} \frac{1}{\beta(z)} dz \right. \\
 & - \frac{1}{8H} \left( g + \frac{\partial w_\eta}{\partial t} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\beta_1^2(z)}{\cos \theta \sin \theta \beta^2(z)} \right) dz \\
 & - \frac{1}{8H} \left( g + \frac{\partial w_\eta}{\partial t} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} \left( 1 + \frac{\beta_1^2(z)}{\sin^2 \theta \beta^2(z)} \right) dz \\
 & - \frac{V}{H} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{3}{8H} \left( (u_\eta^2 + v_\eta^2 + w_\eta^2) \frac{\partial \eta}{\partial y} - (u_{-h}^2 + v_{-h}^2 + w_{-h}^2) \frac{\partial h}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{48}$$

c. Persamaan momentum-z

Persamaan (3.7c) diintegrasikan terhadap kedalaman,

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{3}{8H} \left( (u_\eta^2 + v_\eta^2 + w_\eta^2) - (u_{-h}^2 + v_{-h}^2 + w_{-h}^2) \right) = \\
 & - \frac{1}{8H} \left( g + \frac{\partial w_\eta}{\partial t} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} \frac{1}{\beta_1(z)} dz - \frac{W}{H} \frac{\partial \eta}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{49}$$

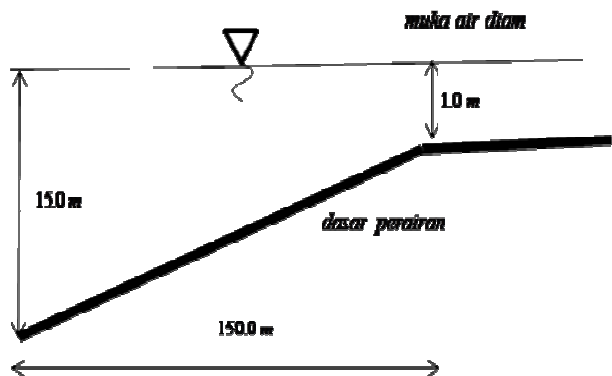
$u_h, v_h$  dan  $w_h$  adalah kecepatan pada arah-x, arah-y dan arah-z pada permukaan air, sedangkan  $u_{-h}, v_{-h}$  dan  $w_{-h}$  adalah kecepatan pada dasar perairan, sedangkan integrasi pada ruas kanan persamaan dapat diselesaikan secara numeris, pada penelitian in digunakan integrasi numeris dari Newton-Cote (Hutahaean (2005), (2010a)).

6. Hasil Persamaan

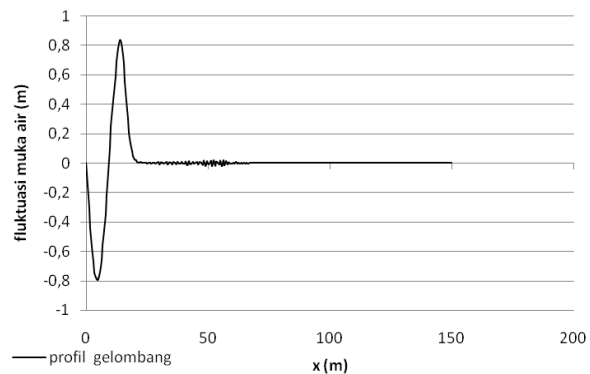
Persamaan muka air dan persamaan momentum yang terintegrasi terhadap kedalaman diselesaikan secara numeris, dimana diferensial ruang diselesaikan dengan metoda selisih hingga, dengan panjang grid  $\pm 1/40$  panjang gelombang. Diferensial waktu diselesaikan dengan metoda prediktor-korektor berbasis integrasi numeris dari Newton-Cote (Hutahaean (2007a)), dengan langkah waktu  $\delta t = 1/300$  periode gelombang.

Model dikerjakan pada suatu profil batimetri seperti pada Gambar 3 dimana kedalaman mula-mula adalah 15 m, pada jarak 150 m, kedalaman menjadi 1.0 m dan selanjutnya datar dengan kedalaman 1.0 m. Gelombang yang digunakan adalah gelombang sinusoidal dengan periode 8 detik dengan amplitudo 0.8 m atau tinggi gelombang 1.6 m (Gambar 4).

Pada Gambar 5, pada garis lintasan puncak gelombang, terlihat bahwa semula terjadi pembesaran tinggi gelombang (shoaling) selanjutnya terjadi penurunan tinggi gelombang atau breaking. Pada peralihan kemiringan dasar perairan yaitu pada jarak 150 m, terlihat terjadi lonjakan muka air dan kemudian menurun dengan cepat. Pada peralihan kemiringan tersebut terjadi breaking yang kedua. Pada perairan dangkal, profil gelombang tidak lagi berbentuk sinusoidal tetapi menjadi berbentuk gelombang cnoidal, sebagaimana yang dihasilkan pada Hutahaean (2011) dan (2012).

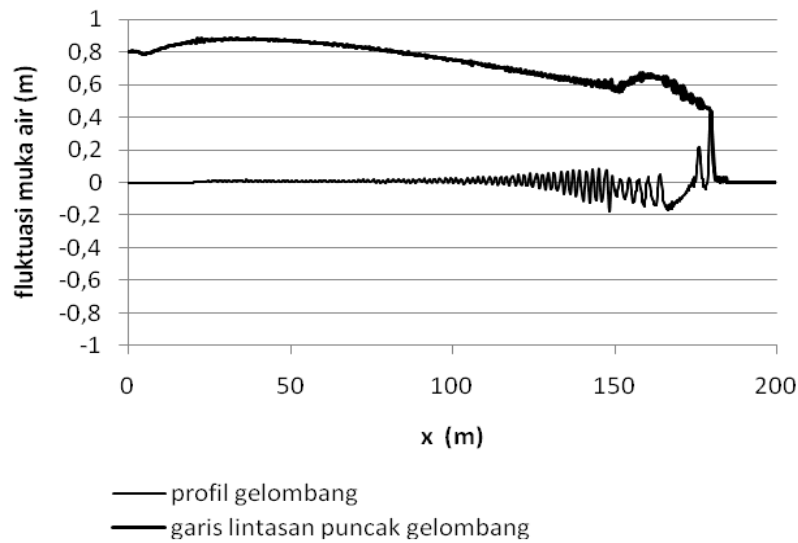


Gambar 3. Profil dasar perairan untuk simulasi



Gambar 4. Profil gelombang mula-mula





Gambar 5. Profil gelombang pada kedalaman 1 m

Hal lain yang perlu diperhatikan adalah panjang gelombang menjadi sangat pendek (**Gambar 4**) yaitu pada kedalaman 15 m panjang gelombang sekitar 25-30 m, dimana panjang gelombang dari teori gelombang linier untuk perioda gelombang 8 detik, pada kedalaman 15 m adalah 81 m. Hasil pengukuran panjang gelombang memang tidak tersedia. Tetapi bila diamati secara visual terlihat bahwa profil gelombang adalah cukup curam. Banyaknya perahu yang terbalik oleh gelombang, menunjukkan curamnya profil gelombang atau pendeknya panjang gelombang, begitu juga olahraga selancar air dapat dilakukan karena profil muka gelombang yang curam.

Dari hasil eksekusi model ini, didapatkan bahwa persamaan yang dikembangkan dapat mensimulasikan shoaling dan breaking dengan lebih baik dari hasil penelitian sebelumnya yaitu (Hutahaean (2012)).

### 7. Kesimpulan

1. Pada penelitian ini dihasilkan suatu persamaan momentum, dimana percepatan tidak hanya disebabkan gaya penggerak pada arah sumbu yang bersangkutan, tetapi juga oleh gaya penggerak pada arah sumbu lain, yaitu gaya penggerak pada arah sumbu-x tidak hanya  $\partial p/\partial x$  saja, tetapi terdapat juga peranan  $\partial p/\partial y$  dan  $\partial p/\partial z$ . Hal ini sesuai dengan yang terjadi di alam, sebagai contoh angin yang bertiup pada permukaan air laut dapat membangkitkan gelombang dimana hal ini menunjukkan adanya fenomena perubahan gaya horisontal menjadi gaya vertikal, begitu juga gelombang yang ditimbulkan oleh kapal yang bergerak adalah berasal dari gaya horisontal dari dinding kapal. Selain itu terdapat gaya penggerak berupa perubahan tekanan terhadap waktu  $\partial p/\partial t$ .

2. Model yang dihasilkan dapat mensimulasikan shoaling dan breaking dengan baik. Panjang gelombang yang dihasilkan jauh lebih pendek dari panjang gelombang dari teori gelombang linier, dimana teori gelombang linier dirumuskan dengan anggapan gelombang panjang. Mengenai panjang gelombang ini memang tidak terdapat data hasil pengukuran, tetapi bila diamati di alam bahwa profil muka air akibat gelombang terlihat curam, maka panjang gelombang memang seharusnya pendek. Dengan panjang gelombang seperti pada teori gelombang linier maka profil gelombang akan sangat landai.
3. Hutahaean (2012), mengembangkan model gelombang pendek dengan tekanan hidrodinamis yang dirumuskan dengan menggunakan persamaan kontinuitas untuk aliran fluida berkakselerasi tinggi, dimana model tersebut juga dapat mensimulasikan breaking, tetapi tidak dapat memodelkan breaking untuk tinggi gelombang yang besar dan dengan panjang gelombang yang masih cukup besar yaitu kurang lebih separuh panjang gelombang teori gelombang linier. Begitu juga pada penelitian ini, pengembangan adalah dilakukan dengan memperbaiki tekanan hidrodinamis. Jadi untuk mengembangkan model gelombang yang lebih baik lagi adalah dengan memperbaiki tekanan atau gaya penggerak hidrodinamis pada persamaan momentum.
4. Pada penelitian ini, maupun pada Hutahaean (2012), tekanan hidrodinamis masih dirumuskan dengan menggunakan persamaan kontinuitas yang tidak memperhitungkan adanya percepatan. Hal ini dikarenakan masih belum didapatkan metoda integrasi yang lebih baik ataupun interpretasi yang lebih baik pada persamaan tersebut. Jadi prospek pengembangan lebih lanjut adalah dengan mengembangkan persamaan tekanan hidrodinamis dengan menggunakan persamaan kontinuitas untuk aliran berakselerasi tinggi.

## Daftar Pustaka

- Dean, R.G., and Dalrymple, 1984, *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Hutahaean, S.. 2005, Integrasi Numeris Dengan Menggunakan Polinomial Lagrange, *Jurnal Teknik Sipil*, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan, ITB, Volume 12 No.2, April 2005
- Hutahaean, S., 2007a, Pemodelan Dinamika Gelombang Dengan Mengerjakan Persamaan Kekekalan Energi, *Jurnal Teknik Sipil*, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan, ITB Volume 14 No.1, Januari 2007.
- Hutahaean, S., 2008a, Persamaan Gelombang Nonlinier Pada Dasar Perairan Miring, *Jurnal Teknik Sipil*, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan, ITB, Volume 15 No.1, April 2008.
- Hutahaean, S., 2008b, Momentum Equilibrium Equation Application in Airy's Long Wave Equation, *Jurnal Infrastruktur dan Lingkungan Binaan*, Volume IV, No. 1, 2008, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan, ITB.
- Hutahaean, S., 2008c, Model Refraksi-Difraksi Gelombang Oleh Batimetri, *Jurnal Teknik Sipil*, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan, ITB, Volume 15 No.2, Agustus 2008.
- Hutahaean, S., 2009, Model Refraksi-Difraksi Gelombang Air Oleh Batimetri dengan Mengerjakan Persamaan Kekekalan Energi, *Jurnal Teknik Sipil*, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan, ITB, Volume 16 No.1, April 2009.
- Hutahaean, S., 2010a, Penyelesaian Persamaan Vibrasi Dengan Integrasi Newton-Cote, *Jurnal Teknik Sipil*, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan, ITB, Volume 17 No.1, April 2010.
- Hutahaean, S., 2010b, Pengerjaan Metoda Inversi Integral pada Perumusan Persamaan Muka Air Gelombang Air Nonlinier, *Jurnal Teknik Sipil*, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan, ITB, Volume 17 No.2, Agustus 2010.
- Hutahaean, S., 2011, Deformasi Gelombang Air Sinusoidal Menjadi Gelombang Cnoidal, *Jurnal Teknik Sipil*, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan, ITB, Volume 18 No.2, Agustus 2011.
- Hutahaean,S., 2012, Pemodelan Gelombang dengan Menggunakan Tekanan Hidrodinamis yang dirumuskan dari Persamaan Kontinuitas untuk Fluida Berakselerasi, *Jurnal Teknik Sipil*, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan, ITB, Volume 19 No.2, Agustus 2012.