ISSN 0853-2982

JURNAL TEKNIK SIPIL

Jurnal Teoretis dan Terapan Bidang Rekayasa Sipil

Catatan Teknik (*Technical Notes*)

Pengerjaan Metoda Inversi Integral pada Perumusan Persamaan Muka Air Gelombang Air Nonlinier

Syawaluddin Hutahaean

Kelompok Keahlian Teknik Kelautan, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan, Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha No. 10 Bandung 40132, E-mail: syawaluddin@ocean.itb.ac.id

Abstrak

Pada paper ini persamaan muka air dari gelombang air diperoleh dengan mengintegrasikan persamaan syarat batas kinematik permukaan terhadap waktu. Integrasi dilakukan dengan metoda inversi integral dimana operasi integrasi diganti dengan operasi diferensiasi. Persamaan muka air yang dihasilkan merupakan superposisi dari sejumlah gelombang dengan amplitudo gelombang yang berbeda-beda, mempunyai karakteristik breaking dan dispersif.

Kata-kata kunci: *Syarat batas kinematik permukaan, metoda inversi integral.*

Abstract

In this paper water surface equation due to water wave is formulated by integrating kinematic surface water boundary condition equation with respect to time using integration inversion method, where integration operation is changed by differentiation operation. The resulted water surface equation is superposition of several wave with different amplitude and has breaking characteristic and dispersive.

Keywords: *Kinematic water surface bundary condition, integration inversion method.*

1. Pendahuluan

Perumusan persamaan gelombang air dimulai dari perumusan persamaan muka air terlebih dahulu. Persamaan gelombang air linier (Dean, 1984), persamaan gelombang air nonlinier dari Stoke (Sarpkaya, 1981), persamaan gelombang air nonlinier, Hutahaean (2007a) dan (2008a) dirumuskan dengan merumuskan persamaan muka air terlebih dahulu. Karena itu ketepatan suatu teori gelombang sangat ditentukan dari ketepatan persamaan muka air yang digunakan.

Pada perumusan persamaan muka air dijumpai suatu proses integrasi terhadap waktu suatu persamaan nonlinier. Pada perumusan persamaan gelombang linier, dilakukan proses linierisasi dengan anggapan panjang gelombang sangat panjang dan perairan sangat dalam sehingga tidak dijumpai proses integrasi persamaan nonlinier. Hutahaean (2007a) dan (2008a), merumuskan persamaan gelombang nonlinier dengan mengambil suatu harga konstan pada salah satu komponen persamaan muka air, sehingga tidak dijumpai integrasi persamaaan nonlinier.

Pada penelitian ini, persamaan muka air dirumuskan tanpa melakukan proses linierisasi maupun pengambilan suatu harga konstan pada komponen nonlinier, sehingga terdapat suatu proses integrasi persamaan nonlinier periodik. Integrasi dilakukan dengan metoda inversi, yaitu operasi integrasi diganti dengan operasi differensiasi yang dapat dengan mudah dilakukan meskipun persamaan bersifat nonlinier. Dengan merumuskan persamaan muka air tanpa melakukan proses linierisasi ataupun pengerjaan asumsi yang menyebabkan persamaan menjadi linier, diharapkan diperoleh suatu persamaan muka air yang lebih tepat dan selanjutnya diperoleh persamaan gelombang yang lebih tepat juga.

2. Persamaan-persamaan Dasar

2.1 Persamaan diffrensial muka air

Pada muka air yang bergerak, berlaku persamaan syarat batas kinematika permukaan air (Dean, 1984) yaitu

$$w_\eta = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{1}$$

dimana w_η adalah kecepatan partikel air pada arah vertikal-z pada permukaan air, u_η adalah kecepatan partikel pada arah horisontal-x pada permukaan air sedangkan $\eta = \eta(x,t)$ adalah persamaan muka air yang menggambarkan fluktuasi muka air dengan referensi muka air diam. Dengan x sebagai sumbu horisontal dan z sebagai sumbu vertikal maka elevasi muka air diam adalah pada z = 0.

Persamaan syarat batas kinematik permukaan, **Persamaan (1)**, dapat ditulis menjadi persamaan muka air yaitu,

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = w_\eta - u_\eta \frac{\partial\eta}{\partial x} \qquad (2)$$

Untuk mendapatkan bentuk persamaan dari η, maka **Persamaan (2)** diintegrasikan terhadap waktu *t*,

$$\eta(x,t) = \int w_\eta \, dt - \int u_\eta \frac{\partial\eta}{\partial x} dt \qquad (3)$$

Penyelesaian integrasi pada **Persamaan (3)** tersebut sebenarnya terdapat konstanta integrasi *c(t)*, tetapi untuk suatu fungsi periodik seperti persamaan muka air akibat gelombang yang bersifat periodik, maka dapat diambil *c(t)* = 0 (Dean, 1984).

2.2 Persamaan potensial aliran

Untuk menyelesaikan integrasi pada **Persamaan (3)**, diperlukan bentuk dari w_η dan u_η, yang dapat diperoleh dari persamaan potensial aliran gelombang air hasil pnyelesaian persamaan Laplace.

Penyelesaian persamaan Laplace dengan metoda pemisahan variabel dan dengan pengerjaan syarat batas lateral periodik, Dean (1984), menghasilkan persamaan,

$$\phi = A\left(Ce^{kz} + De^{-kz}\right)\cos kx \sin \sigma t \qquad (4)$$

A, *C* dan *D* adalah suatu kontanta yang perlu dicari bentuknya, *k* adalah bilangan gelombang, $\sigma = 2\eta$ / T = frekuensi sudut, *T* = perioda gelombang.

Pengerjaan syarat batas kinematik dasar perairan untuk dasar perairan miring, Hutahaean (2008a), diperoleh

$$\phi = Ge^{kh}\beta(z)\cos kx \sin \sigma t \qquad (5)$$

dimana didefinisikan,

$$\beta(z) = \alpha e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)} \quad ;$$
$$\beta_1(z) = \alpha e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)} \qquad (6)$$

$$\alpha = \frac{1 + \frac{\partial h}{\partial x}}{1 - \frac{\partial h}{\partial x}} \qquad (7)$$

G dan *k* adalah suatu konstanta yang perlu dicari bentuknya. *G* dan *k* adalah suatu besaran yang merupakan fungsi dari kedalaman. Untuk kedalaman perairan yang tidak konstan, fungsi dari posisi x, *G* dan *k* juga merupakan fungsi dari x sehingga terdapat harga-harga ∂G / ∂x dan ∂k / ∂x.

Dari persamaan potensial aliran (5) dapat diperoleh kecepatan partikel yaitu

kecepatan arah horisontal-x,

$$u = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = Gke^{kh}\beta(z)\sin kx \sin \sigma t$$
$$- Ge^{kh}\left(\beta(z) + \beta_1(z)\right)\frac{\partial kh}{\partial x}\cos kx \sin \sigma t$$
$$- \frac{\partial G}{\partial x}e^{kh}\beta(z)\cos kx \sin \sigma t \qquad (8)$$

kecepatan arah vertikal-z,

$$w = -\frac{\partial\phi}{\partial z} = -Gke^{kh}\beta_1(z)\cos kx \sin \sigma t \qquad (9)$$

Pada persamaan kecepatan horisontal *u* terdapat variabel ∂G / ∂x dan ∂k / ∂x yang perlu dicari bentuknya.

3. Formulasi ∂G / ∂x dan ∂k / ∂x

3.1 Tinjauan penyelesaian Persamaan Laplace

Persamaan Laplace pada medan aliran pada bidang x-z,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \qquad (10)$$

Persamaan potensial aliran, **Persamaan (4)** diperoleh dari penyelesaian **Persamaan (10)** dengan metoda pemisahan variabel, Dean (1984), yaitu dianggap $\phi(x, z, t) = P(x)Q(z)\sin\sigma t$, dimana berlaku kondisi,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\frac{1}{P} = -k^2 \qquad (11)$$

dan $$\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}\frac{1}{Q} = k^2 \qquad (12)$$

dimana sebagai P(x) adalah:

$$P(x) = Ge^{kh}\cos kx \qquad (13)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -Ge^{kh}k\sin kx + Ge^{kh}\frac{\partial kh}{\partial x}\cos kx$$
$$+\frac{\partial G}{\partial x}e^{kh}\cos kx \qquad (14)$$

Dengan mengabaikan turunan ke 2 dan bentuk perkalian antar turunan,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -Ge^{kh}k^2\cos kx - Ge^{kh}\frac{\partial k}{\partial x}\sin kx$$
$$-Ge^{kh}k\frac{\partial kh}{\partial x}\sin kx - \frac{\partial G}{\partial x}e^{kh}k\sin kx$$
$$-Ge^{kh}k\frac{\partial kh}{\partial x}\sin kx - \frac{\partial G}{\partial x}e^{kh}k\sin kx \qquad (15)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\frac{1}{P} = -k^2 - \frac{\partial k}{\partial x}\tan kx - 2k\frac{\partial kh}{\partial x}\tan kx$$
$$-\frac{2}{G}\frac{\partial G}{\partial x}k\tan kx \qquad (16)$$

Substitusi persamaan terakhir ke **Persamaan (11)**, maka diperoleh persamaan,

$$-\frac{\partial k}{\partial x} - 2k\frac{\partial kh}{\partial x} - \frac{2}{G}\frac{\partial G}{\partial x}k = 0 \qquad (17)$$

atau

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{G}{2k}\frac{\partial k}{\partial x} - G\frac{\partial kh}{\partial x} \qquad (18)$$

3.2 Pengerjaan persamaan kontinuitas

Persamaan kontinuitas pada medan aliran arah x-z, dimana x sumbu horisontal dan z adalah sumbu vertikal, berbentuk $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

Dari **Persamaan (9)**,

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -Ge^{kh}\beta(z)k^2\cos kx\sin\sigma t \qquad (19)$$

Dari persamaan ∂w / ∂z dan persamaan kontinuitas, maka ∂u / ∂x haruslah berbentuk,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = Ge^{kh}\beta(z)k^2\cos kx\sin\sigma t \qquad (20)$$

Dari **Persamaan (8)**,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = Ge^{kh}\beta(z)k^2\cos kx\sin\sigma t$$
$$+Ge^{kh}\beta(z)\frac{\partial k}{\partial x}\sin kx\sin\sigma t$$
$$+2Ge^{kh}\left(\beta(z)+\beta_1(z)\right)k\frac{\partial kh}{\partial x}\sin kx\sin\sigma t$$
$$+2\frac{\partial G}{\partial x}e^{kh}\beta(z)k\sin kx\sin\sigma t \qquad (21)$$

Dari **Persamaan (14)**, haruslah

$$Ge^{kh}\beta(z)\frac{\partial k}{\partial x}\sin kx\sin\sigma t$$
$$+2Ge^{kh}\left(\beta(z)+\beta_1(z)\right)k\frac{\partial kh}{\partial x}\sin kx\sin\sigma t$$
$$+2\frac{\partial G}{\partial x}e^{kh}\beta(z)k\sin kx\sin\sigma t = 0 \qquad (22)$$

Persamaan dibagi dengan *sin kxsin* σt, untuk *sin kxsin* $\sigma t \neq 0$

$$Ge^{kh}\beta(z)\frac{\partial k}{\partial x} + 2Ge^{kh}\left(\beta(z)+\beta_1(z)\right)k\frac{\partial kh}{\partial x}$$
$$+2\frac{\partial G}{\partial x}e^{kh}\beta(z)k = 0 \qquad (23)$$

Substitusi ∂G / ∂x dari **Persamaan (18)**,

$$Ge^{kh}\beta(z)\frac{\partial k}{\partial x} + 2Ge^{kh}\left(\beta(z)+\beta_1(z)\right)k\frac{\partial kh}{\partial x}$$
$$-Ge^{kh}\beta(z)\frac{\partial k}{\partial x} - 2Ge^{kh}\beta(z)k\frac{\partial kh}{\partial x} = 0 \qquad (24)$$

Dari persamaan terakhir diperoleh,

$$\frac{\partial kh}{\partial x} = 0 \qquad (25)$$

$$k\frac{\partial h}{\partial x} + h\frac{\partial k}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial k}{\partial x} = -\frac{k}{h}\frac{\partial h}{\partial x} \qquad (26)$$

Persamaan (26) ini bukan berarti perubahan harga *k* persatuan panjang, tetapi menyatakan perbedaan antara harga *k* pada dasar perairan datar dengan pada dasar perairan miring. Bila pada dasar perairan datar k = k_0, maka pada dasar perairan miring,

$$k = k_0 - \frac{k_0}{h}\frac{\partial h}{\partial x} \qquad (27)$$

Jadi kemiringan dasar perairan akan memperkecil *k* atau memperbesar panjang gelombang. Dari **Persamaan (18)** dan **(25)**,

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{G}{2h}\frac{\partial h}{\partial x} \qquad (18)$$

Sama halnya dengan bilangan gelombang *k*, maka **Persamaan (28)** ini hanya menyatakan perbedaan antara *G* pada dasar perairan datar dengan *G* pada dasar perairan miring. Bila G_0 adalah harga *G* pada dasar perairan datar, maka pada dasar perairan miring,

$$G = G_0 + \frac{G_0}{2h}\frac{\partial h}{\partial x} \tag{29}$$

Jadi kemiringan dasar perairan akan memperbesar harga *G*. Baik **Persamaan (26)** maupun **Persaman (28)** menunjukkan bahwa semakin dalam perairan semakin kecil pengaruh kemiringan dan pada perairan yang sangat dalam pengaruh kemiringan akan hilang dengan sendirinya..

Substitusi **Persamaan (25)** ke **Persamaan (26)** kecepatan partikel arah horisontal-x menjadi,

$$u = Ge^{kh}\beta(z)k\sin kx\sin\sigma t$$
$$-\frac{\partial G}{\partial x}e^{kh}\beta(z)\cos kx\sin\sigma t \tag{30}$$

4. Persamaan Muka Air

Dari **Persamaan (30)** dan **(9)**, diperoleh kecepatan partikel air pada permukaan adalah,

$$u_\eta = Ge^{kh}\beta(\eta)k\sin kx\sin\sigma t$$
$$-\frac{\partial G}{\partial x}e^{kh}\beta(\eta)\cos kx\sin\sigma t \tag{31}$$

$$w_\eta = -Ge^{kh}\beta_1(\eta)k\cos kx\sin\sigma t \tag{32}$$

Substitusi kedua persamaan kecepatan partikel air tersebut ke **Persamaan (3)**,

$$\eta(x,t) = -Gke^{kh}\cos kx\int\beta_1(\eta)\sin\sigma t\ dt$$
$$-Gke^{kh}\sin kx\int\beta(\eta)\sin\sigma\, dt$$
$$+\frac{\partial G}{\partial x}e^{kh}\cos kx\int\beta(\eta)\sin\sigma t\ dt \tag{33}$$

Dari **Persamaan (6)**, $\beta(\eta) = \alpha e^{k(h+\eta)} + e^{-k(h+\eta)}$;

$$\beta_1(\eta) = \alpha e^{k(h+\eta)} + e^{-k(h+\eta)}$$

sehingga $\beta_1(\eta)\sin\sigma t$ dan $\beta(\eta)\sin\sigma t$ adalah persamaan yang sangat nonlinier. Integral pada **Persamaan (33)** tidak bisa diselesaikan sebagaimana halnya integrasi persamaan linier.

Penyelesaian integral pada **Persamaan (33)** akan diselesaikan dengan metoda inversi dimana operasi integral diganti dengan operasi diferensial. Metoda inversi ini telah dikenal antara lain pada transformasi Laplace.

Sebagai ilustrasi dari metoda inversi ini akan diselesaikan $\int\beta_1(\eta)k\cos kx\sin\sigma t\ dt$

Berdasarkan fungsi yang akan diintegrasikan didefinisikan suatu fungsi *f(x,t)* yaitu f(x,t) = $\beta_1(\eta)\cos kx\cos\sigma t$

Pengambilan bentuk $\cos\sigma t$ adalah agar ketika diturunkan terhadap *t* akan diperoleh bentuk $\sin\sigma t$ yang merupakan bentuk dari persamaan yang diintegrasikan. Persamaan *f(x,t)* diturunkan terhadap *t*,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\sigma\beta_1(\eta)\cos kx\sin\sigma t$$
$$+k\beta(\eta)\frac{\partial\eta}{\partial t}\cos kx\cos\sigma t \tag{34}$$

Selanjutnya persamaan terakhir dintegrasikan terhadap waktu *t*,

$$\int df = -\sigma\int\beta_1(\eta)\cos kx\sin\sigma t\ dt$$
$$+k\int\beta(\eta)\frac{\partial\eta}{\partial t}\cos kx\cos\sigma t\ dt \tag{35}$$

$$f(x,t) = -\sigma\int\beta_1(\eta)\cos kx\sin\sigma t\ dt$$
$$+k\int\beta(\eta)\frac{\partial\eta}{\partial t}\cos kx\cos\sigma t\ dt \tag{36}$$

Substitusi *f(x,t)*

$$\beta_1(\eta)\cos kx\cos\sigma t = -\sigma\int\beta_1(\eta)\cos kx\sin\sigma t\ dt$$
$$+k\int\beta(\eta)\frac{\partial\eta}{\partial t}\cos kx\cos\sigma t\ dt \tag{37}$$

Ruas kiri dipindah keruas kanan, suku ke 1 ruas kanan dipindah kekiri dan persamaan dibagi dengan σ,

$$\int\beta_1(\eta)\sin\sigma t\ dt = -\frac{1}{\sigma}\beta_1(\eta)\cos\sigma t$$
$$+\frac{k}{\sigma}\int\beta(\eta)\frac{\partial\eta}{\partial t}\cos\sigma t\ dt \tag{38}$$

Ruas kiri persamaan adalah suku yang diselesaikan integrasinya. Integrasi suku ke 2 pada ruas kanan persamaan diselesaikan dengan cara yang sama. Didefinisikan

$$f(x,t) = \frac{k}{\sigma}\beta(\eta)\frac{\partial\eta}{\partial t}\sin\sigma t \tag{39}$$

Persamaan diturunkan terhadap t,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\sigma k}{\sigma}\beta(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial t}\cos\sigma t + \frac{k^2}{\sigma}\beta_1(\eta)\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 \sin\sigma t + \frac{k}{\sigma}\beta(\eta)\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\sin\sigma t \qquad (40)$$

Integrasi, substitusi *f(x,t)*, disusun lagi dan dibagi dengan σ

$$\frac{k}{\sigma}\int \beta(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial t}\cos\sigma t dt = \frac{k}{\sigma^2}\beta(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial t}\sin\sigma t - \frac{k^2}{\sigma^2}\int \beta_1(\eta)\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 \sin\sigma t\, dt - \frac{k}{\sigma^2}\int \beta(\eta)\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\sin\sigma t\, dt \qquad (41)$$

Dalam hal $\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^3 \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$ dan $\frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3}$

dianggap sangat kecil dan dapat diabaikan, maka integrasi suku ke 2 dan ke 3 dapat diselesaikan secara langsung dengan mengintegrasikan sin σt saja.

$$\frac{k}{\sigma}\int \beta(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial t}\cos\sigma t dt = \frac{k}{\sigma^2}\beta(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial t}\sin\sigma t + \frac{k^2}{\sigma^3}\beta_1(\eta)\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 \cos\sigma t + \frac{k}{\sigma^3}\beta(\eta)\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\cos\sigma t \qquad (42)$$

Substistusi hasil integrasi ini ke **Persamaan (38)**,

$$\int \beta_1(\eta)\sin\sigma t\; dt = -\frac{1}{\sigma}\beta_1(\eta)\cos\sigma t + \frac{k}{\sigma^2}\beta(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial t}\sin\sigma t + \frac{k^2}{\sigma^3}\beta_1(\eta)\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 \cos\sigma t + \frac{k}{\sigma^3}\beta(\eta)\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\cos\sigma t \qquad (43)$$

Persamaan (43) adalah hasil integrasi dengan tingkat ketelitian *O(δ²)* dimana integrasi dilakukan hanya sampai dijumpai suku

$\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2$ dan $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$

Pada **Persamaan (43)** tersebut terlihat bahwa konvergensi integrasi terjadi dengan semakin tingginya harga n pada pangkat dari k^n dimana k adalah bilangan yang berharga < 1, dan naiknya harga n pada pangkat dari

$\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^n$ dan pada derajad turunan $\frac{\partial^n \eta}{\partial t^n}$

Dengan cara yang sama, diperoleh

$$\int \beta(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial x}\sin\sigma t dt = -\frac{1}{\sigma}\beta(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial x}\cos\sigma t + \frac{k}{\sigma^2}\beta_1(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial x}\sin\sigma t + \frac{1}{\sigma^2}\beta(\eta)\frac{\partial^2 \eta}{\partial t\partial x}\sin\sigma t \qquad (44)$$

Hasil integrasi pada **Persamaan (44)** ini juga mempunyai tingkat ketelitian O(δ²), dimana

$\frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial x}$ setara dengan $\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2$ dan $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t\partial x}$

setara dengan $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$

Substitusi **Persamaan (28)**, **(43)** dan **(44)** ke **Persamaan (33)** diperoleh persamaan muka air adalah,

$$\begin{aligned}
\eta(x,t) = & \left(\frac{G}{\sigma}e^{kh}k\beta_1(\eta)\right)\cos kx\cos\sigma t \\
& - \left(\frac{G}{\sigma}e^{kh}\frac{k^2}{\sigma}\beta(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)\cos kx\sin\sigma t \\
& - \left(\frac{G}{\sigma}e^{kh}\frac{k^3}{\sigma^2}\beta_1(\eta)\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2\right)\cos kx\cos\sigma t \\
& - \left(\frac{G}{\sigma}e^{kh}\frac{k^2}{\sigma^2}\beta(\eta)\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\right)\cos kx\cos\sigma t \\
& + \left(\frac{G}{\sigma}e^{kh}k\beta(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\sin kx\cos\sigma t \\
& - \left(\frac{G}{\sigma}e^{kh}\frac{k^2}{\sigma}\beta_1(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\sin kx\sin\sigma t \\
& - \left(\frac{G}{\sigma}e^{kh}\frac{k}{\sigma}\beta(\eta)\frac{\partial^2 \eta}{\partial t\partial x}\right)\sin kx\sin\sigma t \\
& - \left(\frac{G}{\sigma}\frac{1}{2h}\frac{\partial h}{\partial x}e^{kh}\beta(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\cos kx\cos\sigma t
\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{G}{\sigma}\frac{1}{2h}\frac{\partial h}{\partial x}e^{kh}\frac{k}{\sigma}\beta_1(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\cos kx \sin \sigma t$$
$$+\left(\frac{G}{\sigma}\frac{1}{2h}\frac{\partial h}{\partial x}e^{kh}\frac{1}{\sigma}\beta(\eta)\frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x}\right)\cos kx \sin \sigma t \tag{45}$$

Persamaan (45), menunjukkan bahwa persamaan muka air pada gelombang air merupakan superposisi dari sejumlah gelombang dengan amplitudo yang berbeda-beda, dimana sebagai amplitudo adalah unsur dalam kurung pada masing-masing suku pada ruas kanan persamaan. Amplitudo terbesar adalah pada suku ke 1, dengan perbedaan yang cukup besar dibandingkan dengan amplitudo suku-suku lainnya. Amplitudo terbesar ke 2 adalah amplitudo pada suku ke 5, tetapi amplitudo pada suku ini adalah ($\partial\eta/\partial x$) kali lebih kecil dari suku ke amplitudo suku ke 1. Karena itu profil muka air akibat gelombang mempunyai bentuk utama dengan bentuk persamaan *Acos kxcos* σt sebagaimana halnya dengan bentuk persamaan suku ke 1.

Dengan mengambil kondisi *cos kx= sin kx* dan *cos* σt *= sin* σt, maka **Persamaan (45)** dapat ditulis menjadi,

$$\eta(x,t) = \frac{GF}{\sigma}\cos kx \cos \sigma t \tag{46}$$

Persamaan potensial aliran dirumuskan dengan anggapan bahwa potensial aliran tersebut bersifat periodik, sehingga ruas kanan **Persamaan (45)** maupun **(46)** juga akan bersifat periodik. Untuk suatu fungsi periodik, maka GF / σ haruslah suatu bilangan konstan sehingga **Persamaan (46)** menjadi

$$\eta(x,t) = A\cos kx \cos \sigma t \tag{47}$$

A adalah amplitudo gelombang, dimana

$$A = \frac{GF}{\sigma} \quad \text{dan} \quad G = \frac{\sigma A}{F} \tag{48}$$

$$\begin{aligned} F &= e^{kh}k\beta_1(\eta) - e^{kh}\frac{k^2}{\sigma}\beta(\eta)\frac{\partial\eta}{\partial t} \\ &- e^{kh}\frac{k^3}{\sigma^2}\beta_1(\eta)\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2 \\ &- e^{kh}\frac{k^2}{\sigma^2}\beta(\eta)\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} \\ &+ e^{kh}k\beta(\eta)\frac{\partial\eta}{\partial x} \\ &- e^{kh}\frac{k^2}{\sigma}\beta_1(\eta)\frac{\partial\eta}{\partial t}\frac{\partial\eta}{\partial x} \\ &- e^{kh}\frac{k}{\sigma}\beta(\eta)\frac{\partial^2\eta}{\partial t\partial x} \\ &- \frac{1}{2h}\frac{\partial h}{\partial x}e^{kh}\beta(\eta)\frac{\partial\eta}{\partial x} \\ &+ \frac{1}{2h}\frac{\partial h}{\partial x}e^{kh}\frac{k}{\sigma}\beta_1(\eta)\frac{\partial\eta}{\partial t}\frac{\partial\eta}{\partial x} \\ &+ \frac{1}{2h}\frac{\partial h}{\partial x}e^{kh}\frac{1}{\sigma}\beta(\eta)\frac{\partial^2\eta}{\partial t\partial x} \end{aligned} \tag{49}$$

Pada persamaan untuk *F*, terdapat unsur η dan turunannya $\partial\eta$ / ∂t , $\partial\eta$ / ∂x dan seterusnya. Harga dari unsur-unsur tersebut dapat dihitung dengan menggunakan **Persamaan (47)**, dengan mengambil kondisi

$$\cos kx = \sin kx = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{dan} \quad \cos \sigma t = \sin \sigma t = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

4.1 Analisis karakteristik breaking

Bila harga *F* dihitung hanya dengan menggunakan suku ke 1 dan ke 5 saja, dimana hal ini berarti integrasi dilakukan dengan tingkat ketelitian *O(*δ^0*)*, maka bentuk F adalah

$$F = e^{kh}k\beta_1(\eta) + e^{kh}k\beta(\eta)\frac{\partial\eta}{\partial x} \tag{50}$$

Dengan menggunakan **Persamaan (47)** dan dengan mengambil kondisi

$$\sin kx = \cos kx = \cos \sigma t = \sin \sigma t = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{maka}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{kA}{2}$$

substitusi harga ini pada **Persamaan (50)**,

$$F = e^{kh}k\beta_1(\eta) - e^{kh}k\beta(\eta)\frac{kA}{2} \tag{51}$$

Pada *F* $\to$ *0* maka $\eta(x, t) \to 0$ pada seluruh panjang gelombang. Kondisi ini adalah breaking pertama yang dialami gelombang dan terjadi pada perairan yang relatif masih dalam, dimana gelombang seolah-olah menghilang kemudian muncul lagi didepannya. Pada *F* $\to$ *0*,

$$e^{kh}k\beta_1(\eta) - e^{kh}k\beta(\eta)\frac{kA}{2} = 0 \tag{52}$$

atau

$$\frac{kA}{2} = \frac{\beta_1(\eta)}{\beta(\eta)} \tag{53}$$

Pada dasar perairan datar, persamaan terakhir menjadi,

$$\frac{kA}{2} = \tanh k(h+\eta) \tag{54}$$

Dengan *H* = 24, dimana *H* adalah tinggi gelombang dan *k* = 2 π / L, *L* adalah panjang gelombang, maka diperoleh kriteria breaking adalah

$$\frac{H}{L} = \frac{2}{\pi}\tanh k(h+\eta) \qquad (55)$$

Kriteria breaking dari Miche, Sarpkaya (1981), yang diperoleh dari hasil eksperimen di laboratorium adalah H / L = 0.143tanh*kh*. Dari hal ini maka persamaan muka air **Persamaan (45)** mempunyai karakteristik breaking dengan kondisi breaking mempunyai bentuk yang sama dengan kondisi breaking dari Miche. Hutahaean (2007b) dan (2008b), mengembangkan model transformasi gelombang dengan persamaan muka air yang dirumuskan dengan tingkat ketelitian, dimana model ternasformasi gelombang yang dihaslkan dapat memodelkan breaking

4.2 Analisis karakteristik dispersif

Analisis karaktristik dispersif akan dapat diamati dengan jelas bila dilakukan pada dasar perairan datar. Bila persamaan potensial aliran **(5)** dikerjakan pada dasar perairan datar, maka akan diperoleh persamaan

$$\phi = G2e^{kh}\cosh k(h+z)\cos kx\sin\sigma t \qquad (56)$$

Mengingat kedalaman konstan, maka e^{kh} juga konstan, maka sebagai konstanta baru

$$G = G2e^{kh} \qquad (57)$$

$$\phi = G\cosh k(h+z)\cos kx\sin\sigma t \qquad (58)$$

$$u = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = Gk\cosh k(h+z)\sin kx\sin\sigma t \quad \frac{\partial u}{\partial x} =$$
$$G2e^{kh}\ \ G\cosh k(h+z)\cos kx\sin\sigma t \qquad (59)$$

Integrasi persamaan kontinuitas terhadap kedalaman,

$$\int_{-h}^{\eta}\frac{\partial u}{\partial x}dz + w_\eta - w_{-h} = 0 \qquad (60)$$

Substitusi syarat batas kinematik permukaan

$w_\eta = \frac{\partial\eta}{\partial t} + u_\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}$ pada dasar perairan datar

$w_{-h} = -u_{-h}\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ substitusi *u* serta integrasi diselesaikan,

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = -Gk\sinh k(h+\eta)\cos kx\sin\sigma t$$
$$-Gk\frac{\partial\eta}{\partial x}\cosh kh\sin kx\sin\sigma t \qquad (61)$$

Pada perairan dalam $\frac{\eta}{h} << 1$

$\cosh k(h+\eta) = \cosh kh(1+\frac{\eta}{h}) = \cosh kh$ dan

$\sinh k(h+\eta) = \sinh kh$ sehingga

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = -Gk\sin kh\cos kx\sin\sigma t$$

Dengan anggapan gelombang panjang, maka suku kedua pada ruas kanan persamaan dapat diabaikan. Persamaan muka air gelombang linier tersebut diintegrasikan terhadap waktu *f*, diperoleh persamaan muka air berbentuk, $\eta(x,t) = A\cos kx\cos\sigma t$, dimana

$G = \frac{\sigma A}{k\sinh kh}$ dengan persamaan muka air ini maka

$\frac{\partial\eta}{\partial x} = -kA\sin kx\cos\sigma t$ sehingga

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = -Gk\sin kh\cos kx\sin\sigma t$$
$$-Gk^2A\cosh kh\sin^2 kx\cos\sigma t\sin\sigma t$$

Persamaan diintegrasikan terhadap waktu *t*, dimana untuk fungsí periodik dapat diambil konstanta integrasi *c(t)* = 0,

$$\eta(x,t) = \frac{Gk}{\sigma}\sinh kh\cos kx\cos\sigma t$$
$$-G\frac{k^2A}{2\sigma}\cosh kh\sin^2 kx\sin^2\sigma t \qquad (62)$$

$G\frac{k^2A}{2\sigma}\cosh kh\sin^2 kx\sin^2\sigma t$ selalu positif, sehingga

suku ke dua pada ruas kanan persamaan selalu mengurangi elevasi muka air atau mengurangi amplitudo gelombang dimana pengurangan amplitudo ini merupakan sifat dispersif dari gelombang air. Pengurangan amplitudo merupakan kehilangan energi gelombang. Berdesarkan hukum kekekalan energi, maka energi yang hilang tersebut yang paling mungkin adalah menjadi energi kinetik air yaitu timbulnya arus tetap selain arus eliptik. Dispersifitas tersebut sebanding dengan amplitudo gelombang, semakin besar amplitudo semakin besar dispersifitasnya.

4.3 Bilangan gelombang *k*

Substitusi *G* dari **Persamaan (48)** ke **Persamaan (5)**

$$\phi = \frac{\sigma A}{F}e^{kh}\beta(z)\cos kx\sin\sigma t \qquad (63)$$

Dengan menggunakan **Persamaan (63)** dan dengan menggunakan persamaaan momentum-x permukaan, Hutahaean (2007a), diperoleh persamaan dispersi untuk menghitung harga bilangan gelombang k.

5. Kesimpulan

Dari hasil pembahasan pada bagian-bagian terdahulu, dapat diambil sejumlah kesimpulan yaitu,

1. Integrasi persamaan nonlinier periodik dapat diselesaikan dengan mudah dengan mengerjakan metoda inversi integral.

2. Pengerjaan inversi integral pada persamaan muka air mempunyai konvergensi dengan adanya unsur k^n,

   $\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^n$ dan pada derajad turunan $\frac{\partial^n \eta}{\partial t^n}$

3. Pengerjaan metoda inversi integral pada perumusan persamaan muka air menghasilkan persamaan muka air yang merupakan superposisi dari sejumlah gelombang, semakin tinggi tingkat ketelitian yang digunakan semakin banyak komponen gelombang yang dihasilkan.

4. Persamaan muka air hasil inversi integral mempunyai karakteristik breaking. Sehingga pemodelan transformasi gelombang dengan persamaan ini akan dapat memodelkan breaking.

5. Persamaan muka air yang dihasilkan mempunyai karakteristik dispersif, dimana dispersifitasnya sebanding dengan besar amplitudo yaitu semakin besar amplitudo semakin besar dispersifitasnya.

Penelitian lanjut yang diperlukan adalah penelitian mengenai tingkat ketelitian integrasi yang optimal serta aplikasi persamaan pada pemodelan dinamika gelombang antara lain pengembangan model transformasi gelombang. Selain itu perlu pembuktian secara analitik bahwa kehilangan energi gelombang akibat peristiwa dispersif, menyebabkan timbulnya arus tetap.

Daftar Pustaka

Dean, R.G., and Dalrymple, 1984. *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists.* New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

Hutahaean, S., 2007a, Kajian Teoritis terhadap Persamaan Gelombang Nonlinier, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan, ITB: *Jurnal Teknik Sipil*, Vol. 14, No. 3.

Hutahaean, S., 2007b, Model Refraksi Gelombang dengan Menggunakan Persamaan Gelombang Nonlinier, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan, ITB: *Jurnal Infrastruktur dan Lingkungan Binaan*, Vol. III, No. 2.

Hutahaean, S., 2008a, Persamaan Gelombang Nonlinier pada Dasar Perairan Miring, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan, ITB: *Jurnal Teknik Sipil*, Vol. 15 No.1.

Hutahaean, S., 2008b, Model Refraksi-Difraksi Gelombang Air Oleh Batimetri, *Jurnal Teknik Sipil*, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan, ITB: Vol. 15 No.2.

Sarpkaya, T. and Isacson, M., 1981, *Mechanics of Wave Forces on Offshore Structures,* Van Nostrand Reinhold Company.