

Catatan Teknik (*Technical Notes*)

Penyelesaian Persamaan Vibrasi dengan Integrasi Newton-Cote

Syawaluddin Hutahaean

Kelompok Keahlian Teknik Kelautan, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan, Institut Teknologi Bandung,
Jl. Ganesha No. 10 Bandung 40132, E-mail: syawaluddin@ocean.itb.ac.id

Abstrak

Paper ini mempresentasikan penyelesaian persamaan vibrasi secara numeris dengan menggunakan integrasi numeris metoda Newton-Cote. Eksekusi model selama sepuluh kali period gelombang memberikan solusi yang sangat stabil.

Kata-kata Kunci: *Polinomial lagrange, integrasi numeris.*

Abstract

This paper presents a numerical method for solving vibration equation using Newton-Cote's numerical integration. Model execution during ten times of vibration period gives a very stabile solution.

Keywords: *Lagrangian polynomial, numerical integration.*

1. Pendahuluan

Penyelesaian persamaan vibrasi dengan metoda integrasi telah lama dikenal, yaitu antara lain metoda Wilson-q dan Newmark-b, (Bathe, 1982). Penyelesaian diferensial waktu orde satu dengan metoda integrasi juga telah banyak digunakan, yaitu dikerjakan pada penyelesaian persamaan gelombang nonlinier dari Boussinesq, Liu (1999), (Meftah, 2004). (Hutahaean, 2005, 2007a, 2007b, 2008) menyelesaikan persamaan gelombang panjang Airy dengan metoda integrasi dengan menggunakan integrasi numeris dari Newton-Cote.

Pada penelitian ini dikerjakan integrasi numeris dari Newton-Cote pada persamaan vibrasi yang merupakan diferensial waktu orde 2.

2. Polinomial Lagrange

Pendekatan fungsi $f(x)$ dengan polinomial Lagrange adalah, Arden (1970),

$$f(x) = \sum_{i=1}^n L_i(x) f_i \tag{1}$$

dimana

- $L_i(x)$ = polinomial Lagrange pada titik i
- f_i = harga fungsi pada titik i
- n = jumlah titik polinomial

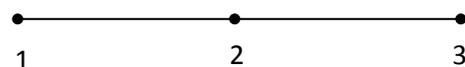
Bentuk umum polinomial Lagrange adalah, Arden (1970),

$$L_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots\dots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)(x_i-x_3)\dots\dots(x_i-x_n)}$$

atau:

$$L_i(x) = \prod_{j=1}^n \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}, \quad j \neq i$$

Apabila pada suatu domain $0 \leq x \leq L$ didekati dengan 3 titik polinomial **Gambar 1**, maka bentuk pendekatannya adalah



Gambar 1. Pendekatan dengan 3 titik polinomial

$$f(x) = L_1(x)f_1 + L_2(x)f_2 + L_3(x)f_3$$

dimana:

$$L_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

pada $x = x_1, L_1(x_1) = 1, L_2(x_1) = 0, L_3(x_1) = 0$, maka

$$f(x_1) = L_1(x_1)f_1 + L_2(x_1)f_2 + L_3(x_1)f_3 = f_1$$

pada $x = x_2, L_1(x_2) = 1, L_2(x_2) = 0, L_3(x_2) = 0$, maka

$$f(x_2) = L_1(x_2)f_1 + L_2(x_2)f_2 + L_3(x_2)f_3 = f_2$$

pada $x = x_3, L_1(x_3) = 0, L_2(x_3) = 1, L_3(x_3) = 0$, maka

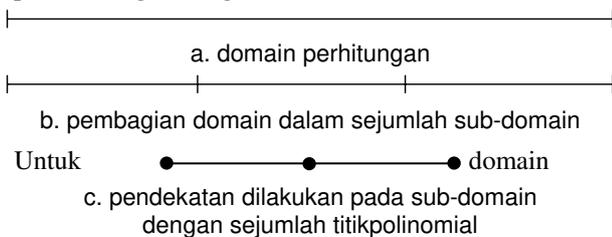
$$f(x_3) = L_1(x_3)f_1 + L_2(x_3)f_2 + L_3(x_3)f_3 = f_3$$

Jadi pendekatan fungsi dengan polinomial Lagrange adalah exact pada titik-titik polinomial dimana

$$f(x_1) = f_1, f(x_2) = f_2, f(x_3) = f_3$$

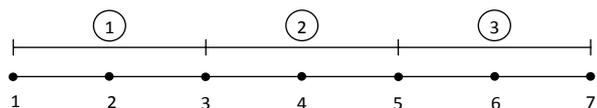
Pendekatan fungsi $f(x)$ dengan polinomial Lagrange dapat saja dilakukan pendekatan langsung yaitu pada seluruh domain langsung digunakan n titik polinomial. Tetapi pendekatan seperti ini akan terbentuk polinomial dengan pangkat tinggi pada x yaitu x^{n-1} , dimana semakin besar n , akan semakin besar derajat polinomialnya dan sering terjadi malah mengurangi ketelitian.

Metoda pendekatan yang termudah adalah dengan membagi-bagi daerah perhitungan dalam sejumlah sub-domain, selanjutnya pendekatan polinomial dilakukan pada masing-masing sub-domain.



Gambar 2. Pendekatan polinomial dengan sub-domain

yang dibagi dalam 3 sub domain dan pada sub domain digunakan 3 titik polinomial,



Pada sub-domain ①

$$f(x) = L_1(x)f_1 + L_2(x)f_2 + L_3(x)f_3$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Pada sub-domain ②

$$f(x) = L_1(x)f_3 + L_2(x)f_4 + L_3(x)f_5$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_4)(x - x_5)}{(x_3 - x_4)(x_3 - x_5)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_3)(x - x_5)}{(x_4 - x_3)(x_4 - x_5)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_3)(x - x_4)}{(x_5 - x_3)(x_5 - x_4)}$$

Pada sub-domain ③

$$f(x) = L_1(x)f_5 + L_2(x)f_6 + L_3(x)f_7$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_6)(x - x_7)}{(x_5 - x_6)(x_5 - x_7)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_5)(x - x_7)}{(x_6 - x_5)(x_6 - x_7)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_5)(x - x_6)}{(x_7 - x_5)(x_7 - x_6)}$$

Untuk selanjutnya, yang dimaksudkan dengan pendekatan polinomial Lagrange adalah pendekatan pada sub-domain.

3. Integrasi Numeris dengan Metoda Newton-Cote

Dengan menggunakan polinomial Lagrange dapat dengan mudah dilakukan integrasi suatu fungsi, yaitu

$$f(x) = \sum_{i=1}^n L_i(x) f_i$$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_a^b L_i(x) f_i dx \tag{2}$$

Untuk pendekatan 3 titik polinomial

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b L_1(x) dx f_1 + \int_a^b L_2(x) dx f_2 + \int_a^b L_3(x) dx f_3 \tag{3}$$

mengingat $L_i(x)$ adalah suatu polinomial, maka integrasi dapat dengan mudah dilakukan.

3.1 Koefisien integrasi

Pada Persamaan (3) terlihat bahwa dengan interval integrasi yang konstan, maka didapat hasil integrasi $L_i(x)$ yang konstan juga. Jadi untuk harga a dan b yang tetap, maka bila

$$\int_a^b L_1(x) dx = c_1, \int_a^b L_2(x) dx = c_2 \text{ dan } \int_a^b L_3(x) dx = c_3$$

maka

$$\int_a^b f(x) dx = c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3$$

c_1, c_2 dan c_3 disebut dengan koefisien integrasi.

Telah diketahui bahwa suatu fungsi $f(x)$ pada domain $a \leq x \leq b$ untuk setiap harga a dan b , dapat ditransformasikan menjadi suatu fungsi $g(\xi)$ pada domain $-1 \leq \xi \leq 1$. Jadi bila didapatkan harga-harga koefisien integrasi pada domain ξ , maka integrasi akan dapat dilakukan dengan menggunakan koefisien integrasi tersebut tanpa harus melakukan integrasi polinomial Lagrange lagi, dimana metoda integrasi ini disebut dengan metoda Newton-Cote.

Untuk x yang konstan, fungsi transformasi dari x ke ξ dapat digunakan persamaan transformasi yang sederhana, yaitu

$$x = p + q$$

Pada $\xi = -1, x = a$; dan pada $\xi = 1, x = b$, sehingga diperoleh dua persamaan yaitu

$$a = -p + q$$

$$b = p + q$$

Dari ke 2 persamaan tersebut diperoleh $q = \frac{a+b}{2}$

dan $p = \frac{b-a}{2}$ sehingga persamaan transformasi menjadi

$$x = \frac{b-a}{2} \xi + \frac{a+b}{2}$$

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{b-a}{2}$$

$$dx = \frac{b-a}{2} d\xi$$

Dengan persamaan transformasi tersebut, maka

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 g(\xi) \frac{b-a}{2} d\xi$$

dengan $g(\xi) = \sum_{i=1}^n L_i(\xi) g_i$, dimana $g_i = f_i$

Integrasi menjadi, $\int_a^b f(x) dx =$

$$\frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^n L_i(\xi) g_i d\xi = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n \left(\int_{-1}^1 L_i(\xi) f_i d\xi \right)$$

$$\int_a^b f(x) dx =$$

$$\frac{b-a}{2} \left(\int_{-1}^1 L_1(\xi) d\xi \right) f_1 + \left(\int_{-1}^1 L_2(\xi) d\xi \right) f_2 + \dots + \left(\int_{-1}^1 L_n(\xi) d\xi \right) f_n$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} (c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n) = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n c_i f_i \tag{4}$$

dimana $c_i = \int_{-1}^1 L_i(\xi) d\xi$

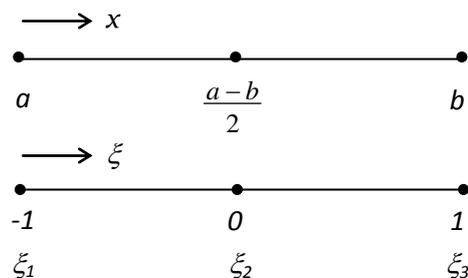
yang berharga konstan mengingat integrasi selalu dilakukan pada domain $-1 \leq \xi \leq 1$. Jadi bila diperoleh harga-harga c_i , integrasi akan dapat dilakukan setiap saat dengan menggunakan **Persamaan (4)** tanpa harus mengintegrasikan polinomial Lagrange lagi.

Pada bagian berikut akan dihitung koefisien integrasi untuk sejumlah konfigurasi titik integrasi dengan mengintegrasikan polinomial Lagrange.

Integrasi dengan 3 titik polinomial

Pada skema ini interval garis $a-b$ dibagi dalam 2 interval, yaitu seperti terlihat pada **Gambar (3)**. Untuk pendekatan dengan 3 titik polinomial, maka

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \left(\int_{-1}^1 L_1(\xi) d\xi f_1 + \int_{-1}^1 L_2(\xi) d\xi f_2 + \int_{-1}^1 L_3(\xi) d\xi f_3 \right)$$



Gambar 3. Integrasi dengan 3 titik polinomial

Dengan 3 titik polinomial atau titik integrasi tersebut dimana $\xi_1 = -1, \xi_2 = 0, \xi_3 = 1$, polinomial Lagrange akan berbentuk

$$L_1(\xi) = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} = -\frac{1}{2} \xi(\xi - 1)$$

$$L_2(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} = (1 - \xi^2)$$

$$L_3(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)} = \frac{1}{2} \xi(\xi + 1)$$

Dengan demikian diperoleh koefisien integrasi yaitu

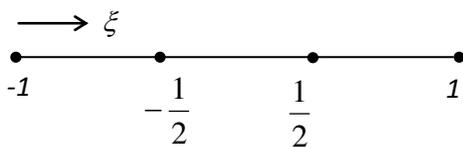
$$c_1 = \int_{-1}^1 L_1(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 -\frac{1}{2} \xi(\xi - 1) d\xi = \frac{1}{3}$$

$$c_2 = \int_{-1}^1 L_2(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 (1 - \xi^2) d\xi = \frac{4}{3}$$

$$c_3 = \int_{-1}^1 L_3(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \xi(\xi + 1) d\xi = \frac{1}{3}$$

Integrasi dengan 4 titik polinomial

Pada skema ini interval garis $a - b$ dibagi dalam 3 interval, yaitu



Gambar 4. Integrasi dengan 4 titik polinomial

Dengan 4 titik polinomial ini, maka polinomial Lagrange berbentuk

$$L_1(\xi) = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)(\xi - \xi_4)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)(\xi_1 - \xi_4)}$$

$$L_2(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)(\xi - \xi_4)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)(\xi_2 - \xi_4)}$$

$$L_3(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_4)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)(\xi_3 - \xi_4)}$$

$$L_4(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_4 - \xi_1)(\xi_4 - \xi_2)(\xi_4 - \xi_3)}$$

Dengan memasukkan harga-harga ξ_1 s/d ξ_4 seperti pada Gambar (4) dan dengan mengintegrasikan dari -1 dan ke 1 , maka diperoleh

$$c_1 = \int_{-1}^1 L_1(\xi) d\xi = 0.25 ; c_2 = \int_{-1}^1 L_2(\xi) d\xi = 0.75$$

$$c_3 = \int_{-1}^1 L_3(\xi) d\xi = 0.75 ; c_4 = \int_{-1}^1 L_4(\xi) d\xi = 0.25$$

Koefisien integrasi, untuk berbagai titik integrasi dengan persamaan integrasi

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n c_i f_i$$

berikut.

Tabel 1. Koefisien integrasi c_i pada persamaan

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n c_i f_i$$

n	$c1$	$c2$	$c3$	$c4$	$c5$	$c6$	$c7$
2	1.000000	1.000000					
3	1/3	4/3	1/3				
4	0.250000	0.750000	0.750000	0.250000			
5	0.155556	0.711111	0.266667	0.711111	0.155556		
6	0.131944	0.520833	0.347222	0.347222	0.520833	0.131944	
7	0.097619	0.514286	0.064286	0.647619	0.064286	0.514286	0.097619

Contoh : akan dihitung $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$

a. dengan 3 titik integrasi

dalam hal ini $f(x) = \sin x$, $a = 0$ dan $b = \frac{\pi}{2}$

$$x_1 = 0 ; f_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{\pi}{4} ; f_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$x_3 = \frac{\pi}{2} ; f_3 = 1$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi - 0}{2} \left(\frac{1}{3}x_0 + \frac{4}{3}x_2 \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{3}x_3 \right) = 1.00228$$

Dimana hasil eksak $\int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1$

b. dengan 4 titik integrasi

$$x_1 = 0 ; f_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{\pi}{6} ; f_2 = 0.5$$

$$x_3 = \frac{\pi}{3} ; f_3 = 0.866025$$

$$x_4 = \frac{\pi}{2} ; f_4 = 1.0$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi - 0}{2} (0.25x_0 + 0.75x_2 \cdot 0.5 + 0.75x_3 \cdot 0.866025 + 0.25x_4) = 1.001005$$

Dari kedua hasil perhitungan tersebut terlihat bahwa semakin banyak titik integrasi, semakin baik ketelitian. Hal ini dikarenakan semakin banyak titik integrasi semakin kecil dx .

4. Penyelesaian Persamaan Vibrasi

Persamaan vibrasi untuk satu derajat kebebasan, Bathe (1982), adalah,

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + c \frac{du}{dt} + k u = f(t) \quad (5)$$

dimana

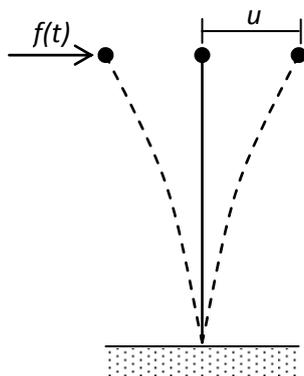
u = simpangan (**Gambar 5**)

m = masa

c = koefisien redaman (damping)

k = koefisien kekakuan

$f(t)$ = gaya luar yang bekerja pada system



Gambar 5. Sistem SDOF

Persamaan tersebut akan diselesaikan dengan metoda integrasi dari Newton-Cote, dengan 4 titik integrasi.

Persamaan (5) dapat ditulis dalam bentuk lain, yaitu

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{dt} \right) + c \frac{du}{dt} + k u = f(t)$$

Persamaan terakhir, dikalikan dengan dt dan diintegrasikan dari $t-2\delta t$ ke $t+\delta t$,

Suku ke 1 dan ke 2 ruas kiri persamaan diselesaikan secara analitik, sedangkan suku ke 3 diselesaikan secara numeris.

$$m \int_{t-2\delta t}^{t+\delta t} d \left(\frac{du}{dt} \right) + c \int_{t-2\delta t}^{t+\delta t} du + k \int_{t-2\delta t}^{t+\delta t} u dt = \int_{t-2\delta t}^{t+\delta t} f(t) dt$$

Dalam hal ini $a = t - 2\delta t$, $b = t + \delta t$,

$$\frac{b-a}{2} = \frac{(t+\delta t) - (t-2\delta t)}{2} = \frac{3\delta t}{2}$$

$$m \left(\left(\frac{du}{dt} \right)^{t+\delta t} - \left(\frac{du}{dt} \right)^{t-2\delta t} \right) + c \left(u^{t+\delta t} - u^{t-2\delta t} \right) + \frac{3\delta t}{2} k$$

$$\left(0.25 u^{t-2\delta t} + 0.75 u^{t-\delta t} + 0.75 u^t \right)$$

$$+ 0.25 u^{t+\delta t} \Big) = k \int_{t-2\delta t}^{t+\delta t} f(t) dt \quad (6)$$

$\left(\frac{du}{dt} \right)^{t+\delta t}$ diselesaikan dengan metoda selisih hingga dengan skema diferensial ke belakang, yaitu

$$\left(\frac{du}{dt} \right)^{t+\delta t} = \frac{u^{t-\delta t} - 4 u^t + 3 u^{t+\delta t}}{2 \delta t}$$

Substitusi persamaan untuk $\left(\frac{du}{dt} \right)^{t+\delta t}$

ke **Persamaan (6)** dan $\left(\frac{du}{dt} \right)^{t-2\delta t}$

dipindahkan ke ruas kanan

$$m \left(\frac{u^{t-\delta t} - 4 u^t + 3 u^{t+\delta t}}{2 \delta t} \right) + c \left(u^{t+\delta t} - u^{t-2\delta t} \right) + \frac{3 \delta t}{2} k$$

$$\left(0.25 u^{t-2\delta t} + 0.75 u^{t-\delta t} + 0.75 u^t \right)$$

$$+ 0.25 u^{t+\delta t} \Big) = m \left(\frac{du}{dt} \right)^{t-2\delta t} + \int_{t-2\delta t}^{t+\delta t} f(t) dt$$

Persamaan dikalikan dengan t dan dikelompokkan suku-suku yang mengandung u dengan referensi waktu yang sama.

$$\left(\frac{3m}{2} + \delta t c + \frac{0.75 \delta t^2 k}{2} \right) u^{t+\delta t} + \left(-2m + \frac{2.25 \delta t^2 k}{2} \right) u^t$$

$$+ \left(\frac{m}{2} + \frac{2.25 \delta t^2 k}{2} \right) u^{t-\delta t}$$

$$+ \left(-\delta t c + \frac{0.75 \delta t^2 k}{2} \right) u^{t-2\delta t} = t m$$

$$\left(\frac{du}{dt} \right)^{t-2\delta t} + \delta t \int_{t-2\delta t}^{t+\delta t} f(t) dt$$

Persamaan terakhir dapat ditulis ringkas

$$k_{ef} u^{t+\delta t} = f_{ef}$$

$$k_{ef} = \frac{3m}{2} + \delta t c + \frac{0.75 \delta t^2 k}{2} \quad (7)$$

$$f_{ef} = -a_1 u^t - a_2 u^{t-\delta t} + \delta t m \left(\frac{du}{dt} \right)^{t-2\delta t} + \delta t \int_{t-2\delta t}^{t+\delta t} f(t) dt$$

(8)

$$a_1 = -2m + \frac{2.25\delta^2 k}{2} \tag{9}$$

$$a_2 = \frac{m}{2} + \frac{2.25\delta^2 k}{2} \tag{10}$$

$$a_3 = \left(-\delta c + \frac{0.75\delta^2 k}{2} \right) \tag{11}$$

$$\left(\frac{du}{dt} \right)^{t-2\delta} = \frac{u^{t-\delta} - u^{t-3\delta}}{2\delta}$$

$$\int_{t-2\delta}^{t+\delta} f(t) dt$$

tergantung dari bentuknya. Dalam hal $f(t)$ merupakan fungsi yang diketahui bentuknya, maka misal $f(t) = A \sin \omega t$, maka dapat diselesaikan secara analitik. Sedangkan bila $f(t)$ berupa data series, maka integrasi dilakukan secara numerik.

Contoh :

Model dieksekusi dengan data :

$$m = 2.0, \quad c = 11.5, \quad k = 30.0, \quad f(t) = 2.0 \sin\left(\frac{2\pi}{2.1} t\right)$$

Perhitungan dilakukan dengan $\delta = 0.07$ dt. Hasil eksekusi adalah disajikan pada gambar grafik simpangan u terhadap waktu t , seperti pada **Gambar (4.2)**.

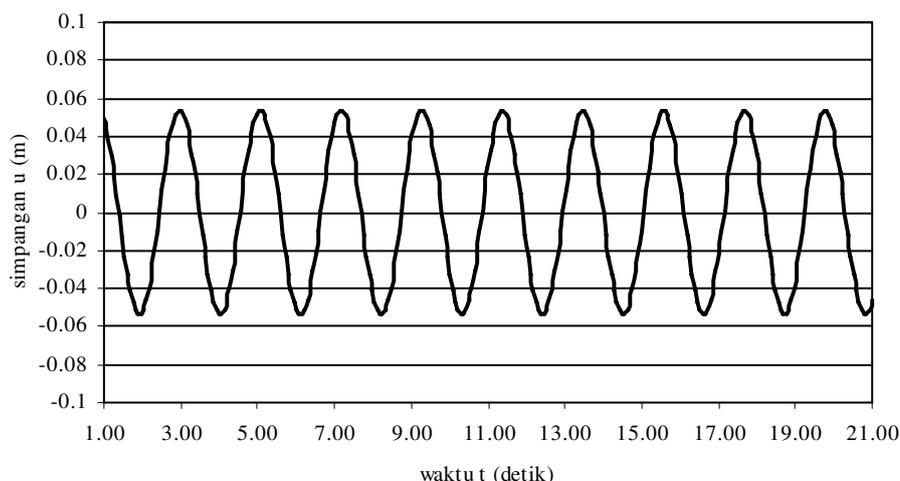
5. Kesimpulan

1. Seperti terlihat pada **Gambar 6**, eksekusi model pada jangka waktu 10x perioda eksitasi solusi model adalah stabil.
2. Adapun ketelitian dari metoda ini adalah ditentukan oleh ketelitian dari metoda integrasi dari Newton-Cote, dimana pada contoh integrasi fungsi sinusoidal metoda memberikan hasil yang baik. Hutahaean, (2005, 2007a, 2007b, 2008), menggunakan metoda integrasi dari Newton-Cote pada pemodelan transformasi gelombang, yang juga memberikan hasil yang baik.
3. Ketelitian berikutnya adalah ditentukan oleh metoda selisih hingga yang digunakan, dimana pada penelitian ini digunakan ketelitian metoda selisih hingga dengan tingkat ketelitian $O(d)^2$ baik pada skema *central-difference* maupun pada *backward-difference*.
4. Secara umum metoda yang dikembangkan cukup mempunyai prospek yang baik, baik untuk diteliti lebih lanjut maupun untuk diaplikasikan pada suatu analisis vibrasi.

Daftar Pustaka

Arden, B.W. and Astill, K.N., 1970, *Numerical Algorithm: Origins and Applications*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Li, Y. S., Liu, S.-X., Yu, Y.-X., and Lai, G.-Z., 1999, Numerical modeling of Boussinesq equations by finite element method *Journal Coastal Engineering*, Elsevier.



Gambar 6. Grafik simpangan (u) terhadap waktu (t), hasil model

Hutahaean

- Meftah, Sorgent, P., and Gami P., 2004, Linear analysis of a new type of extended Boussinesq model. *Coastal Engineering*.
- Hutahaean, S., 2005, *Model Difraksi dengan Persamaan Gelombang Airy yang Disempurnakan*, Thesis S3, Departemen Teknik Sipil, ITB.
- Hutahaean, S., 2007a, Pemodelan Dinamika Gelombang dengan Mengerjakan Persamaan Kekekalan Energi, *Jurnal Teknik Sipil*, Volume 14, No. 1, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan, ITB.
- Hutahaean, S., 2007b, Model Refraksi Gelombang dengan Menggunakan Persamaan Gelombang Nonlinier, *Jurnal Infrastruktur dan Lingkungan Binaan*, Volume III, No. 2, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan, ITB.
- Hutahaean, S., 2008, Momentum Equilibrium Application in Airy's Long Wave Equation, *Jurnal Infratsruktur dan Lingkungan Binaan*, Volume IV, No.1, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan, ITB, Volume 15 No.1, 2008..

