

KESTABILAN SOLUSI NUMERIK SISTEM BERDERAJAT KEBEBASAN TUNGGAL AKIBAT GEMPA DENGAN METODE NEWMARK (Studi Kasus: Menghitung Respons Bangunan Baja Satu Tingkat)

Griebel H. Rompas

Steenie E. Wallah, Reky S. Windah, Servie O. Dapas

Fakultas Teknik Jurusan Teknik Sipil Universitas Sam Ratulangi Manado

email: griebelhavel_11@yahoo.com

ABSTRAK

Metode Newmark merupakan salah satu prosedur numerik yang biasa digunakan untuk menganalisa respon struktur terhadap beban gempa. Metode ini mempunyai dua parameter penting yaitu β dan γ , yang menetapkan variasi dari percepatan terhadap selang waktu dan menentukan karakteristik kestabilan dan akurasi dari metode tersebut. Apabila dipakai nilai $\gamma = 1/2$ dan $\beta = 1/4$, artinya digunakan prinsip metode percepatan rata-rata. Sedangkan apabila dipakai nilai $\gamma = 1/2$ dan $\beta = 1/6$, maka digunakan prinsip metode percepatan linear. Dan seperti metode numerik yang lain pada umumnya, kedua prinsip ini masing-masing juga mempunyai tingkat kestabilan dan akurasi yang berbeda-beda.

Kestabilan dan ketelitian/akurasi proses numerik akan terjaga apabila dipakai nilai selang waktu (Δt) yang relatif kecil. Tujuan dari penelitian ini adalah mencari seberapa kecil nilai Δt yang harus digunakan untuk mendapatkan respon struktur yang stabil dan akurat. Struktur dimodelkan menjadi sistem berderajat kebebasan tunggal (SDOF) dan dikenakan beban impuls setengah gelombang sinus. Perhitungan respons menggunakan kedua prinsip di atas, masing-masing dilakukan variasi untuk nilai Δt dan periode (T). Prosedur ini dilakukan dengan bantuan program MS Excel.

Hasil perhitungan menunjukkan untuk rata-rata prosentase perbedaan nilai hasil simpangan $\leq 1\%$, kurang lebih diperlukan rata-rata nilai $\Delta t = 0,007 T$ bila menggunakan prinsip percepatan linear, dan $\Delta t = 0,005 T$ bila menggunakan prinsip percepatan rata-rata. Dengan kata lain, metode percepatan linear lebih efisien dalam mendapatkan hasil yang akurat dibandingkan metode percepatan rata-rata. Sebaliknya, metode percepatan linear mempunyai syarat nilai Δt tertentu agar proses numerik dapat dikatakan stabil (conditionally stable). Ketika digunakan $\Delta t > 0,551 T$ respons yang dihasilkan oleh metode percepatan linear semakin lama semakin besar seiring pertambahan waktu meskipun adanya efek redaman dan ciri khas dari beban impuls dimana respons yang dihasilkan seharusnya semakin lama semakin kecil. Metode ini dapat dikatakan stabil ketika digunakan $\Delta t < 0,551 T$. Sedangkan metode percepatan rata-rata tetap stabil untuk berapa pun nilai Δt yang digunakan.

Kata kunci : Metode Newmark, SDOF, kestabilan dan akurasi numerik

PENDAHULUAN

Gempa bumi dikategorikan sebagai beban dinamik karena berubah-ubah terhadap waktu. Untuk beban dinamik yang bersifat periodik dan impulsif umumnya dapat diselesaikan dengan cara analitik karena ekspresi matematikanya yang cukup sederhana. Tetapi karena sifat gempa terjadi secara random dan durasi pembebanannya cukup panjang, penyelesaian dengan cara analitik menjadi sangat kompleks dan ekspresi matematikanya menjadi panjang dan cenderung kurang praktis dan lebih efektif jika digunakan pendekatan secara numerik.

Penyelesaian secara numerik bersifat pendekatan (*approximate*), sehingga hasil proses numerik tidaklah eksak tapi dapat mendekati atau bahkan dekat sekali dengan hasil eksak. Para ahli pun mulai membuat beberapa solusi numerik yang dapat dipakai mulai dari yang sederhana sampai yang cukup kompleks.

Salah satu solusi numerik yang biasa digunakan adalah metode Newmark yang dikemukakan pada tahun 1959 oleh Nathan M. Newmark. Pada metode ini terdapat dua parameter penting yaitu β dan γ , yang menetapkan variasi dari percepatan terhadap selang waktu dan menentukan karakteristik

kestabilan dan akurasi dari metode tersebut. Penulis tertarik mencoba meneliti kestabilan dan keakuratan metode tersebut terhadap respons struktur yang dihasilkan. Diharapkan, hasil penelitian bisa mendapat gambaran seberapa akurat dan stabil metode ini dalam menghitung respons struktur akibat pembebanan dinamik khususnya beban gempa bumi.

Tujuan Penelitian

- Tujuan pada penelitian ini adalah:
- Mengetahui langkah-langkah mendapatkan respons struktur menggunakan Metode Newmark.
 - Mempelajari tingkat kestabilan dan keakuratan dari Metode Newmark.
 - Menentukan nilai *time step*/selang pertambahan waktu Δt yang efektif dalam menggunakan Metode Newmark.

Manfaat Penelitian

Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat mempermudah perhitungan struktur bangunan tahan gempa.

LANDASAN TEORI

Gempa Bumi

Gempa bumi adalah getaran atau guncangan yang terjadi di permukaan bumi. Gempa bumi biasanya disebabkan oleh pergerakan kerak bumi (lempeng bumi).

Terdapat dua kategori utama untuk memperhitungkan efek gempa terhadap analisis struktur bangunan (Widodo, 2001), yaitu menggunakan spektrum respons dan dengan analisis riwayat waktu (*time history analysis*).

Sistem Berderajat Kebebasan Tunggal (*Single Degree of Freedom*)

Dalam dinamika struktur, derajat kebebasan merupakan derajat independensi atau jumlah koordinat yang diperlukan untuk menyatakan posisi suatu sistem pada setiap saat. Pada umumnya struktur menerus (*continuous structure*) mempunyai jumlah derajat kebebasan (*number of degree of freedom*) tak berhingga. Namun dalam proses idealisasi, sebuah model matematis yang tepat dapat mereduksi jumlah derajat kebebasan yang tak berhingga menjadi berderajat kebebasan tunggal/satu (SDOF).

Sistem Berderajat Kebebasan Tunggal Tak Teredam (*SDOF–Undamped System*)

Pada sistem berderajat kebebasan tunggal tak teredam, redaman diabaikan. Sistem ini terbagi dua, yaitu getaran bebas dan getaran dipaksa. Persamaan diferensialnya sebagai berikut:

- Getaran Bebas Tanpa Redaman (*Free Vibration Undamping*)

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (1)$$

- Getaran Dipaksa Tanpa Redaman (*Forced Vibration Undamping*)

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = p(t) \quad (2)$$

Sistem Berderajat Kebebasan Tunggal Teredam (*SDOF–Damped System*)

Pada sistem berderajat kebebasan tunggal teredam, redaman diperhitungkan. Seperti sebelumnya, sistem ini terbagi dua, yaitu getaran bebas dan getaran dipaksa. Persamaan diferensialnya sebagai berikut:

- Getaran Bebas dengan Redaman (*Free Vibration with Damping*)

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (3)$$

- Getaran Dipaksa dengan Redaman (*Forced Vibration with Damping*)

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) \quad (4)$$

Metode Newmark

Nathan M. Newmark pada tahun 1959 mengusulkan dua formula integrasi numerik yaitu,

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + [(1-\gamma)\Delta t]\ddot{u}_i + (\gamma\Delta t)\ddot{u}_{i+1} \quad (5)$$

$$u_{i+1} = u_i + (\Delta t)\dot{u}_i + [(0,5-\beta)(\Delta t)^2]\ddot{u}_i + [\beta(\Delta t)^2]\ddot{u}_{i+1} \quad (6)$$

Pada kedua persamaan tersebut terdapat dua parameter penting yaitu β dan γ yang menetapkan variasi dari percepatan terhadap selang waktu dan menentukan karakteristik kestabilan dan akurasi dari metode tersebut (Chopra, 1995). Faktor γ memberikan sebuah pertimbangan variasi yang linear antara pengaruh nilai percepatan awal (\ddot{u}_i) dan percepatan akhir (\ddot{u}_{i+1}) terhadap perubahan nilai dari kecepatan (\dot{u}_{i+1}). Faktor β memberikan pertimbangan dari kontribusi nilai percepatan awal (\ddot{u}_i) dan percepatan akhir (\ddot{u}_{i+1}) terhadap perubahan nilai dari simpangan (u_{i+1}) (Clough & Penzien, 2003).

Dari studi terhadap performa dari formulasi ini, diketahui bahwa faktor γ mengatur besarnya *artificial damping* (redaman buatan) yang ditimbulkan dari prosedur ini. *Artificial damping* tidak terjadi jika digunakan $\gamma = 1/2$, karena itu direkomendasikan nilai ini untuk dipakai pada analisa SDOF standar. Apabila dipakai nilai $\gamma = 1/2$ dan $\beta = 1/4$, artinya digunakan prinsip *average acceleration method*/metode percepatan rata-rata. Sedangkan apabila dipakai nilai $\gamma = 1/2$ dan $\beta = 1/6$, maka digunakan prinsip *linear acceleration method*/metode percepatan linear.

Pada metode percepatan rata-rata, diasumsikan bahwa percepatan yang terjadi adalah percepatan yang telah dirata-ratakan. Sedangkan pada metode percepatan linear, percepatan yang digunakan terus berubah berdasarkan waktu.

Kestabilan & Akurasi

Suatu proses numerik dikatakan stabil jika kesalahan yang mungkin timbul di awal integrasi tidak teramplifikasi (bertambah besar) pada akhir integrasi numerik. Suatu proses integrasi numerik yang stabil dengan suatu persyaratan tertentu disebut *conditionally stable*. Proses-proses numerik tersebut menjadi *unconditionally stable* apabila persyaratan tersebut dapat dipenuhi.

Metode Newmark dikatakan stabil jika (Chopra, 1995)

$$\frac{\Delta t}{T_n} \leq \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\gamma-2\beta}} \quad (7)$$

Untuk $\gamma = 1/2$ dan $\beta = 1/4$ kondisi di atas menjadi

$$\frac{\Delta t}{T_n} < \infty \quad (8)$$

Hal ini secara tidak langsung menyatakan bahwa metode percepatan rata-rata dikatakan stabil untuk berapa pun besar nilai Δt yang digunakan. Karena itu metode percepatan rata-rata ini dikatakan *unconditionally stable*.

Untuk $\gamma = 1/2$ dan $\beta = 1/6$, Persamaan di atas mengindikasikan bahwa metode percepatan linear dikatakan stabil jika

$$\frac{\Delta t}{T_n} < 0,551 \quad (9)$$

Karena itu metode percepatan linear ini dikatakan *conditionally stable*. Tapi bagaimanapun kondisi ini tidak terlalu signifikan

pengaruhnya dalam analisis sistem SDOF karena harus digunakan selang pertambahan waktu yang jauh lebih kecil dari $0,551 T_n$ untuk memperoleh representasi dari eksitasi dan respons yang akurat.

Akurasi dari hasil untuk semua metode numerik bergantung pada besar dari selang pertambahan waktu yang dipilih (Paz, 2004). Ada beberapa hal yang harus dipertimbangkan dalam memilih *time step*/selang waktu (Δt), yaitu (1) periode natural dari struktur, (2) variasi dari fungsi pembebanan, dan (3) rumitnya fungsi kekakuan.

PROSEDUR PERHITUNGAN

Struktur dimodelkan menjadi sistem berderajat kebebasan tunggal (SDOF). Perhitungan respons struktur menggunakan metode Newmark dengan prinsip percepatan linear/*linear acceleration method* ($\gamma = 1/2$ dan $\beta = 1/6$) dan prinsip percepatan rata-rata/*average acceleration method* ($\gamma = 1/2$ dan $\beta = 1/4$). Agar bisa mendapat gambaran yang cukup jelas mengenai kestabilan dan keakuratan dari metode Newmark ini, dilakukan perbandingan hasil perhitungan respons struktur menggunakan metode Newmark dengan hasil perhitungan menggunakan solusi eksak. Karena itu, struktur dikenakan pembebanan dinamis berupa beban impuls setengah gelombang sinus, dimana respons struktur terhadap pembebanan ini juga bisa diperoleh menggunakan solusi eksak. Untuk mempermudah perhitungan digunakan program MS Excel 2007.

Masukkan data awal: kekakuan (k), rasio redaman (ξ), dan periode (T). Dihitung nilai massa (m), koefisien redaman (c), dan frekuensi (ω_n). Tentukan juga nilai selang waktu (Δt) dan nilai koefisien Newmark, yaitu γ dan β .

Perhitungan dilakukan beberapa kali dengan variasi nilai Δt untuk satu nilai T . Setelah itu, perhitungan dilanjutkan dengan memvariasikan nilai T . Perhitungan ini dilakukan masing-masing menggunakan prinsip percepatan linear/*linear acceleration method* ($\gamma = 1/2$ dan $\beta = 1/6$) dan prinsip percepatan rata-rata/*average acceleration method* ($\gamma = 1/2$ dan $\beta = 1/4$). Pada beberapa detik tertentu diambil nilai simpangan yang didapat dari masing-masing variasi nilai Δt menggunakan metode Newmark untuk dilakukan perbandingan dengan solusi eksak.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil

Gambar 1 dan 2 menunjukkan tingkat akurasi dari metode Newmark terhadap variasi nilai Δt (selang pertambahan waktu) dan variasi nilai T (periode).

Akurasi

Dari gambar-gambar tersebut dapat dilihat bahwa semakin kecil nilai T (periode), semakin kecil pula nilai Δt (selang pertambahan waktu) yang diperlukan untuk mendapatkan hasil simpangan yang mendekati nilai dari solusi eksak. Atau dapat dikatakan bahwa pemilihan nilai Δt dipengaruhi oleh nilai T.

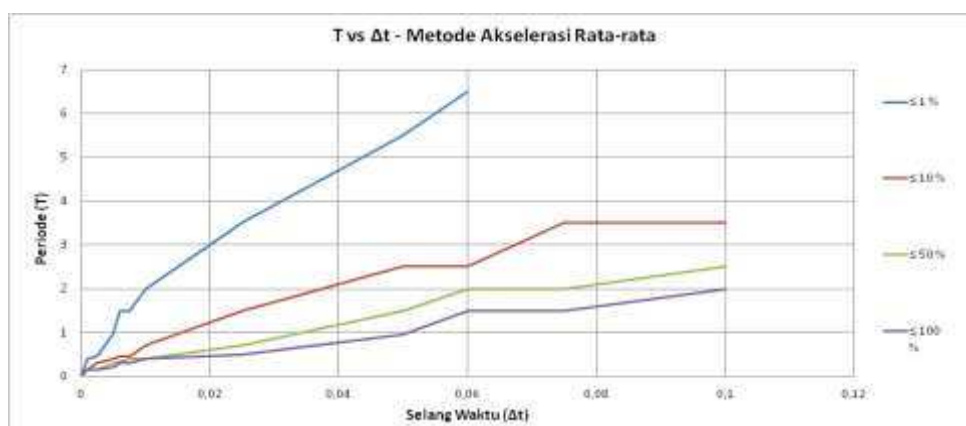
Hasil perhitungan juga menunjukkan bahwa prinsip percepatan linear ($\gamma = 1/2$ dan $\beta = 1/6$) terlihat lebih efisien dibandingkan prinsip percepatan rata-rata ($\gamma = 1/2$ dan $\beta = 1/4$) dalam mendapatkan hasil yang akurat. Dimana untuk rata-rata prosentase perbedaan nilai hasil simpangan $\leq 1\%$, kurang lebih diperlukan rata-rata nilai $\Delta t = 0,007$ T bila menggunakan prinsip percepatan linear, dan $\Delta t = 0,005$ T bila menggunakan prinsip percepatan rata-rata. Untuk rata-rata prosentase perbedaan nilai hasil simpangan $\leq 10\%$, kurang lebih diperlukan rata-rata nilai $\Delta t = 0,019$ T bila menggunakan prinsip percepatan linear, dan $\Delta t = 0,016$ T bila menggunakan prinsip percepatan rata-rata. Untuk rata-rata prosentase perbedaan nilai hasil simpangan $\leq 50\%$, kurang lebih diperlukan rata-rata nilai $\Delta t = 0,032$ T bila menggunakan prinsip

percepatan linear, dan $\Delta t = 0,025$ T bila menggunakan prinsip percepatan rata-rata. Dan untuk rata-rata prosentase perbedaan nilai hasil simpangan $\leq 100\%$, kurang lebih diperlukan rata-rata nilai $\Delta t = 0,044$ T bila menggunakan prinsip percepatan linear dan $\Delta t = 0,032$ T bila menggunakan prinsip percepatan rata-rata.

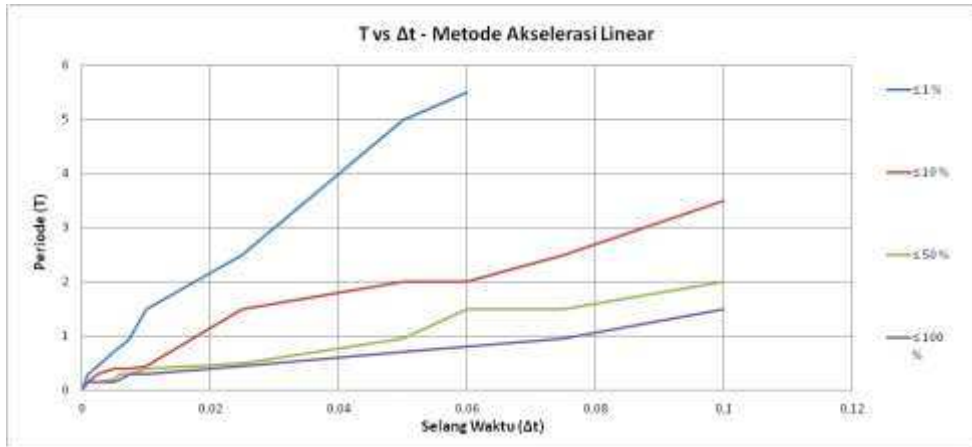
Kestabilan

Dikatakan sebelumnya bahwa metode Newmark mempunyai syarat kestabilan dimana prinsip percepatan linear ($\gamma = 1/2$ dan $\beta = 1/6$) dikatakan stabil jika $\Delta t/T < 0,551$. Dan prinsip percepatan rata-rata ($\gamma = 1/2$ dan $\beta = 1/4$) dikatakan stabil jika $\Delta t/T < \infty$, atau dalam hal ini stabil untuk berapapun nilai Δt .

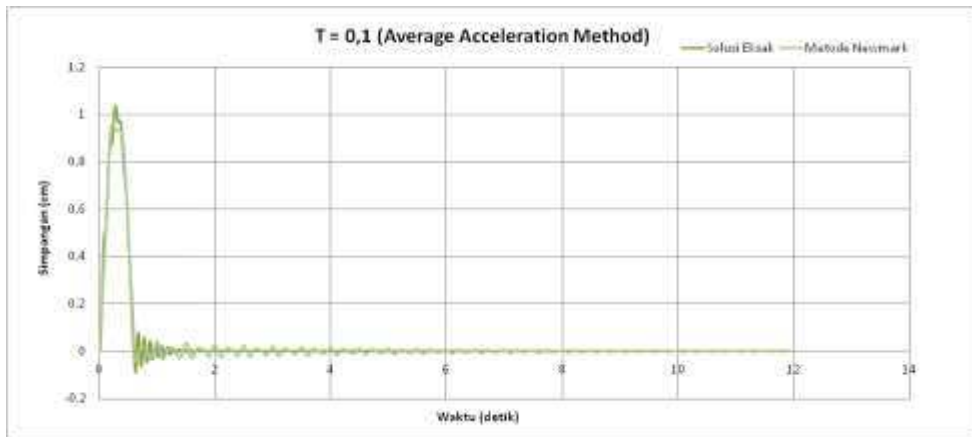
Untuk membuktikannya, diambil salah satu contoh yaitu pada $T = 0,1$ untuk variasi nilai $\Delta t = 0,1$ dimana $\Delta t/T = 1$. Hasil perhitungan menunjukkan bahwa untuk prinsip percepatan rata-rata ($\gamma = 1/2$ dan $\beta = 1/4$), rata-rata prosentase perbedaan nilai hasil simpangan = $1,4 \times 10^{14}\%$. Sedangkan untuk prinsip percepatan linear ($\gamma = 1/2$ dan $\beta = 1/6$), rata-rata prosentase perbedaan nilai hasil simpangan = $1,5 \times 10^{68}\%$. Perbedaan hasil dari kedua prinsip ini sangat jauh, dimana biasanya untuk variasi nilai Δt dan T yang sama hasilnya tidak berbeda terlalu jauh. Dan rata-rata prosentase perbedaan hasil simpangan menggunakan prinsip percepatan linear nilainya biasanya lebih kecil dari prinsip percepatan rata-rata. Lebih jelasnya dapat dilihat pada perbandingan Gambar 3 dan Gambar 4.



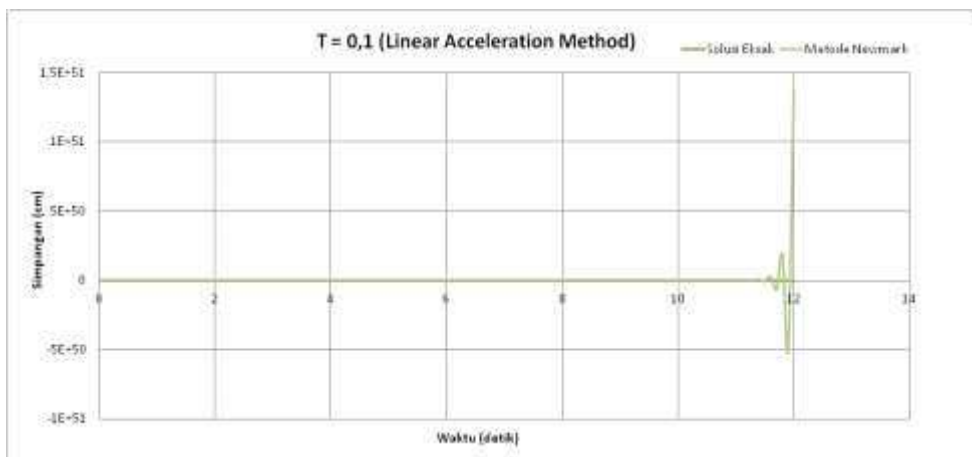
Gambar 1. Grafik selang pertambahan waktu (Δt) vs periode (T) untuk rata-rata nilai prosentase perbedaan hasil simpangan menggunakan metode Newmark dibandingkan dengan solusi eksak – Prinsip percepatan rata-rata (*average acceleration method*)



Gambar 2. Grafik selang pertambahan waktu (Δt) vs periode (T) untuk rata-rata nilai prosentase perbedaan hasil simpangan menggunakan metode Newmark dibandingkan dengan solusi eksak – Prinsip percepatan linear (*linear acceleration method*)



Gambar 3. Perbandingan nilai simpangan untuk $T = 0,1$ antara solusi eksak dengan prinsip percepatan rata-rata/*average acceleration method* (digunakan $\Delta t = 0,1$)

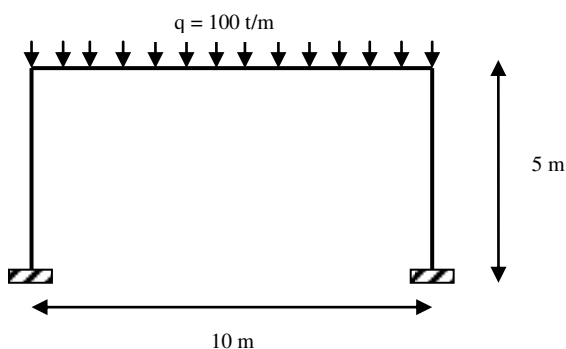


Gambar 4. Perbandingan nilai simpangan untuk $T = 0,1$ antara solusi eksak dengan prinsip percepatan linear/*linear acceleration method* (digunakan $\Delta t = 0,1$)

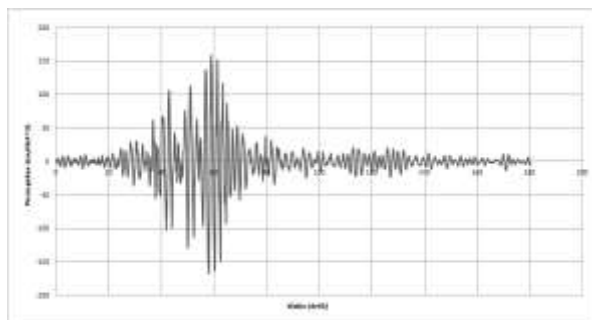
Pada grafik simpangan menggunakan prinsip percepatan linear, tidak terlihat lagi adanya efek redaman dan ciri khas beban impuls dimana seharusnya respon hasil simpangan semakin lama semakin kecil. Malah seiring pertambahan waktu, respons yang dihasilkan semakin lama semakin besar. Hal ini jauh berbeda pada grafik dari simpangan menggunakan prinsip percepatan rata-rata, dimana meskipun bentuk grafiknya cukup berbeda dengan grafik simpangan dari solusi eksak, tapi respon simpangannya masih memperlihatkan adanya efek redaman dan ciri khas dari beban impuls, dimana respon semakin lama semakin kecil.

Contoh Kasus

Suatu bangunan industri satu tingkat sederhana seperti terlihat pada Gambar 5. Berat struktur dapat diidealisasikan sebesar 100 t/m yang terbagi rata di atap bangunan. Kedua kolom menggunakan baja profil W 8 x 24. Struktur dianggap mempunyai koefisien redaman (ξ) sebesar 5 %. Struktur akan dibebani dengan percepatan tanah rekaman dari gempa Mexico City, 1985 seperti pada Gambar 6. Dicari percepatan, kecepatan, dan simpangan maksimum dari struktur.



Gambar 5. Struktur bangunan industri satu tingkat sederhana



Gambar 6. Rekaman percepatan tanah dari Gempa Mexico City, 1985

Penyelesaian:

$$q = 100 \text{ t/m}$$

$$W = 100 \times 10 = 1000 \text{ ton} = 1000000 \text{ kg}$$

$$g = 980,665 \text{ cm/det}^2$$

$$m = W/g = 1000000/980,665 = 1019,716 \text{ kg-det}^2/\text{cm}$$

Untuk baja profil W 8 x 24, $I_x = 3434 \text{ cm}^4$

$$\text{Modulus Elastisitas baja bangunan } E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$l = 5 \text{ m} = 500 \text{ cm}$$

$$k = 2 \left(\frac{12EI}{l^3} \right) = 2 \left(\frac{12 \times (2,1 \times 10^6) \times 3434}{500^3} \right) = 1384,589 \text{ kg/cm}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1384,589}{1019,716}} = 1,165 \text{ rad/det}$$

$$T = 2\pi / \omega_n = 2\pi / 1,165 = 5,393 \text{ detik}$$

$$f = 1 / T = 1 / 5,393 = 0,185 \text{ Hz}$$

Perhitungan lalu dilanjutkan menggunakan metode percepatan linear dan percepatan rata-rata pada program MS Excel.

Pada metode percepatan rata-rata, untuk tingkat kesalahan $\leq 1 \%$, $\Delta t = 0,005 \text{ T}$

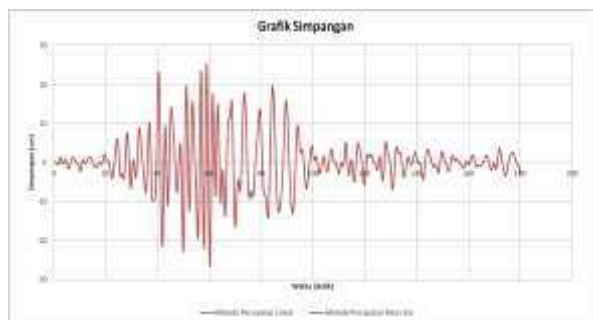
$$\Delta t = 0,005 (5,393) = 0,026 \approx 0,02 \text{ detik}$$

Digunakan $\Delta t = 0,02$ detik. Didapat hasil:
 Percepatan maksimum = 193,813 cm/det²
 Kecepatan maksimum = 70,827 cm/det
 Simpangan maksimum = 26,417 cm

Pada metode percepatan linear, untuk tingkat kesalahan $\leq 1 \%$, $\Delta t = 0,007 \text{ T}$

$$\Delta t = 0,007 (5,393) = 0,038 \approx 0,03 \text{ detik}$$

Digunakan $\Delta t = 0,03$ detik. Didapat hasil:
 Percepatan maksimum = 193,747 cm/det²
 Kecepatan maksimum = 70,850 cm/det
 Simpangan maksimum = 26,351 cm



Gambar 7. Perbandingan Grafik Simpangan antara Metode Percepatan Linear ($\Delta t = 0,03$) dan Metode Percepatan Rata-rata ($\Delta t = 0,02$)

PENUTUP

Kesimpulan

- Semakin kecil nilai periode struktur (T) maka semakin kecil pula nilai selang pertambahan waktu (Δt) yang diperlukan untuk mendapatkan respons struktur yang akurat.
- Metode percepatan linear terlihat lebih efisien dibanding percepatan rata-rata dalam memperoleh hasil yang akurat. Dari hasil penelitian didapat untuk rata-rata prosentase perbedaan nilai hasil simpangan $\leq 1\%$, kurang lebih diperlukan rata-rata nilai $\Delta t = 0,007 T$ bila menggunakan prinsip percepatan linear, dan $\Delta t = 0,005 T$ bila menggunakan prinsip percepatan rata-rata.
- Sebaliknya, metode percepatan linear mempunyai syarat nilai Δt tertentu agar proses numerik dapat dikatakan stabil (*conditionally stable*). Agar metode ini dapat dikatakan stabil, harus digunakan $\Delta t < 0,551 T$. Saat dilakukan penelitian menggunakan beban impuls setengah gelombang sinus, terlihat bahwa ketika digunakan $\Delta t > 0,551 T$

respons yang dihasilkan semakin lama semakin besar seiring pertambahan waktu meskipun adanya efek redaman dan ciri khas dari beban impuls dimana respons yang dihasilkan seharusnya semakin lama semakin kecil. Sedangkan metode percepatan rata-rata tetap stabil untuk berapa pun nilai Δt yang digunakan.

Saran

- Diharapkan adanya penelitian lebih lanjut mengenai kestabilan dan keakuratan numerik metode Newmark untuk analisis non-linear.
- Juga diharapkan adanya penelitian lebih lanjut mengenai kestabilan dan keakuratan numerik metode Newmark terhadap derajat kebebasan banyak/*multi degree of freedom* (MDOF).
- Semoga diperbanyak penelitian mengenai keakuratan dan kestabilan dari metode lain dalam menganalisis respons struktur terhadap gempa agar didapatkan perbandingan mengenai kelebihan dan kekurangan dari masing-masing metode.

DAFTAR PUSTAKA

- Chopra A.K., 1995. *Dynamics of Structures – Theory and Applications to Earthquake Engineering*, Prentice Hall International, Inc.
- Clough, R.W. & J. Penzien., 1988. *Dinamika Struktur*, Penerbit Erlangga, Jakarta.
- Clough, R.W. & J. Penzien., 2003. *Dynamics of Structures – Third Edition*, Computers & Structures, Inc.
- Paz, Mario., 1987. *Dinamika Struktur: Teori dan Perhitungan*, Penerbit Erlangga, Jakarta.
- Paz, Mario & William Leigh., 2004. *Structural Dynamics: Theory and Computation - 5th Edition*, Kluwer Academic Publishers.
- Widodo, MSCE., 2001. *Respons Dinamik Struktur Elastik*, UII Press, Yogyakarta.