

Kontrol Ketinggian Minimal Misil Udara-ke-Permukaan Menggunakan Metode Tembakan Runtun Langsung

S. Subchan

Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, ITS, Surabaya
Email: s.subchan@gmail.com

ABSTRAK

Makalah ini membahas penyelesaian numerik dengan metode tembakan runtun langsung untuk mengendalikan misil dari udara ke permukaan. Sasaran misil diasumsikan berupa target diam, sedangkan manuvernya diasumsikan berupa hunjaman vertikal pada target. Permasalahan kendali misil dimodelkan dengan menggunakan metode kontrol optimal. Metode kontrol ini menggunakan indeks performa yang meminimalkan integral ketinggian. Pemodelan matematik yang diperoleh menghasilkan 2-dimensi dinamika terbang tak-linear, kondisi batas dan kendala state. Selain itu, di sini juga dianalisis pengaruh kondisi batas pada struktur dan performa dari hasil komputasi. Selanjutnya, hasil komputasi yang diperoleh dianalisis berdasarkan pandangan operasional dan komputasi. Lintasan optimal mempunyai 4 sub-interval yaitu menurun, terbang pada ketinggian minimum, menanjak dan menghunjam.

Kata kunci: Metode tembakan runtun langsung, kontrol optimal, metode numerik.

ABSTRACT

This paper describes numerical solutions of air-to-surface missile using a direct multiple shooting. The missile is assumed to attack a fixed target by a vertical dive. The missile guidance problem is reinterpreted using optimal control theory resulting in the formulation of minimum integrated altitude problem. The formulation entails nonlinear, 2-dimensional missile flight dynamics, boundary conditions and state constraints. The influence of the boundary conditions on the structure of the optimal solution and the performance index are investigated. The results are then interpreted from the operational and computational perspective. The optimal trajectory is split it up in 4 sub-intervals: diving, flight on the minimum altitude, climbing and diving.

Keywords: Direct multiple shooting method, optimal control, numerical method

PENDAHULUAN

Pembentukan lintasan merupakan metode pengendalian misil yang bertujuan untuk menentukan lintasan secara optimal dengan kontrol ketinggian minimal. Metode semacam ini digunakan secara luas untuk menentukan berbagai macam hukum kontrol (*control law*) pada misil taktis, terutama pada fase akhir. Selain itu, metode ini dapat dimanfaatkan untuk meningkatkan efektifitas dari sistem misil, misalnya dalam penyerangan sistem pertahanan kapal laut dan sistem pertahanan tank. Secara matematik, metode ini dapat diselesaikan melalui pendekatan numerik.

Beberapa peneliti memanfaatkan pembentukan lintasan untuk meminimalkan kesalahan posisi dari lintasan misil selama manuver. Kim dan Grider [1] menggunakan kontrol sudut tabrak untuk mengendalikan pesawat ketika memasuki atmosfer bumi. Ryoo, Cho and Tahk [2], [3] menggunakan hukum kontrol optimal dengan kendala sudut tabrak. Dalam makalah yang dimaksud, metode

penentuan *time-to-go* berdasarkan pada penggunaan fungsi polinomial orde-tiga terhadap lintasan misil. Farooq dan Limebeer [4] menyelidiki kontrol optimal untuk menentukan lintasan pada misil udara-ke-permukaan. Subchan dan Zbikowski [5], [6] menggunakan pendekatan kontrol optimal dan pendekatan hibrid untuk menentukan lintasan pada misil permukaan-ke-permukaan dengan kendala sudut tabrak.

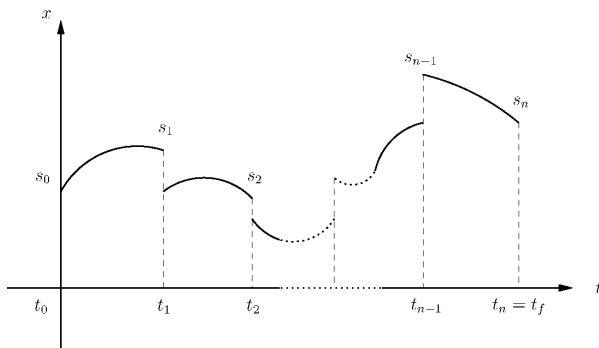
Makalah ini memaparkan pengendalian misil yang diluncurkan dari udara dengan manuver-hunjaman-vertikal ketika sampai di sasaran. Misi misil adalah menyerang target diam dengan meminimalkan lintasan ketinggian sehingga terhindar dari radar. Di sini, misil diluncurkan dari pesawat tempur. Pemodelan matematik dari permasalahan pengendalian dilakukan dalam bentuk permasalahan kontrol optimal. Selanjutnya, permasalahan kontrol optimal diselesaikan dengan metode tembakan runtun langsung (*direct multiple shooting*).

Makalah ini memberikan kontribusi pada pengembangan lintasan misil dengan metoda kontrol optimal. Dimana permasalahan kontrol optimal diselesaikan secara langsung dengan mentransformasikan sebagai permasalahan pemrograman tak-linear (*Nonlinear Programming* (NLP)).

METODE PENELITIAN

Metode tembakan runtun langsung adalah metode numerik yang merupakan pengembangan dari metode tembakan tunggal. Sebelum metode tembakan ini digunakan, permasalahan kontrol optimal perlu terlebih dahulu ditransformasikan ke pemrograman tak-linier. Transformasi yang dilakukan dicapai dengan cara menggabungkan parameterisasi kontrol dan diskritisasi pada variabel keadaan (*state*) [Keller (7), Stoer and Bulirsch (8), Ascher (9)].

Sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 1, nilai awal $x(t_i)$ dari variabel keadaan s_i pada t_i harus ditebak. Kemudian pada setiap interval, persamaan dinamik harus diintegrasikan dari t_i to t_{i+1} . Kondisi kekontinyuan dari variabel keadaan harus dipenuhi pada setiap interval dimana nilai $x(t_i)$ harus sama dengan nilai akhir pada selang sebelumnya.



Gambar 1. Pendekatan Tembakan Runtun

Sebelum konsep dasar dari metode tembakan runtun dipaparkan perlu terlebih dahulu masalah nilai batas diungkapkan, yaitu sebagai berikut

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t)], \quad r[x(t_0), x(t_f)] = 0 \quad (1)$$

Kemudian, nilai dari variabel keadaan berikut ini ditentukan secara simultan yaitu

$$s_i = x(t_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

Selanjutnya, penyelesaian Persamaan (1) pada nilai t berikut ini

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n = t_f, \quad (3)$$

dilakukan dengan cara mengasumsikan bahwa titik-titik diskritisasi untuk parameterisasi kontrol dan variabel keadaan adalah sama. Apabila

$x[t; s_i, v_i]$ merupakan penyelesaian dari permasalahan nilai awal sedemikian rupa sehingga:

$$\dot{x} = f[t, x, u(t, v_i)], \quad x(t_i) = s_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}] \quad (4)$$

maka penyelesaian untuk menentukan vektor $s_i, i = 0, 1, \dots, n$ dan $v_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ adalah sedemikian rupa sehingga fungsi $x(t)$ menyatu secara kontinyu. Oleh sebab itu, perlu diselesaikan masalah nilai batas berikut ini:

$$x(t) := x[t; s_i, v_i] \text{ for } t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (5)$$

$$x(t_n) := s_n$$

Selain itu, agar masalah kondisi batas pada Persamaan (5) dapat diselesaikan pada seluruh interval maka kondisi batas $r[x(t_0), x(t_f)] = 0$ harus dipenuhi oleh $x(t)$. Selanjutnya variabel baru $X(s)$ dapat didefinisikan sebagai berikut

$$X(s) = \begin{pmatrix} x[t_1; s_0, v_0] - s_1 \\ x[t_2; s_1, v_1] - s_2 \\ \vdots \\ x[t_n; s_{n-1}, v_{n-1}] - s_n \\ r[x(s_0), x(s_n)] \end{pmatrix} = 0 \quad (6)$$

dimana variabel tak-diketahui, yaitu

$$s = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{n-1} \\ s_n \end{pmatrix}, \quad (7)$$

perlu ditentukan. Berdasarkan pada Persamaan (5) dan (6) selanjutnya masalah kontrol optimal dapat dituliskan sebagai permasalahan pemrograman tak-linear berikut ini

$$\min J(s, v) = \sum_{i=0}^{n-1} J_i(s_i, v_i) \quad (8)$$

dengan kendala sebagai berikut

$$\begin{aligned} x[t_{i+1}; s_i, v_i] - s_{i+1} &= 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \\ r[x(s_0), x(s_n)] &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Kendala lintasan pada Persamaan 16 dan 17 ditransformasikan ke kendala pertidaksamaan pada setiap titik tembakan runtun sebagai kendala pada permasalahan pemrograman tak-linear (lihat GESOP [10]). Selanjutnya masalah pemrograman tak-linear dapat diselesaikan secara numerik.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada makalah ini, misil diasumsikan sebagai sebuah titik pusat massa yang bergerak di bidang vertikal pada bumi datar yang tidak berputar.

Berdasarkan Gambar 2 persamaan dinamik misil kemudian dapat dituliskan sebagai berikut [Subchan dkk (6)]

$$\dot{\gamma} = \frac{T - D}{mV} \sin \alpha + \frac{L}{mV} \cos \alpha - \frac{g \cos \gamma}{V} \quad (10a)$$

$$\dot{V} = \frac{T - D}{m} \cos \alpha - \frac{L}{m} \sin \alpha - g \sin \gamma \quad (10b)$$

$$\dot{x} = V \cos \gamma \quad (10c)$$

$$\dot{h} = V \sin \gamma, \quad (10d)$$

dimana t adalah waktu yang terletak pada interval $t_0 \leq t \leq t_f$, dengan t_0 sebagai waktu awal dan t_f sebagai waktu akhir. Berdasarkan persamaan dinamik yang diperoleh, variabel keadaan misil meliputi sudut lintas terbang γ , kecepatan V , posisi horisontal x dan ketinggian h sedangkan variabel kontrolnya meliputi gaya dorong T dan sudut serang α . Pada saat yang sama, gaya aksial aerodinamik (D) dan gaya normal aerodinamik (L) yang terdapat pada Persamaan (10a) dan (10b) merupakan fungsi dari ketinggian h , kecepatan V dan sudut serang α . Dalam bentuk persamaan matematik gaya aksial aerodinamik dapat dinyatakan sebagai berikut

$$D(h, V, \alpha) = \frac{1}{2} C_d \rho V^2 S_{ref} \quad (11)$$

$$C_d = A_1 \alpha^2 + A_2 \alpha + A_3. \quad (12)$$

Dalam hal ini, gaya aksial aerodinamik bukan merupakan gaya hambat.

Tabel 1. Parameter Model Fisik

Kuantitas	Nilai	Unit
m	1005	kg
g	9.81	m/s ²
S_{ref}	0.3376	m ²
A_1	-1.9431	
A_2	-0.1499	
A_3	0.2359	
B_1	21.9	
B_2	0	
C_1	3.312 10 ⁻⁹	kg m ⁻⁵
C_2	-1.142 10 ⁻⁴	kg m ⁻⁴
C_3	1.224	kg m ⁻³

Sementara itu, gaya normal aerodinamik dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan berikut ini

$$L(h, V, \alpha) = \frac{1}{2} C_l \rho V^2 S_{ref} \quad (13)$$

$$C_l = B_1 \alpha + B_2, \quad (14)$$

dimana ρ adalah kepadatan udara yang dirumuskan sebagai berikut

$$\rho = C_1 h^2 + C_2 h + C_3, \quad (15)$$

dan S_{ref} adalah luas referensi dari misil; m menyatakan massa dan g adalah konstanta

grafitasi, lihat Tabel 1 untuk nilai-nilai konstanta detailnya. Gaya normal aerodinamik yang dimaksud di sini bukan merupakan gaya angkat. Selanjutnya, beberapa kendala didefinisikan yaitu sebagai berikut

- Kendala lintasan pada state

$$V_{min} \leq V \leq V_{max} \quad (16)$$

$$h_{min} \leq h \quad (17)$$

- Kendala lintasan pada kontrol

$$T_{min} \leq T \leq T_{max} \quad (18)$$

- Kendala gabungan state dan kontrol

$$L_{min} \leq \frac{L}{mg} \leq L_{max} \quad (19)$$

dimana L_{min} dan L_{max} telah dinormalisasikan, sebagaimana ditunjukkan pada Tabel 2.

Tabel 2. Kondisi Batas dan Kendala

Kuantitas	Nilai	Unit
V_{min}	200	m/s
V_{max}	310	m/s
L_{min}	-4	g
L_{max}	4	g
h_{min}	30	m
T_{min}	1000	N
T_{max}	6000	N

Permasalahan kontrol optimal dapat dituliskan sebagai penyelesaian lintasan misil dari posisi awal ke target yang ditentukan dengan meminimalisasi ketinggian dari seluruh lintasan. Indek performa ini dapat diformulasikan sebagai berikut:

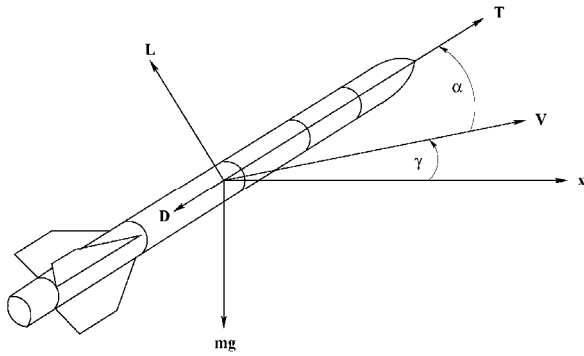
$$J = \int_{t_0}^{t_f} h \, dt \quad (20)$$

Hasil komputasi dari permasalahan (10)–(20) diselesaikan dengan metode tembakan runtun langsung yang telah diimplementasikan pada perangkat lunak GESOP [10]. Pada contoh ini, misil diluncurkan secara horisontal dari ketinggian $h_0 = 100, 200, 400$ m. Nilai awal dan akhir diberikan sebagai berikut:

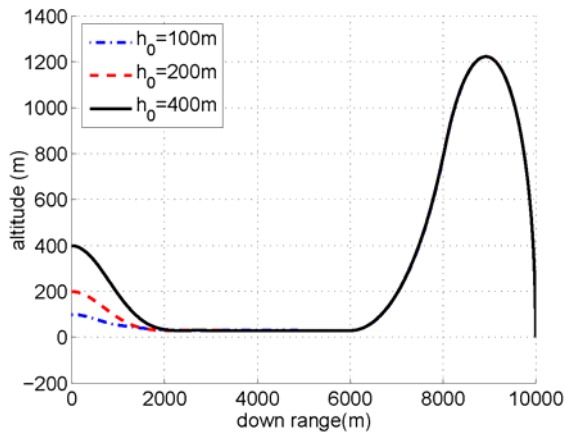
$$\begin{aligned} \gamma(0) &= 0^0 \text{ deg} & \gamma(t_f) &= 90^0 \text{ deg} \\ V(0) &= 272 \text{ m/s} & V(t_f) &= 250 \text{ m/s} \\ x(0) &= 0 \text{ m} & x(t_f) &= 10000 \text{ m} \\ h(0) &= 100, 200 \text{ and } 400 \text{ m} & h(t_f) &= 0 \text{ m} \end{aligned} \quad (21)$$

Berdasarkan Gambar 3–9, dianalisis karakteristik setiap lintasan. Selain itu, karakteristik ini juga diklasifikasikan berdasarkan kendala yang aktif. Di samping itu, interpretasi fisik maupun matematik dari setiap lintasan juga dipaparkan.

Berdasar hasil analisis (lihat Gambar 3 dan Gambar 4), lintasan hasil komputasi dapat dibagi menjadi empat sub-interval: menurun (lintasan pertama), terbang (lintasan kedua), menanjak (lintasan ketiga) dan menghunjam (lintasan keempat).



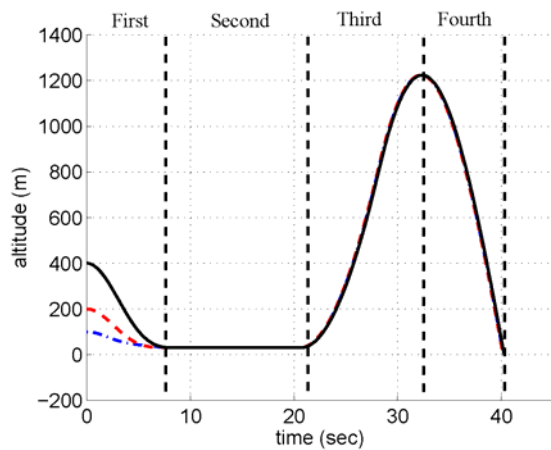
Gambar 2. Definisi Misil



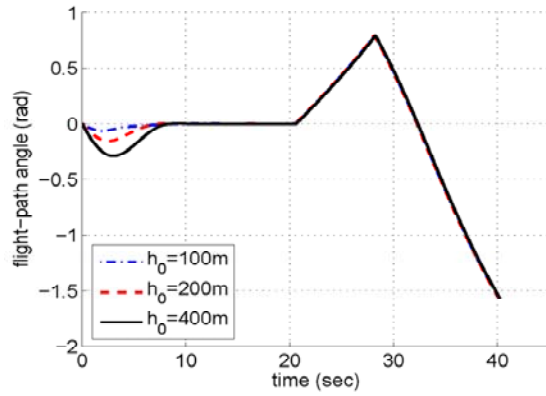
Gambar 3. Hubungan antara Ketinggian dengan Posisi Horizontal

Table 3. Hasil Komputasi untuk Peluncuran dengan Ketinggian Bervariasi

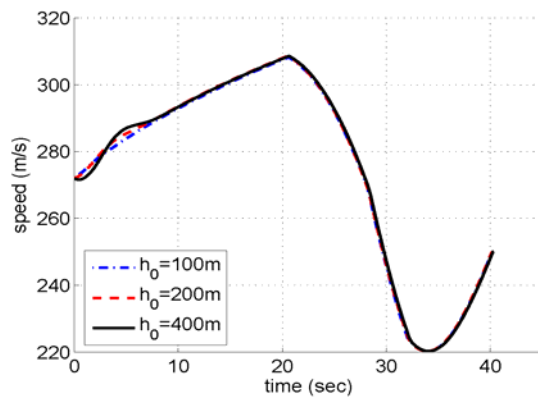
Ketinggian peluncuran h_0 (m)	J (m/s)	Waktu akhir t_f (sec)	Maksimum ketinggian sebelum menghunjam (m)
100	13668.32	40.707536	1223.406
200	13928.84	40.893791	1223.406
400	14682.39	41.121047	1223.406



Gambar 4. Hubungan antara Ketinggian dengan Waktu



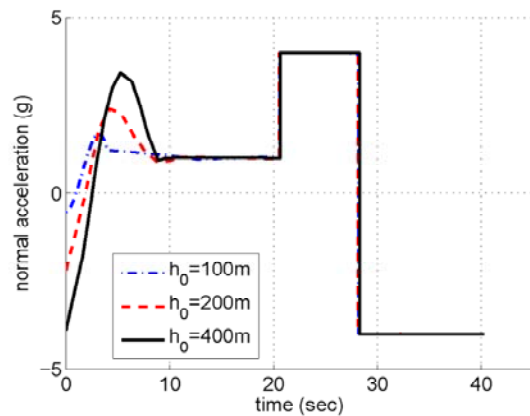
Gambar 5. Hubungan Sudut Lintas Terbang dengan Waktu



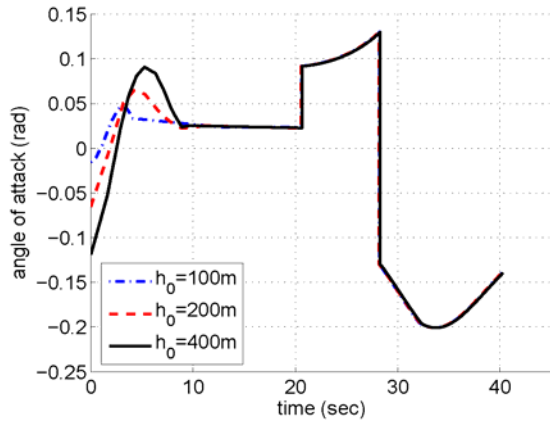
Gambar 6. Hubungan antara Kecepatan dengan Waktu

Menurun (lintasan pertama)

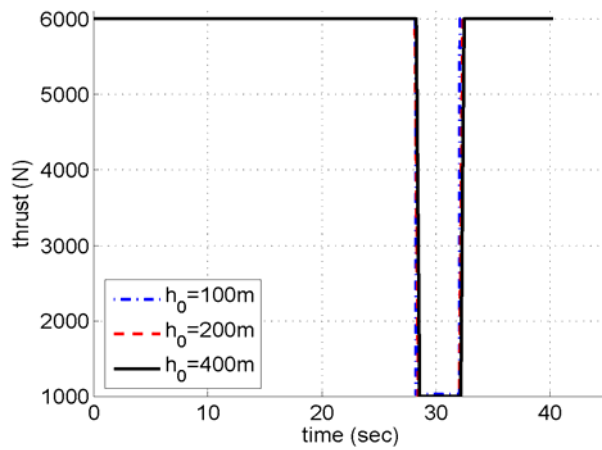
Pada fase ini misil segera menurun sesudah lepas dari peluncuran. Hal ini terjadi sampai misil berada pada ketinggian minimum yaitu $h_{min}=30m$, perhatikan Gambar 3–4. Pada fase ini gaya dorong berada pada posisi maksimum $T=6000 N$. Pada awal fase ini sudut serang α dan percepatan normal L/m meningkat dan selanjutnya menurun sampai akhir lintasan pertama. Sudut lintas terbang γ pada awalnya menurun kemudian meningkat sampai akhir lintasan pertama, lihat Gambar 5.



Gambar 7. Hubungan antara Kecepatan Normal dengan Waktu



Gambar 8. Hubungan antara Sudut Serang dengan Waktu



Gambar 9. Hubungan antara Gaya Dorong dengan Waktu

Terbang (lintasan kedua)

Pada fase ini kendala gaya dorong T and kendala ketinggian h aktif. Selama fase terbang misil berada pada ketinggian tetap h_{\min} sampai misil mulai terbang menanjak. Dengan demikian persamaan (10d) sama dengan nol pada fase ini karena ketinggian tidak berubah. Sehingga sudut lintas terbang γ sama dengan nol karena kecepatan V tidak pernah sama dengan nol selama terbang. Persamaan dinamik (10) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\dot{\gamma} = \frac{T-D}{m} \sin \alpha + \frac{L}{m} \cos \alpha - g = 0 \quad (21a)$$

$$\dot{V} = \frac{T-D}{m} \cos \alpha - \frac{L}{m} \sin \alpha \quad (21b)$$

$$\dot{x} = V \quad (21c)$$

$$\dot{h} = 0, \quad (21d)$$

Perhatikan sekarang pengaruh dari persamaan (21a) yang sama dengan nol. Kondisi ini berarti percepatan normal L/m bernilai hampir konstan,

karena sudut serang α sangat kecil. Bagian kanan pertama dari persamaan (21a) adalah sangat kecil, karena $\sin \alpha \approx \alpha \approx 0$ dan sekarang tinggal bagian kanan kedua $L/m \approx g$ karena $\cos \alpha \approx 1$. Pada fase ini kecepatan meningkat karena untuk nilai α kecil diperoleh

$$\dot{V} \approx \frac{T-D}{m} > 0, \text{ as } T > D$$

Ini menandakan bahwa sudut serang α akan menurun secara perlahan sesuai dengan persamaan (13). Hal ini untuk menjaga supaya nilai L/m tidak berubah dan hampir sama dengan g .

Menanjak (climbing, lintasan ketiga)

Pada fase ini misil harus terbang menanjak untuk dapat memenuhi kondisi nilai akhir pada sudut lintas terbang γ_f . Pada awal menanjak gaya dorong berada pada nilai maksimum. Manuver terbang menanjak berlangsung seakhir mungkin karena hal ini sangat berpengaruh pada indeks performa. Sehingga misil terbang menanjak dengan tajam dan dilakukan secepat mungkin. Oleh karena itu pada awal menanjak sudut serang harus meningkat untuk memfasilitasi gerakan misil menanjak serta dibantu dengan gaya dorong maksimal.

Pada fase ini, percepatan normal L/m berada pada nilai maksimum L_{\max} disebabkan lompatan yang terjadi pada sudut serang α . Kecepatan tentunya menurun, sementara sudut serang α dan ketinggian h meningkat.

Selanjutnya percepatan normal lompat berbalik ke nilai minimum L_{\min} karena dalam waktu yang sama terjadi lompatan balik pada sudut serang α . Walaupun terbang menanjak diperlukan tetapi misil harus secepatnya turun sedemikian hingga indeks performa tetap diminimalisasi. Gaya dorong segera berubah ke nilai minimum.

Dari hasil komputasi menunjukkan bahwa gaya dorong berubah ke nilai minimum sebelum berbalik dari menanjak ke menghunjam, lihat Gambar 9. Seketika sesudah gaya dorong T berbalik ke nilai minimum, sudut lintas terbang γ menurun cepat sedangkan sudut serang α lompat ke nilai negative α . Hal ini menyebabkan percepatan normal L/m lompat ke nilai minimum L_{\min} .

Misil berbalik ketika sudut lintas terbang $\gamma = 0$ dan $\dot{h} = 0$. Pada waktu yang sama gaya dorong T berbalik ke nilai maksimum untuk memberikan tambahan kecepatan sampai ke target.

Menghunjam (diving, lintasan keempat)

Pada akhir manuver misil harus sampai di target dengan kondisi batas yang telah ditentukan. Ketika berbalik dari menanjak ke menghunjam

kecepatan misil lebih kecil dibanding kecepatan akhir ketika sampai di sasaran. Sehingga kecepatan harus meningkat dan oleh karena itu diperlukan tambahan gaya dorong. Hal ini menyebabkan gaya dorong berbalik dari nilai minimum ke nilai maksimum.

Pada fase ini percepatan normal berada pada nilai minimum. Sementara itu ketinggian misil semakin menurun untuk mencapai target ($\gamma < 0 \rightarrow \dot{h} < 0$, lihat persamaan (10d)). Akhirnya misil sampai ditarget dengan memenuhi kondisi nilai batas yang telah ditentukan setelah t_f menit.

Meskipun ketiga contoh kasus pada penelitian ini mempunyai waktu akhir berbeda ketika sampai ditarget, tetapi performa dari ketiga hasil komputasi hampir sama, lihat Gambar 3–4 dan Tabel 3. Ketinggian maksimum dari misil sebelum menghunjam hampir sama untuk ketiga kasus yang dipelajari, hanya saja berbeda waktu ketika sampai di puncak.

KESIMPULAN

Pada penelitian ini dibahas metode tembakan runtun langsung untuk menyelesaikan masalah pengendalian misil. Keunggulan dari metode ini dibandingkan dengan metode tembakan runtun tak-langsung adalah kemudahan pengguna dalam menyelesaikan masalah. Dalam metode tembakan runtun langsung, pengguna tidak harus menurunkan persamaan co-state, kondisi stasioner dan kondisi keoptimalan.

Berdasar hasil analisis dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa lintasan optimal dari misil dapat dibagi dalam 4 sub-interval. Pada lintasan awal misil langsung menurun. Hal ini diperlukan untuk memperoleh nilai minimum. Pada lintasan kedua misil terbang pada ketinggian minimum, yaitu $h_{\min} = 30$ m. Pada fase ini misil terbang konstan sampai berakhir ketika misil mulai terbang menanjak (climbing). Fase ketiga adalah terbang menanjak. Hal ini terjadi karena misil harus memenuhi nilai akhir dimana misil harus menghunjam (sudut lintas terbang $\gamma_{t_f} = -90^\circ$ deg).

Fase terakhir adalah menghunjam. Pada fase ini misil harus memenuhi kondisi nilai akhir, yaitu sampai pada target dengan kondisi batas tertentu.

DAFTAR PUSTAKA

1. M. Kim and K.V. Grider. *Terminal guidance for impact attitude angle constrained flight trajectories*. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 9(6):852–859, 1973.
2. C.K. Ryou, H. Cho, and M.J. Tahk. *Time-to-go weighted optimal guidance with impact angle constraints*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 14(3):483–492, 2006.
3. C.K. Ryou, H. Cho, and M.J. Tahk. *Optimal guidance laws with terminal impact angle constraint*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 28(4):724–732, 2005.
4. A. Farooq and D.J.N. Limebeer. *Path following of optimal trajectories using preview control*. In Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, pages 2787–2792, Seville, Spain, 2005.
5. S. Subchan and R. Żbikowski. *Computational optimal control of the terminal bunt manoeuvre - Part 1: Minimum altitude case*. Optimal Control Applications & Methods, 28(5):311–353, 2007.
6. S. Subchan and R. Żbikowski. *Computational optimal control of the terminal bunt manoeuvre - Part 2: Minimum-time case*. Optimal Control Applications & Methods, 28(5):355–379, 2007.
7. H.B. Keller. *Numerical Methods for Two-Point Boundary Value Problems*. Dover Publications, New York, 1992.
8. J. Stoer and R. Bulirsch. *Introduction to Numerical Analysis*. Springer, New York, 3rd edition, 2002.
9. U.M. Ascher, R.M.M. Mattheij, and R.D. Russel. *Numerical Solution of Boundary Value Problem for Ordinary Differential Equations*. SIAM, Philadelphia, 1995.
10. *GESOP Software User Manual-The User Interface Tutorial*. Institute of Flight Mechanics and Control, University of Stuttgart, Germany, 2004.